CHUYÊN ĐỀ

Giải Phương Trình Vô Tỷ

Bằng Phương Pháp Đánh Giá

Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình

I.LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình-Hệ phương trình-Bất đẳng thức có mối quan hệ chặt chẽ với nhau.Đây cũng chính là những phần quan trọng nhất của đại số.Nó thường xuyên xuất hiện trong kì thi tuyển sinh Đại Học (THPT QG) hay các kì thi HSG.Ta cần có những phương trình,hệ phương trình để dự đoán được điểm rơi của BĐT hay trong quá trình sáng tác một Bất đăng thức sẽ nảy sinh ra nhu câu tìm nghiệm của Phương trình-Hệ phương trình-Bất đẳng thức.Qua đấy có thể nói việc giải tốt PT-HPT là rất quan trọng.Nhiều bài toán về PT-HPT-BĐT là sự che dấu của một BĐT nào đó.Chúng ta cần phải linh hoạt khi sử dụng BĐT vào giải PT-HPT.Vì nếu không dùng đúng thì sẽ dẫn đến kết quả không như mong muốn.Giải PT bằng phương pháp bằng đánh giá chính là một sự kết hợp tuyệt vời giữa BĐT và PT

Đã có rất nhiều tài liệu,sách viết về PT.Tuy vậy,những bài viết về Giải PT bằng phương pháp bằng đánh giá chưa đề cập toàn diện về như cách giải hay là phương pháp sáng tác.Vì vậy,trong tài liệu này sẽ đề đi sau vào cách giải PT bằng phương pháp đánh giá (Một trong những phương pháp hay và khó khi GPT)

Hy vọng nó sẽ là tài liệu hay giúp cho các bạn hiểu rõ hơn về Phương pháp này

Trong tài liệu này sẽ có ba mục:

Mục 1:Nhắc lại một số BĐT hay dùng khi giải phương trình,phương pháp giải PT vô tỷ bằng phương pháp đánh giá

Mục 2:Một số ví dụ và cách sáng tác phương trình bằng phương pháp đánh giá

Mục 3:Tổng hợp bài tập

Sai sót là điều không thể tránh khỏi trong bài viết này,vì thế xin trân trọng đón nhận mọi sự góp ý và nhận xét của các bạn và thầy cô.

Mọi ý kiến thắc mắc gửi vào gmail:xuanhung312000@gmail.com

Các thành viên tham gia viết chuyên đề

Chủ biên:Đinh Xuân Hùng (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

Các thành viên tham gia viết chuyên đề:

1.Nguyễn Khánh Trường (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

2.Hoàng Trung Hiếu (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

3.Vũ Minh Hạnh (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

4.Tống Đức Khải (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

5.Nguyễn Thị Thu Trang(Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

6.Bùi Thị Thùy Linh (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

7.Phạm Thị Phương Loan (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

8.Đào Thị Thanh Huyền (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

9.Lê Anh Quang (Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình)

Xin cảm ơn cô Ngô Thị Hoa (Cô giáo chủ nhiệm Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình) đã hướng dẫn cũng như các ví dụ về Phương Pháp Giải PT bằng đánh giá.Cô chính là người khởi xướng việc viết chuyên đề này.

♥ Toán K57-THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình♥

II. Nhắc lại một số BĐT hay dùng khi giải phương trình,phương pháp giải PT vô tỷ bằng phương pháp đánh giá

Các BĐT hay dùng

[1].Bất đẳng thức AM-GM

Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ ta luôn có BĐT

$$a_1+a_2+...+a_n \ge n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$

[2].Bất đẳng thức Cauchy-Schwar (C-S)
Cho 2 bộ số $(a_1\ ;a_2;...;a_n)$ và $(b_1\ ;b_2;...;b_n)$ ta luôn có BĐT

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

Một hệ quả của bất đẳng thức Cauchy-Schwar rất hay dùng:

$$\frac{a_1^{\ 2}}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+....+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Với điều kiện $b_1;b_2;...;b_n$ là các số dương

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

[3].Bất đẳng thức Minkowski (Hay còn gọi là phương pháp tọa độ)

Cho 2 bộ số $(a_1\ ;a_2;...;a_n)$ và $(b_1\ ;b_2;...;b_n)$ ta luôn có BĐT

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2} \ge \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+....+(a_n+b_n)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

[4].Bất đẳng thức Holder

Với m dãy số dương $(a_{1,1};a_{1,2};...;a_{1,n}),(a_{2,1};a_{2,2};...;a_{2,n}),...,(a_{m,1};a_{m,2};...;a_{m.n})$ ta có

$$\prod\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}\right)^m$$

Dấu "=" xảy ra khi m dãy đó tương ứng tỉ lệ.Bất đẳng thức Cauchy-Schwar là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder với m=2

Với a,b,c,x,y,z,m,n,p là các số thực dương ta có: $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\geq\left(axm+byn+czp\right)^3$
Đây chính là hệ quả hay dùng của BĐT Holder khi m=3

Phương pháp giải

Thông thường ta sẽ đánh giá như sau $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq C(\leq C) \Leftrightarrow f(x)=g(x)=C \\ g(x)\leq C(\geq C) \end{cases}$

Hoặc đánh giá trực tiếp $f(x)\geq g(x); f(x)\leq g(x)$
Từ đó tìm dấu "=" xảy ra của đẳng thức (tức là giá trị của biến để thỏa mãn điều kiện xảy ra dấu bằng)
Ngoài ra trong một số bài ta có thể sử dụng điều kiện của nghiệm để đánh giá

Đôi khi tôi muốn hét to với cả thế giới rằng tôi mới may mắn làm sao khi tôi được làm bạn với bạn, nhưng đôi khi tôi muốn im lặng, sợ rằng ai đó sẽ đem bạn rời khỏi tôi.

---Khuyết danh----

Ở đâu đó có người đang mơ về nụ cười của bạn, ở đâu đó có người cảm thấy sự có mặt của bạn là đáng giá, vì vậy khi bạn đang cô đơn, buồn rầu và ủ rũ, hãy nhớ ràng có ai đó, ở đâu đó đang nghĩ về bạn.
Somewhere there's someone who dreams of your smile, somewhere there's someone who finds your presence worthwhile, so when you are lonely, sad and blue, remember there is someone, somewhere thinking of you.

