SỞ GD&ĐT NINH BÌNH **TRƯỜNG THPT CHUYÊN** **LƯƠNG VĂN TỤY** ********	**ĐỀ THI ĐỀ XUẤT** **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC** **DUYÊN HẢI NĂM 2023** **MÔN: TOÁN 10** Thời gian làm bài: 180 phút (Đề này gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(yf\left(x\right)+2x\right)=f\left(xy\right)+yf\left(x\right)+f\left(f\left(x\right)\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 2 (3,0 điểm).

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$. Chứng minh rằng

$$2\left(ab+bc+ca\right)+4\min\left\{a^2,b^2,c^2\right\}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA và AB lần lượt tại D,E và F. Gọi P là giao điểm thứ hai (khác A) của đường tròn (O) với đường tròn đường kính AI.

a) Chứng minh rằng PD đi qua điểm chính giữa của cung BC không chứa A.

b) Gọi X là giao điểm của AD và BE; Q là điểm đối xứng với X qua EF; H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Chứng minh rằng ba điểm A,H,Q thẳng hàng.

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho $n>4$ là một hợp số sao cho n chia hết $\varphi(n)\sigma(n)+1$, ở đó $\varphi(n)$ là hàm Euler và $\sigma(n)$ là tổng các ước nguyên dương của n. Chứng minh n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

Câu 5 (4,0 điểm).

Với n là số nguyên dương, xét bảng ô vuông kích thước $n\times n$ được chia thành các ô vuông. Một cách tô các ô vuông màu đen được gọi là "đẹp" nếu số lượng ô đen mỗi hàng và mỗi cột bất kì luôn là số chẵn; đồng thời, số các ô màu đen trên đường chéo có độ dài lớn hơn 1 bất kì là số lẻ (*đường chéo ở đây là dãy các ô liên tiếp nằm trên đường thẳng song song với một trong hai đường chéo của bảng ô vuông ban đầu; độ dài đường chéo là số lượng ô nằm trên đó*).

a) Chứng minh rằng tồn tại một cách tô "đẹp" khi $n=2023$.

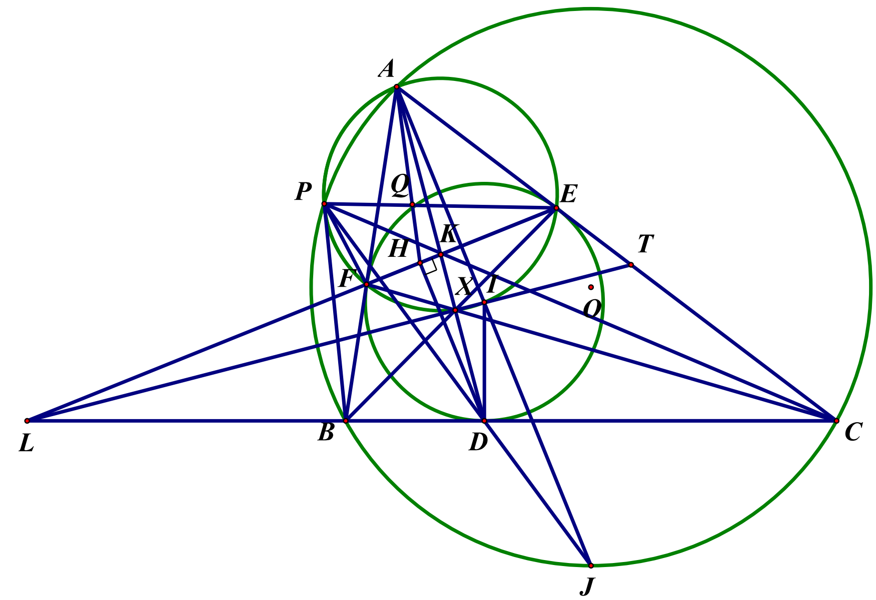
b) Chứng minh rằng không tồn tại cách tô "đẹp" với mọi n là số chẵn.