----Khuyết danh----

III. Một số ví dụ và phát triển phương trình vô tỷ bằng phương pháp đánh giá

Ví dụ 1.Giải phương trình: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=2\,(1)$

Tập xác định $[4;6]$

Bình luận:
Đây là 1 bài toán có rất nhiều cách giải (Bình phương 2 vế,liên hợp,…) nhưng ta thử trình bày bài toán qua phương pháp đánh giá xem sao? ☺

Bài làm

Áp dụng BĐT C-S cho bộ số $\left(\sqrt{6-x};\sqrt{x-4}\right)$ và (1;1) ta có:

$$(1+1)(6-x+x-4)\ge(\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4})^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{6-x}=\sqrt{x-4}\Leftrightarrow x-6=x-4\Leftrightarrow x=5(TM)$

$\Rightarrow\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\right)^2\le 4$ mà $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\ge 0\Rightarrow\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\le 2$ .Dấu bằng xảy ra khi x=5(2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow x=5$

Vậy **x=5**

Nhận xét:
Tại sao mình lại đưa bài toán này làm ví dụ đầu tiên?Vì mình muốn nói đến ưu điểm,nhược điểm của phương pháp đánh giá

<u>Ưu điểm:</u>Cách giải nhanh,gọn nhẹ,không phải tính toán vất vả

<u>Nhược điểm:</u>Không như những phương pháp giải PT vô tỷ khác thì phương pháp đánh giá không phải bài nào cũng dùng được.Bạn nào không tỉnh táo để sử dụng thì chắc chắn dẫn đến việc thiếu nghiệm hoặc không dẫn đến kết quả như mong đợi."Trăm nghe không bằng một thấy" thử làm một bài PT tương tự **Ví dụ 1** nào

Giải phương trình: $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1}=3$

TXĐ $[-1;4]$

Áp dụng BĐT C-S cho bộ số $\left(\sqrt{4-x};\sqrt{x+1}\right)$ và (1;1) ta có: $\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1}\right)^2\le(4-x+x+1)(1+1)$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{4-x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=3(TM)$

$\Rightarrow\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1}\right)^2\le 10\Rightarrow 0\le\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1}\le\sqrt{10}$??

Đến đây thì làm sao tiếp đây nhỉ?Vì cả 2 vế đều nhỏ hơn $\sqrt{10}$ và phương trình còn xót nghiêm **x=0** nữa
Đúng là cùng một dạng mà nếu bài nếu cũng dùng phương pháp đánh giá để giải sẽ dẫn đến việc không giải được hoặc thiếu nghiệm

Chú ý: **Dạng phương trình:** $a\sqrt{x-m}+b\sqrt{n-x}=P$ (với a,b,m,n là các số bất kì).P có thể là một số cũng có thể P=f(x)

-Đầu tiên chúng ta dùng máy tính *Casio* (cách nhẩm thế nào chắc các bạn cũng biết nhỉ ☺) để nhẩm nghiệm
-Nếu như PT có **một nghiệm duy nhất** thì chúng ta mới sử dụng phương pháp đánh giá còn không mình khuyên các bạn đừng sử dụng nhé!
-Cách làm:Tương tự **VD1**

Ví dụ 2.Giải phương trình: $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}=x^2-10x+27$ **(1)**

TXĐ $[4;6]$

Bình luận

VD2 với **VD1** đều có đặc điểm chung đó là cùng có $(\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4})$ ở vế trái và đều có nghiệm duy nhất là 5.Nhưng bài này nếu dùng phương pháp bình phương hoặc liên hợp thì PT ở VD2 chắc chắn sẽ khó xử lí hơn so với VD1.Tại sao chúng ta không dùng phương pháp đánh giá nhỉ?(Dạng PT vừa nêu ở trên mà) Thử nhé!

Bài làm

Áp dụng BĐT C-S cho bộ số $(\sqrt{6-x};\sqrt{x-4})$ và (1;1) ta có:

$$(1+1)(6-x+x-4)\geq(\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4})^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{6-x}=\sqrt{x-4}\Leftrightarrow x-6=x-4\Leftrightarrow x=5(TM)$

$\Rightarrow\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\right)^2\leq 4$ mà $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\geq 0\Rightarrow\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\leq 2$ .Dấu bằng xảy ra khi x=5(2)

Xét hiệu: $x^2-10x+27-2=(x-5)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-10x+27\geq 2$ .Dấu bằng xảy ra khi x=5(3)

Từ (1)(2)(3)$\Rightarrow x=5$

Vậy **x=5**

Nhận xét:Đó chính là một trong những ưu điểm khi sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình Vô tỷ

Ví dụ 3.Giải phương trình: $x^3-11x^2+36x-18=4\cdot\sqrt[4]{27x-54}$ **(1)**

ĐKXĐ: $x\geq 2$

Bình luận

Phương trình này có số mũ 2 vế khá là to.Nhưng cái hay chính là phương trình này có nghiệm duy nhất là 5 và bên vế trái được tách thành $4\cdot\sqrt[4]{3.3.3.(x-2)}$ .Sao chúng ta không thử sử dụng BĐT AM-GM nhỉ?

Bài làm

Áp dụng BĐT AM-GM cho 4 số không âm 3;3;3 và (x-2) ta được:

$$4\cdot\sqrt[4]{3.3.3.(x-2)}\leq x-2+3+3+3=x-7$$

Dấu "=" xảy ra khi khi $3=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow x=5(TM)$

$\Rightarrow x+7\geq 4\cdot\sqrt[4]{27x-54}$ .Dấu "=" xảy ra khi x=5 (2)

Xét hiệu: $x^3-11x^2+36x-18-x-7=(x-5)^2(x-1)\geq 0\forall x\in TXĐ\Rightarrow x^3-11x^2+36x-18\geq x+7$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi x=5

Từ (1)(2)(3)$\Rightarrow x=5$

Chú ý:Cách sáng tác những PT dạng này:

Ta sẽ xét hai BĐT có cùng dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi x=3 và $x\ge -1$ ta có:

$\sqrt[4]{2^4.2^4.2^4.(4x+4)}\le \dfrac{2^4+2^4+2^4+(4x+4)}{4}=x+13\,(1)$

Và $x^3-3x^2-9x+27=(x-3)^2(x+3)\ge 0(2)$

Với $x\ge -1$ thì dấu "=" ở (1) và (2) cùng xảy ra khi và chỉ khi x=3.

Từ (1)(2) và $x^3-3x^2-9x+27-(x+13)=x^3-3x^2-8x+40$ ta được bài toán sau:

Ví dụ 3.1.Giải phương trình sau: $x^3-3x^2-8x+40=8\cdot\sqrt[4]{4x+4}$ **(1)**

ĐKXĐ: $x\ge -1$

Lời giải:

Áp dụng BĐT AM-GM cho 4 số không âm $2^4;2^4;2^4;(4x+4)$ ta được:

$$\sqrt[4]{2^4.2^4.2^4.(4x+4)}\le \frac{2^4+2^4+2^4+(4x+4)}{4}=x+13\,(2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $4x+4=16\Leftrightarrow x=3(TM)$

Xét hiệu: $x^3-3x^2-9x+27-(x+13)=x^3-3x^2-8x+40=(x-3)^2(x+3)\ge 0$.

$\Rightarrow x^3-3x^2-9x+27\ge x+13$ .Dấu "=" xảy ra khi x=3(3)

Từ (1)(2)$\Rightarrow x=3$

Vậy **x=3**

Nhận xét:Với cách sáng tác trên chắc bạn cũng sáng tác được nhiều bài PT dạng này nhỉ ☺

Ví dụ 4.Giải phương trình: $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$**(1)**

ĐKXĐ: $x\ge \dfrac{1}{2}$

Lời giải:

Ta thấy $x=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của PT (1)

Với $x>\dfrac{1}{2}$ thì $\begin{cases}\sqrt{4x-1}>1\\ \sqrt{4x^2-1}>0\end{cases}\Rightarrow \sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}>1(KTM)$

Vậy **x=**$\dfrac{1}{2}$

Nhận xét

Đây là một dạng PT rất hay găp.Và cách giải chung của nó là dự đoán được nghiệm duy nhất rồi sau đó sử dụng phương pháp đánh giá để giải

Tổng quát: $x=x_0$ *là nghiệm duy nhất ta sẽ cần chứng minh với* $x>x_0$ *hoặc* $x<x_0$ *đều không thỏa mãn.Để Ta có thể đưa ra kết luận* $x=x_0$ *là nghiệm duy nhất*

Ví dụ tương tự:

Ví dụ 4.1.Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

TXĐ:D=R

Lời giải:

Ta thấy x=-2 là nghiệm của phương trình

Thật vậy: $VT = \sqrt[3]{-2+1} + \sqrt[3]{-2+2} + \sqrt[3]{-2+3} = 0 = VP$

Với x>-2 $\Rightarrow \begin{cases} x+1 < -1 \\ x+2 < 0 \\ x+3 < 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} < -1+0+1 = 0 (KTM)$

Với x<-2 $\Rightarrow \begin{cases} x+1 > -1 \\ x+2 > 0 \\ x+3 > 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} > -1+0+1 = 0 (KTM)$

Vậy **x=-2** là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 4.2.Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-3x+4}$ **(1)**

ĐKXĐ: $\begin{cases} 3x^2-7x+3 \ge 0 \\ x^2-2 \ge 0 \\ 3x^2-5x-1 \ge 0 \\ x^2-3x+4 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge \dfrac{5+\sqrt{37}}{6} \end{array} \right.$

Chú ý:Đối với những bài mà ĐKXĐ khó giải thì tốt nhất không nên giải ra.Chỉ cần tìm được nghiệm rồi Thay lại là được

Lời giải:

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x-1-2(x-2)} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-2-3(x-2)}$

Ta thấy x=2 là một nghiệm của PT (1)

Với x>2 thì $VT = \sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} > \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-2-3(x-2)} = VP (KTM)$

Với x<-2 thì $VT = \sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} < \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-2-3(x-2)} = VP (KTM)$

Vậy **x=2** là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 5.Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$ **(1)**

ĐKXĐ: $x \ge 1$

Bình luận:Ý tưởng khai thác yếu tố hình học ẩn chứa trong bài toán ở chỗ vế trái phương trình được cho dưới dạng $\sqrt{x-1}.1 + (x-3).1$ *từ đó giúp ta nhớ đến biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong*

mặt phẳng tọa độ Oxy
Bài làm

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x-3;\sqrt{x-1})\\ \vec{v}=(1;1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(x-3)^2+x-1}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{2}\end{cases}$

Theo bất đẳng thức: $\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ ta có:

$\sqrt{x-1}+(x-3)\le\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}(2)$

Từ $(1)(2)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u};\vec{v}$ cùng phương hay $\vec{u}=k.\vec{v}(k>0)$

$\begin{cases}\sqrt{x-1}=k\\ x-3=k\\ k>0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=x-3>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Rightarrow x=5(TM)$

Vậy **x=5**

Nhận xét
Thực chất phương pháp trên cũng chỉ là BĐT Minkowski mà thôi.Tuy vậy bài toán trên trình bày với phương pháp tọa độ Oxy thì trông vừa đẹp vừa ngắn.Nếu bạn sử dụng BĐT Minkowski thì các bạn sẽ phải có thêm bước chứng minh nhé ☺

Xây dựng bài toán từ tính chất cực trị hình học

Dùng tọa độ của vec-tơ

❋Trong mặt phẳng tọa độ Oxy.Cho các vec-tơ: $\vec{u}=(x_1;y_1),\vec{v}=(x_2;y_2)$ khi đó ta có:

• $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(x_1+y_1)^2+(y_1+y_2)^2}\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vec-tơ $\vec{u};\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=k\ge0$.Chú ý tỉ số phải dương

• $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha=1\Leftrightarrow\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=k.\vec{v}(k>0)$

Sử dụng tính chất đặc biệt về tam giác

• Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì với mọi điểm M tùy ý trên mặt phẳng tam giác,ta luôn có

$MA+MB+MC \geq OA+OB+OC$ với O là tâm của đường tròn.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng O
•Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và một điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì MA+MB+MC nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm M nhìn các cạnh AB,AC,BC dưới cùng một góc $120°$

Đến đây chắc các bạn cũng tự sáng tác được nhiều bài GPT sử dụng tính chất cực trị hình học rồi nhỉ ☺
Một số ví dụ tương tự:

Ví dụ 5.1.Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}=3$

Bài làm

TXĐ:D=R

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1^2}+\sqrt{(\sqrt{3}x+1)^2+(x+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}x-1)^2+(x+1)^2}=3\sqrt{2}(1)$