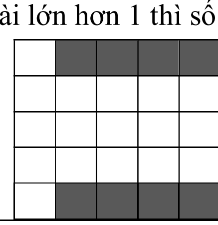
---------HẾT--------

SỞ GD&ĐT NINH BÌNH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY
****

HDC ĐỀ THI ĐỀ XUẤT
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI NĂM 2023
MÔN: TOÁN 10
Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề này gồm 07 câu, 08 trang)

Câu hỏi	Hướng dẫn	Điểm
1. **(4,0 điểm)**	Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(yf\left(x\right)+2x\right)=f\left(xy\right)+yf\left(x\right)+f\left(f\left(x\right)\right),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\qquad (1)$	
	Kí hiệu $P(a,b)$ là phép thế x bởi a và y bởi b trong (1) Nếu f là hàm hằng thì thay vào (1) ta được $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nếu f khác hằng. Từ $P(0,0)\Rightarrow f\left(f(0)\right)=0$ do đó tồn tại $k:f(k)=0$. Nếu $k\neq 0$, từ $P\left(k,\dfrac{x}{k}\right)\Rightarrow f(2k)=f(x)+f(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ là hằng. Vô lí. Vậy $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$. $P(x,0)\Rightarrow f(2x)=f\left(f(x)\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$ Giả sử tồn tại $a,b\neq 0$ thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Trừ vế theo vế $P\left(b,\dfrac{2a}{f(b)}\right);P\left(a,\dfrac{2b}{f(a)}\right)$ ta được $f\left(\dfrac{2ab}{f(b)}\right)-f\left(\dfrac{2ab}{f(a)}\right)+2(a-b)+f\left(f(b)\right)-f\left(f(a)\right)=0$ Do $f(a)=f(b)$ nên $a=b$. Vậy $f(x)$ đơn ánh. Lại có $f(2x)=f\left(f(x)\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên $f(x)=2x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $f(x)=c\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=2x\ \forall x\in\mathbb{R}$.	1,0 0.5 0.5 1,0 1,0
2. **(3,0 điểm)**	Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$. Chứng minh rằng $2(ab+bc+ca)+4\min\left\{a^2,b^2,c^2\right\}\geq a^2+b^2+c^2$.	
	Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Ta có: $\dfrac{4a\sqrt[3]{abc}+bc}{2}\geq\sqrt{4(abc)^{\frac{4}{3}}}$ $\Rightarrow\dfrac{a(a+b+c)+bc}{2}\geq\dfrac{1}{8}(a+b+c)^2$ $\Rightarrow 2(ab+bc+ca)+4a^2\geq a^2+b^2+c^2$. Ta có đpcm.	1,0 1,0 1,0
3. **(5,0 điểm)**	Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA và AB lần lượt tại D,E và F. Gọi P là giao điểm thứ hai (khác A) của đường tròn (O) với đường tròn đường kính AI. a) Chứng minh rằng PD đi qua điểm chính giữa của cung BC không chứa A.	

	b) Gọi X là giao điểm của AD và BE; Q là điểm đối xứng với X qua EF; H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Chứng minh rằng ba điểm A, H, Q thẳng hàng.	
	 	