Chọn $\begin{cases}\vec{u}=(1;1-2x)\\ \vec{v}=(\sqrt{3}x+1;x+1)\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(3;3)\Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|=3\sqrt{2}\\ \vec{w}=(1-\sqrt{3}x;x+1)\end{cases}$

Ta có: $\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|\leq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|$
$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1^2}+\sqrt{(\sqrt{3}x+1)^2+(x+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}x-1)^2+(x+1)^2}\geq 3\sqrt{2}(2)$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ cùng hướng

Từ (1)(2)$\Rightarrow$ $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ cùng hướng
$\Leftrightarrow \exists k,l>0\begin{cases}\vec{v}=k.\vec{u}\\ \vec{v}=l.\vec{w}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x+1=k.1\\ x+1=k(1-2x)\\ \sqrt{3}x+1=l(1-\sqrt{3}x)\\ x+1=l(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow x=0(TM)$
Vậy **x=0**

Ví dụ 6.Giải phương trình: $13\cdot\sqrt{x^2-x^4}+9\cdot\sqrt{x^2+x^4}=16$ **(1)** (Đề thi Olympic Toán 30/04/2011)

ĐKXĐ: $-1\leq x\leq 1$

Bài làm

Ta có: $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}$

$=9|x|.\sqrt{1+x^2}+13|x|\cdot\sqrt{1-x^2}$

$=\dfrac{3}{2}.3.|x|.2\sqrt{1+x^2}+\dfrac{13}{2}.|x|.2.\sqrt{1-x^2}$

$\leq\dfrac{3}{4}\left[9x^2+4(1+x^2)\right]+\dfrac{13}{4}\left[x^2+4(1-x^2)\right]=16$ (BĐT AM-GM cho hai số dương)

$\Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}\leq 16$.Dấu "=" xảy khi $\begin{cases}3|x|=2\sqrt{1+x^2}\\ |x|=2\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{5}}(TM)(2)$

Từ (1)(2)$\Rightarrow x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Nhận xét

Nếu như các bạn đọc lời giải thì chắc hẳn sẽ nghĩ bài toán này khá dễ.Đúng vậy mình cũng đồng ý với ý kiến của các bạn.Tuy nhiên quá trình tìm ra lời giải thì lại khác.Đây là quá trình khá khó và phải sử dụng đến các ẩn $\alpha;\beta$ để tìm ra được lời giải hoàn chỉnh.Sau đây mình xin nếu ra ý tưởng khi làm bài này:

Với mọi số dương $\alpha;\beta$

$$13\sqrt{x^2+x^4}=13.\frac{1}{\alpha}.\sqrt{\alpha^2x^2(1-x^2)}\leq\frac{13(\alpha^2-1)x^2+13}{2\alpha}$$

$$9\sqrt{x^2+x^4}=9.\frac{1}{\beta}.\sqrt{\beta^2x^2(1+x^2)}\leq\frac{9(\beta^2+1)+9}{2\beta}$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x^2+x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}\leq\left[\frac{13(\alpha^2-1)}{2\alpha}+\frac{9(\beta^2+1)}{2\beta}\right]x^2+\frac{13}{2\alpha}+\frac{9}{2\beta}$$

Để có điều cần chứng minh tức là $VT\leq 16$ thì ta cần chọn các số dương α,β sao cho

$$\begin{cases}\alpha^2x^2=1-x^2\\ \beta^2x^2=1+x^2\\ \dfrac{13(\alpha^2-1)}{2\alpha}+\dfrac{9(\beta^2+1)}{2\beta}=0\\ \dfrac{13}{2\alpha}+\dfrac{9}{2\beta}=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \beta=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy là ta đã tìm được $\alpha;\beta$ .Khi đó chỉ cần thay $\alpha;\beta$ vào là được (như lời giải bên trên).Các bạn cũng hoàn toàn có thể sáng tác được những PT giải quyết theo bài toán này (những dạng PT được giải theo cách này thường rất hay và khó)

Ví dụ 7.Giải phương trình: $4\sqrt{x^2-x+10-4\sqrt{2-2x}} = x-7+8\sqrt{x-3}$ **(1)**

ĐKXĐ: $x \le 1$

Bình luận

PT trên là dạng PT căn lồng trong căn.Đối với dạng PT này cách tối ưu nhất là giải bằng phương pháp đánh giá.Vì hầu hết các phương pháp như bình phương,liên hợp,ẩn phụ tối với bài này đều không được. Bình phương thì số mũ của PT sau khi bình phương mất hết căn là quá to.Liên hợp có thể giúp ta tìm được một nghiệm nhưng còn bên trong căn thì quá kho xử lý.Ẩn phụ thì rất khó phát hiện để tìm ra ẩn phụ thích hợp.
PT trên có nghiệm duy nhất x=-1 càng khiến cho ta tin rằng PT trên hoàn toàn được giải quyết bằng phương pháp đánh giá.Vậy thử nhé!

Bài làm

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số không âm $\sqrt{2-2x}$ và 2 ta được:

$$4+2-2x \ge 2.2.\sqrt{2-2x}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2=\sqrt{2-2x}$
$\Leftrightarrow 4 = 2-2x$
$\Leftrightarrow x=-1 (TM)$

$\Rightarrow 4\sqrt{2-2x} \le 6-2x$
$\Leftrightarrow x^2-x+10-4\sqrt{2-2x} \ge x^2-x+10-6+2x$
$\Leftrightarrow x^2-x+10-4\sqrt{2-2x} \ge x^2+x+4$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-x+10-4\sqrt{2-2x}} \ge 4\sqrt{x^2+x+4}$.Dấu "=" xảy khi x=-1 (2)

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số không âm $\sqrt{3-x}$ và 2 ta được:

$$3-x+4 \ge 2.2.\sqrt{3-x}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2=\sqrt{3-x} \Leftrightarrow x=-1 (TM)$
$\Rightarrow 2(7-x) \ge 8\sqrt{3-x}$
$\Leftrightarrow x-7+2(7-x) \ge x-7+8\sqrt{3-x}$
$\Leftrightarrow 7-x \ge x-7+8\sqrt{3-x}$.Dấu "=" xảy khi x=-1(3)

Xét hiệu: $16(x^2+x+4)-(7-x)^2 = 15(x+1)^2 \ge 0$.Dấu "=" xảy khi x=-1
$\Rightarrow 16(x^2+x+4) \ge (7-x)^2$ mà $16(x^2+x+4) > 0; 7-x > 0$
$\Rightarrow 4\sqrt{x^2+x+4} \ge 7-x$.Dấu "=" xảy khi x=-1(4)

Từ (1)(2)(3)(4) $\Rightarrow x=-1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất **x=-1**

Ví dụ 8:Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

ĐKXĐ: $x\geq 0$

Bài làm

Áp dụng BĐT C-S ta có:

$$VT^2=\left(2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\leq(x+9)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+1}\right)=(x+9)=VP^2$$

Dấu bằng xảy khi $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow 8=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}(TM)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{7}$

Ví dụ 9.Giải phương trình: $2x=\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{x+3}}}}$

ĐKXĐ: $x\geq -3$.Điều kiện phương trình có nghiệm là x>0

Bình luận:Lại là kiểu 'căn lồng trong căn'.Và như đã nói phương pháp tốt nhất để giải loại PT này chính là phương pháp đánh giá.Thử thôi!

Bài làm

Đặt $a=\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{x+3}}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2x=\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+a}}\\2a=\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+x}}\end{cases}$$

Giả sử $x\geq a\Rightarrow 2x\geq 2a\Rightarrow\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+a}}\geq\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+x}}$ .Mà $f(t)=\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+t}}$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$

nên suy ra $a\geq x\Rightarrow a=x$ .Hay $2x=\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+x}}$

Đặt $b=\frac{1}{2}\sqrt{3+x}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2x=\sqrt{3+b}\\2b=\sqrt{3+x}\end{cases}$$

Giả sử $x\geq b\Rightarrow\sqrt{3+b}\geq\sqrt{3+x}\Rightarrow b\geq x$

$\Rightarrow b = x$

Hay $2x = \sqrt{3+x}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 (TM) \\ x = -\dfrac{3}{4} (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=1

Ví dụ 10.Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+6}$

Bình luận:Đối với bài này ta sử dụng một đánh giá rất ít gặp

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x) + a.h(x)} + \sqrt{g(x) + b.h(x)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Với mọi số a,b dương

Bài làm

Biến đổi phương trình thành: $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2-1+2(x+2)} + \sqrt{x^2-3x+2+2(x+2)}$

Sử dụng đánh giá trên ta có $\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x = -2 \\ 2(x+2) = 0 \end{cases}$

Thử lại x=-2 là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=-2

Đó là một số Ví dụ để làm rõ phương pháp đánh giá khi giải phương trình vô tỷ.Hy vọng những ví dụ trên phần nào giúp các bạn có thể hiểu và vận dụng được phương pháp đánh giá khi giải phương trình. Để các bạn có thể nắm rõ cũng như luyện kĩ năng thì mình xin được nêu ra một số Bài tập và các lời giải tóm tắt

"Nhân cách của người thầy là sức mạnh có ảnh hưởng to lớn đối với học sinh, sức mạnh đó không thể thay thế bằng bất kỳ cuốn sách giáo khoa nào, bất kỳ câu chuyện châm ngôn đạo đức, bất kỳ một hệ thống khen thưởng hay trách phạt nào khác."

--- Usinxki---

IV.Bài tập và lời giải tóm tắt

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}=\sqrt{x^2-8x+24}$

2) $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^2+x}$

3) $\sqrt{\frac{x+7}{x+1}}+8=2x^2+2\sqrt{2x-1}$

4) $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4.(2x^2-4x+1)$

5) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$

6). $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

7) $2\cdot\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}}=1+\sqrt{\frac{27}{2}x+6}$

8) $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=\frac{3xy}{2}$

9) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

10) $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1=\sqrt{2x^3-x^2+x+1}$

11) $x^2\cdot\sqrt[4]{2-x^4}=x^4-x^3$

12) $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$

13) $\sqrt[3]{x^2+28}+2\sqrt[3]{x^2+23}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2}+9$

14) $\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

15) $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6$

16)Tìm nghiệm nguyên dương của PT sau: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{x.(x+1)}=\frac{\sqrt{4-x}+4}{\sqrt{4-x}+5}$

17) $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$

18) $\sqrt[3]{x^3+5x^2+14x+9}-x=2\left(\sqrt{x^2-2x-1}+1\right)$

19) $\sqrt{4x-1}+\sqrt[4]{8x-3}=4x^4-3x^2+5x$

20) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+16x+64}=8$

21) $1+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$

22) $8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5}$

23) $\sqrt[4]{x}=\frac{3}{8}+2x$

24) $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$

25) $\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}=1$

26) $\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2+4x+9}=\frac{x^2}{3}+6$

27) $\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{3}-x^2$

28) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2}=x+1$

29) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

30) $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x+\frac{3}{x}$

31) $\sqrt{1-x-2x^2}=1-\frac{x}{2}$

32) $x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{5-x^2}$

33) $\sqrt{2x^2-1}+x\sqrt{2x-1}=2x^2$

34) $\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x+1}-x^3+3x-2=0$

35) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{2x+1}$

36) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{3+\sqrt{1-x}}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

37) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-(x+\dfrac{1}{x})$

Lời giải Tóm tắt

1)

ĐKXĐ : $2\le x\le 6$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copxki ta có:

$\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}\right)^2\le 2\left(x-2+6-x\right)=8$

$\to VT^2\le 8$

Mà VT $>0\to VT\le 2\sqrt{2}$ $\quad(1)$

Ta có $x^2-8x+24=\left(x-4\right)^2+8\ge 8$

$\to VP^2\ge 8$

Mà VP $>0\to VP\ge 2\sqrt{2}$ $\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow VT=VP=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}=\sqrt{6-x}\\ \left(x-4\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy x=4 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2)

Ta có 16 x^4 + 5 >0 $\forall x$

Nên từ (1) $\Rightarrow$ x> 0

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy ta có:

16 x^4 + 5 = $3\sqrt[3]{2.4x(4x^2+1)}\le 2+4x+4x^2+1$

$\Leftrightarrow$ 16 x^4 + 5 - $4x^2$ -4x -3 ≤ 0

$\Leftrightarrow$ 16 x^4 - $4x^2$ -4x +2 ≤ 0

$\Leftrightarrow$ $(2x-1)^2(2x^2+2x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow$ 2x -1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn x> 0)

3)

ĐKXĐ : x $\ge\dfrac{1}{2}$

Ta thấy x =2 là nghiệm của phương trình (1)

Ta sẽ chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Pt (1) $\Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{6}{x+1}}+8=2x^2+\sqrt{2x-1}$

* Nếu x >2 thì $\frac{6}{x+1}\langle 2$

$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{6}{x+1}}+8<\sqrt{3}+8$

$\Rightarrow VT<\sqrt{3}+8^{(2)}$

$2x^2+\sqrt{2x-1}>2.2^2+\sqrt{2.2-1}=\sqrt{3}+8$

$\Rightarrow VP>\sqrt{3}+8^{(3)}$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ Vô lý.