	a) Xét hai tam giác PBF và PCE có $\widehat{PBF}=\widehat{PCE}$ (*) Vì $IE \perp AC, IF \perp AB$ nên E, F thuộc đường tròn đường kính AI. Do đó $\widehat{PFA}=\widehat{PEA}$ suy ra $\widehat{PFB}=\widehat{PEC}$ (**) Từ (*) và (**) suy ra hai tam giác PBF và PCE đồng dạng Suy ra $\frac{PB}{PC}=\frac{BF}{CE}=\frac{DB}{DC}$ (do $BD = BF; CE = CD$) Suy ra PD là phân giác trong của góc $\widehat{BPC}$ hay PD đi qua điểm chính giữa của cung BC không chứa A.	1,0 1,0
	b) Ta có $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}.=-1$ ($AE = AF, BF = BD, CE = CD$) Theo định lí Xeva ta có AD, BE, CF đồng qui tại X. Do tam giác ABC không cân nên EF cắt BC tại L. Gọi T là giao điểm của LX với AC và K là giao điểm của AD với EF. Xét tam giác LEC có LT, CF, EB đồng quy tại X. Suy ra $(ATEC)=-1 \Leftrightarrow (AKXD)=-1 \Leftrightarrow H(AKXD)=-1$ (1) Mà $HK \perp HD$, kết hợp (1) suy ra HK là phân giác trong của góc $\widehat{AHX}$ (2) Do Q đối xứng X qua HK nên HK là phân giác trong của góc $\widehat{QHX}$ (3) Từ (2) và (3) suy ra A, H, Q thẳng hàng.	1,0 1,0 1,0
4. (4,0 điểm)	Cho $n > 4$ là một hợp số sao cho n chia hết $\varphi(n)\sigma(n)+1$, ở đó $\varphi(n)$ là hàm Euler và $\sigma(n)$ là tổng các ước nguyên dương của n. Chứng minh n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Giả sử n là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố $n = p^k$, $k > 1$.
Khi đó $p \mid \varphi(n)$ nên $p \nmid \varphi(n)\sigma(n)+1$, mâu thuẫn $n \mid \varphi(n)\sigma(n)+1$.
Do đó n có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt.</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Giả sử $n = p^k q^\ell$, với p,q là hai số nguyên tố phân biệt, k,ℓ là các số nguyên dương.
Nếu $k>1$ hoặc $\ell>1$, tương tự như chứng minh trên thì ta cũng gặp mâu thuẫn.
Do đó $n = pq$. Suy ra
$\varphi(n)\sigma(n)+1 = (p-1)(q-1)(p+1)(q+1)+1 = p^2q^2 - p^2 - q^2 + 2$.</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Do đó $pq \mid p^2+q^2-2$. Giả sử $p^2+q^2-2 = mpq$ hay
$$p^2 - mpq + (q^2-2) = 0.$$
Cố định m, giả sử (a,b) là nghiệm nguyên dương của phương trình
$$x^2 - mxy + y^2 - 2 = 0 \quad (1).$$
với $a+b$ nhỏ nhất và $a \ge b$. Xét phương trình
$$t^2 - mbt + (b^2-2) = 0.$$</td>
<td>1,0</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Khi đó phương trình có một nghiệm $x = a$, do đó phương trình có một nghiệm $t_0 = \dfrac{b^2-2}{a} = mb - a$.
Dễ thấy t_0 nguyên. Nếu $b=1$ thì $a=1$, suy ra $m=0$, vô lí.
Do đó $b>1$, suy ra t_0 là số nguyên dương. Suy ra (t_0,b) cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (1).</td>
<td>1,0</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Kéo theo $a+b \le t_0 + b$, suy ra $a^2 \le b^2 - 2$, do đó $a<b$. Ta gặp mâu thuẫn. Như vậy n không thể có đúng hai ước nguyên tố phân biệt. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.</td>
<td>1,0</td>
</tr>
<tr>
<td>5.
(4,0 điểm)</td>
<td colspan="2">Với n là số nguyên dương, xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$ được chia thành các ô vuông. Một cách tô các ô vuông màu đen được gọi là “đẹp” nếu số lượng ô đen mỗi hàng và mỗi cột bất kì luôn là số chẵn; đồng thời, số các ô màu đen trên đường chéo có độ dài lớn hơn 1 bất kì là số lẻ (đường chéo ở đây là dãy các ô liên tiếp nằm trên đường thẳng song song với một trong hai đường chéo của bảng ô vuông ban đầu; độ dài đường chéo là số lượng ô nằm trên đó).
a) Chứng minh rằng tồn tại một cách tô “đẹp” khi $n = 2023$.
b) Chứng minh rằng không tồn tại cách tô “đẹp” với mọi n là số chẵn.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>a) 1,5 điểm
Ta xét cách tô màu cho bảng ô vuông kích thước lẻ tùy ý. Tô màu đen tất cả các ô ở hàng trên cùng và tất cả các ô ở dàng dưới trừ cột ngoài cùng bên trái như sau. Khi đó,</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>• Ở hàng 1 và hàng n thì số ô được tô là $n-1$ chẵn; các hàng còn lại có số ô được tô là 0.
• Ở cột 1 thì số ô được tô là 0; các cột còn lại có số ô được tô là 2.
• Trên mỗi đường chéo có độ dài lớn hơn 1 thì số ô được tô là 1.
</td>
<td>0.5</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Như vậy, cách tô trên là đẹp và khi đó với $n=2023$ cũng thỏa mãn.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>b) 2,5 điểm
Giả sử phản chứng rằng tồn tại cách tô màu đẹp cho bảng $n\times n$ khi n chẵn. Ta đánh dấu các ô theo thứ tự bởi các số $1,2,3,4$ như hình minh họa bên dưới với $n=8$.
<table>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Kí hiệu A,B,C,D lần lượt là số ô được đánh dấu nằm trong các ô đánh số $1,2,3,4$.
Ta có các nhận xét sau:
• $A+C$ phải là số lẻ vì các ô được đánh dấu trên đường chéo là số lẻ và các ô được đánh dấu bởi số 1 và 3 sẽ phủ lên lẻ đường chéo.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>• $A+B$ là số chẵn vì số các ô được đánh ở các cột bất kì đều là số chẵn.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>• Tương tự, $B+C$ cũng phải là chẵn.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ đó suy ra $A+C=(A+B)+(B+C)-2B$ cũng là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy nên điều giả sử là sai và không tồn tại cách đánh số đẹp trong trường hợp n chẵn.</td><td>0.5</td></tr>
</table>

---------HẾT--------

Người ra đề: Nguyễn Thị Bích Ngọc - Số điện thoại: 0904014676