* Nếu $\frac{1}{2}\le x\le 2$ thì VT $>\sqrt{3}+8$; VP < $\sqrt{3}+8$ $\Rightarrow$ Vô lý.

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

4)

$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4.(2x^2-4x+1)$ (1)

ĐKXĐ: $0\le x\le 2$

Đặt t = $(x-1)^2\Rightarrow 0\le t\le 1$

Phương trình (1) trở thành:

$\sqrt{1+\sqrt{1-t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-t}}=2t^2(2t-1)$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow 2t-1\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{1}{2}$

Bình phương 2 vế của (2) ta được:

$1+\sqrt{1-t}+1-\sqrt{1-t}+2\sqrt{\left(1+\sqrt{1-t}\right)\left(1-\sqrt{1-t}\right)}=4t^4(2t-1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{t}+1=2t^4(2t-1)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3\sqrt{t}}=2(2t-1)^2$ (3)

Vì t$\le$1 nên $\frac{1}{t^4}+\frac{1}{\sqrt{t}t^3}\ge 2$

Ta có: $\frac{1}{2}\le t\le 1$ (4)

$\Rightarrow 0\le 2t-1\le 1$

$\Rightarrow (2t-1)^2\le 1$

$\Rightarrow 2(2t-1)^2\le 2$ (5)

Từ(3), (4), (5) $\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow (x-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

5)

$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$ (1)

ĐKXĐ $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Áp dụng bất đăng thức Bunhiacopxki ta có:

$(\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1})^2 \le (2+x^2)(3x^2-1+x^2-x+x^2+1)$

$= (2+x^2)(5x^2-x)$

$\Rightarrow$ $VT^2\ge 0 \Rightarrow VT < \sqrt{(2+x^2)(5x^2-x)}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$(7x^2-x+4) = (5x^2-x+(x^2+2).2) \ge 2\sqrt{(2+x^2).2.(5x^2-x)}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(7x^2-x+4)\ge\sqrt{(2+x^2)(5x^2-x)}$

$\Rightarrow$ VP $\ge\sqrt{(2+x^2)(5x^2-x)}$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ VT = VP $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-1}=\sqrt{x^2-x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} \\ (5x^2-x)=2(x^2+2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x = -1

Vậy x = -1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho

6)

ĐKXĐ $x\ge -1$

$\Leftrightarrow$ $x^3-3x^2-8x+40 = 8\sqrt[4]{4x+4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có.

$8\sqrt[4]{4x+4} = 4\sqrt[4]{4.4.4(x+1)} \le x+1+4+4+4 = x+13$

$\Rightarrow$ $x^3-3x^2-8x+40-x-13\le 0$

$\Leftrightarrow$ $x^3-3x^2-9x+27\le 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-3)^2(x-3)\le 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-3)^2\le 0$ (do x+3> 0 $\forall x\ge -1$)

$\Leftrightarrow$ x -3 = 0

$\Leftrightarrow$ x = 3 (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy x =3 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

7)

$2\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}$ (điều kiện : $27x^2+24x+\dfrac{28}{3}\ge 0$ và $\dfrac{27}{2}x+6\ge 0$)

$\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{\dfrac{81x^2+72x+28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{3(9x+4)}{2}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{\dfrac{(9x+4)^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3(9x+4)}{2}}$

Điều kiện: $9x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{4}{9}$

Đặt $9x+4=y\geq 0$.Khi đó (1) trở thành;

$2\sqrt[4]{\dfrac{y^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3y}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{y^2}{3}+4}=1+\dfrac{3y}{2}+\sqrt{6y}$

Sử dụng bất đẳng thức cô si ta được:

$\sqrt{6y}\leq \dfrac{6+y}{2} \Rightarrow 4\sqrt{\dfrac{y^2}{3}+4}\leq 2y+4 \Leftrightarrow 4(\dfrac{y^2}{3}+4)\leq (y+2)^2 \Leftrightarrow \dfrac{(y-6)^2}{3}\geq 0$

Ta lại có $(y-6)^2\geq 0$ nên $y-6=0 \Leftrightarrow y=6$

Từ đó $x=\dfrac{y-4}{9}=\dfrac{2}{9}$ thỏa mãn điều kiện ban đầu

Thử lại $x=\dfrac{2}{9}$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{2}{9}$

8)

$x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=\dfrac{3xy}{2}$ ĐK $\begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{y-1}+4y\sqrt{x-1}=3xy$

$\Leftrightarrow xy-2x\sqrt{y-1}+2xy-4y\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow x\left(y-2\sqrt{y-1}\right)+2y\left(x-2\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+2y\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=0$ (1)

Do $x\geq 1 \Rightarrow x\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2\geq 0$ Dấu “=” xảy ra khi y = 2

$y\geq 1 \Rightarrow 2y\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geq 0$ Dấu bằng xảy ra khi x = 2

Vậy nghiệm của PT là x=y=2

9)

$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

Ta có ĐK: $\begin{cases} x^2+x-1\geq 0 \\ -x^2+x+1\geq 0 \end{cases}$

Khi đó áp dụng: $\sqrt{a} \le \frac{a+1}{2}$ $"=" \ khi \ a=1$

Ta có: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1} \le \frac{x^2+x-1}{2}+\frac{-x^2+x+1}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1} \le x+1$$

Mặt khác:

$$x^2-x+2=(x+1)+x^2-2x+1$$
$$=(x+1)+(x-1)^2 \ge x+1$$

Vậy

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2=x+1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1 \quad =1 \\ -x^2+x+1=1 \\ (x-1)^2 \quad\ =1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy x=1 là nghiệm của phương trình

10)

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1=\sqrt{2x^3-x^2+x+1} \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1=\sqrt{(x^2-x+1)(2x+1)}$$

Ta có x^2 - x + 1 > 0 với mọi x suy ra ĐK $x \ge \frac{-1}{2}$

Áp dụng BĐT cho hai số $x^2 - x + 1 > 0$; $2x + 1 > 0$

Ta có: $\sqrt{(x^2-x+1)(2x+1)} \le \frac{x^2-x+1+2x+1}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x^2 - x + 1 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 3x = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 0 ™ hoặc x=3 ™

Vậy S = $\{0;3\}$

11)

$$x^2\sqrt[4]{2-x^4}-1=x^4-x^3 \qquad (\text{ĐK}: x^4 \le 2)$$
$$\Leftrightarrow x^2\cdot\left(\sqrt[4]{2-x^4}+x\right)=1+x^4 \qquad (x \ne 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{2-x^4}+x=\frac{1}{x^2}+x^2$$

Ta cã: $\frac{1}{x^2}+x^2 \ge 2$ Dấu bằng xảy $\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{x^2}$ $\Leftrightarrow x^2=1$ (1)

Mặt khác: $\left(\sqrt[4]{2-x^4}+x\right)^2 \le (1^2+1^2)\left(\sqrt{2-x^4}+x^2\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \left(\sqrt[4]{2-x^4}+x\right)^4 \le 4\left(\sqrt{2-x^4}+x^2\right)^2 \le 4.2\left(2-x^4+x^4\right)=16 \\ \Rightarrow \sqrt[4]{2-x^2}+x \le \sqrt[4]{16}=2 \end{array} \qquad (2)$$

Dấu "=" xảy khi x = 1

Từ (1)(2) $\Rightarrow x=1$

12)

$$\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$$

Giải: Nhận thấy x=0 là một nghiệm của phương trình

+Nếu x<0 thì $\sqrt[5]{x-1}<-1;\sqrt[3]{x+8}<2;-x^3+1>1$

Vậy VP <1; VT>1 nên phương trình vô nghiệm .

+ Nếu x>0 thì VP<1; VT>1 nên phương trình vô nghiệm.

Vậy x=0 là nghiệm duy nhất của phương trình

13)

$$\sqrt[3]{x^2+28}+2\sqrt[3]{x^2+23}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2}+9$$

Hướng dẫn: TXĐ: $x\ge 1$

Nhận thấy x=2 là nghiệm

Dễ thấy: $1\le x<2$ thì phương trình vô nghiệm

x>2 phương trình vô nghiệm

Vậy x=2 là nghiệm duy nhất của PT

14)

Giải phương trình: $\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

HD:ĐK: $x\in[1;2]$ (1)

PT $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{2}-\sqrt{x+1}$ (2)

Từ (2) ta có:

$\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x+1\le 2$

$\Leftrightarrow x\le 1$ (3)

Từ (1) và (3) Ta có x = 1 thế vào (2) thoả mãn.

Vậy x = 1

15)

HD: ĐK: x < 2. Bằng cách thử, ta thấy x = $\frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Ta cần chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Thật vậy:Với x < $\frac{3}{2}$: $\sqrt{\frac{6}{3-x}}<2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}<4 \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}<6$.

Tương tự với $\frac{3}{2}$ < x < 2: $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}>6$

Vậy x=3/2 là nghiệm duy nhất của phương trình

16)

HD:ĐK: $x \le 4$ (1)

Ta có: $1-\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=x-4$ (*)

Ta có: VP(*) = $x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:x = 4 là nghiệm duy nhất.

17)

HD: ĐKXĐ: $x \le \sqrt[3]{2}$

Giả sử x là nghiệm của phương trình.Khi đó: $x^2-2\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \sqrt{2} \\ x\le -\sqrt{2}\end{cases}$

Do đó: $x\le -\sqrt{2}$

Mũ 6 hai vế của PT ta được: $x^9-6x^6+x^4+12x^3-4x^2-4=0$

$VT=x^9-x^4(6x^2-1)+12^3-4x^2-4<0=VP(\forall x\le -\sqrt{2}) \Rightarrow PTVN$

19)

HD: ĐKXĐ:x$\ge \dfrac{3}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\sqrt{4x-1}\le \dfrac{4x-1+1}{2}=2x$

$\sqrt[4]{8x-3}\le \dfrac{8x-3+1+1+1}{4}=2x$

$\Rightarrow \sqrt{4x-1}+\sqrt[4]{8x-3}\le 4x$

$\Rightarrow 4x^4-3x^2+5x \le 4x$

$\Leftrightarrow 4x^4-3x^2+x \le 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(2x-1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2\le 0$ (do x(x+1) > 0 $\forall x\ge \dfrac{3}{8}$

$\Leftrightarrow 2x-1= 0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x $=\dfrac{1}{2}$

20)

Ta có: $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+16x+64}=8$

$\Leftrightarrow |x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=8$

Có:

$|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|\ge$ -x-1-x-2+x+3+x+8=8

Dấu"=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ -x-2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq -2 \\ x \geq -3 \\ x \geq -8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ -3 $\leq$ x$\leq$ -2

Vậy nghiệm của phương trình là :

S={x| -3 $\leq$x$\leq$ -2 }

21)

$1+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$ (ĐKXĐ: $x \geq 0$)

+Dễ thấy x=1 là một nghiệm của phương trình

+xét x>1

Ta có $x+\sqrt{3+\sqrt{x}} > 1+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$

+xét x<1

Ta có $x+\sqrt{3+\sqrt{x}} < 1+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x=1

22)

$8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5}$(điều kiện: x>0)

$$8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5}$$

$$8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=8x^2+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{8x^2.\frac{1}{4^4}\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}}=5\sqrt[5]{\frac{2^3}{2^8}x^2.\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 8x^2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 32^2.x^4=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^5=\frac{1}{4^5} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Thử lại thấy $x=\frac{1}{4}$ thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{1}{4}$

23)

$\sqrt[4]{x}=\frac{3}{8}+2x$(điều kiện : $x \geq 0$)

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta được:

$$\frac{3}{8}+2x=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+8x}{4} \geq \sqrt[4]{x}$$

Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 8x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{16}$$

Thử lại: $x=\frac{1}{16}$ thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{16}$

24)

$x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$ (điều kiện $x\ge 0$)

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta được:

$\sqrt{x^3+3x}=\frac{1}{2}\sqrt{4x(x^2+4)}\le\frac{1}{2}.\frac{4x+x^2+4}{2}=\frac{x^2+4x+4}{4}$

Suy ra: $\frac{x^2+2x+4}{3}\le\frac{x^2+4x+4}{4}\Rightarrow(x-2)^2\le 0$

Ta lại có $(x-2)^2\ge 0,\forall x$ nên $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Thử lại $x=2$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

25)

$\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}=1$(điều kiện: $3x^4-2\ge 0$ và $5-x^6\ge 0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{5-x^6}=\sqrt[3]{3x^4-2}+1$

+dễ thấy với $|x|=1$ thì $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$(thỏa mãn điều kiện của ẩn)

+nếu $|x|>1$ thì $0\le 5-x^6<4\Leftrightarrow 0\le\sqrt{5-x^6}<2$

Và $3x^4-2>1\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x^4-2}>1$

Do đó: $\sqrt{5-x^6}<\sqrt[3]{3x^4-2}+1$

+nếu $|x|<1$ thì $5-x^6>4\Leftrightarrow\sqrt{5-x^6}>2$

Và $0\le 3x^4-2<1\Leftrightarrow 0\le\sqrt[3]{3x^4-2}<1$

Do đó: $\sqrt{5-x^6}>\sqrt[3]{3x^4-2}+1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1=1$ và $x_2=-1$

26)

$\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2+4x+9}=\frac{x^2}{3}+6$ (điều kiện: $\forall x\in R$)

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có:

$\sqrt{9(x^2+4x+9)}\le\frac{9+x^2+4x+9}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+4x+9}\le\frac{9+x^2+4x+9}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2+4x+9=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{x^2-4x+9}\le\frac{9+x^2-4x+9}{6}$

Dấu"=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2-4x+9=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Do đó: $\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2+4x+9}\le \frac{x^2}{3}+6$

Dấu"=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$

27)

$\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{3}-x^2$ (điều kiện: $-x^2+4x+12\ge 0$ và $-x^2+2x+3\ge 0$)

Ta thấy: $-x^2+4x+12-(-x^2+2x+3)=2x+9>0$

Nên $(\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3})^2$

$=-x^2+4x+12+(-x^2+2x+3)-2\sqrt{(-x^2+4x+12)(-x^2+2x+3)}$

$=-(x+2)(x-6)+(3-x)(x+1)-2\sqrt{(3-x)(x+1)(x+2)(6-x)}$

$=(x+1)(6-x)+(x+2)(3-x)-2\sqrt{(3-x)(x+1)(x+2)(6-x)}+3$

$=(\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)})^2+3\ge 3$

$\Rightarrow \sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}\ge\sqrt{3}$

Lại có: $\sqrt{3}-x^2\le\sqrt{3}$

Do đó; $\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{3}-x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)})^2=0\\ x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0$

28)

$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2}=x+1$ (điều kiện: $x^2+x\ge 0$ và $x-x^2\ge 0$ hay $0\le x\le 1$)

Áp dụng bất đẳng thức cô- si ta được:

$\sqrt{1.(x^2+x)}\le\frac{1+x^2+x}{2}$

$\sqrt{(x-x^2).1}\le\frac{1+x-x^2}{2}$

Suy ra: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2}\le x+1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}x^2+x=1\\ x-x^2=1\end{cases}$ là hệ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

29)

$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$ (điều kiện: $\begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x\ge 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwars(hay bu-nhi-a) ta được:

$\sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1}\le \sqrt{(x+1)((x+2)+2x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1}\le \sqrt{(x+1)(3x+1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1}\le \sqrt{(x+1)(3x+1)}$

Dấu"="xảy ra khi và chỉ khi : $\sqrt{x}.\sqrt{x+2}=1.\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2x^2-x=x+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta chỉ thấy $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

30)

$\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x+\frac{3}{x}$(điều kiện: $x\neq 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=4x^2+3$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=5x^2+5x^2+2x^2+9$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta được:

$5x^2+5x^2+(2x^2+9)\ge 3\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}$

Dấu"="xảy ra khi và chỉ khi: $5x^2=2x^2+9\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Thử lại thấy $x=\pm\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1=\sqrt{3}$ và $x_2=-\sqrt{3}$

31)

$\sqrt{1-x-2x^2}=1-\frac{x}{2}$ (điều kiện: $1-x-2x^2\ge 0$)

Ta có $1-x-2x^2\ge 0\Leftrightarrow (x+1)(1-2x)\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le \frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta được:

$\frac{x}{2}+\sqrt{1-x-2x^2}\le \frac{x}{2}+\frac{1+1-x-2x^2}{2}=1-x^2\le 1$

Dấu"=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$
Thử lại $x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x=0

32)

$x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{5-x^2}$ (điều kiện :$|x|\le 1$)
Từ điều kiện của ẩn ta có thể thấy:
$x+\sqrt{1-x^2}\ge -1\ge 1-\sqrt{5-x^2}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=-1$

33)

$\sqrt{2x^2-1}+x\sqrt{2x-1}=2x^2$ (điều kiện : $x\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)
ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên chia cả hai vế cho x
ta được $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2}+\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}=2$
lại có $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2}\le 1$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$
$\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}\le 1$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$
Dó đõ $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2}+\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}\le 2$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$
Ta thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình đã cho
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=1$

34)

$\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x+1}-x^3+3x-2=0$ (điều kiện: $x\ge 0$)
$\Leftrightarrow \dfrac{x-(x^2-x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}}-(x-1)^2(x+1)=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}}-(x-1)^2(x+1)=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}}+(x-1)^2(x+1)=0$
Từ điều kiện xác định suy ra: $\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}}+(x-1)^2(x+1)\ge 0$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$
Ta thấy x=1 thỏa mãn phương trình đã cho
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=1$

35)

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{2x+1}$ (điều kiện $x\ge\dfrac{-1}{2}$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=2x-\sqrt{x^2+x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{4x^2-x^2-x-2}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}$

Từ điều kiện của ẩn $x \geq \dfrac{-1}{2}$ ta có $2x+\sqrt{x^2+x+2}>0$

Ta xét các trường hợp :

Th1: $\dfrac{-1}{2} \leq x < 1$ thì ta có : $\dfrac{1-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}>0>\dfrac{(x-1)(3x+2)}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}$

Th2: $x=1$ thay vào phương trình đã cho thỏa mãn

Th3: $x \geq 1$ thì ta có: $\dfrac{1-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}<0<\dfrac{(x-1)(3x+2)}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$

Hãy thử làm một ý tương tự như trên

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=3x+\sqrt{2x}$

36)

$\dfrac{2+\sqrt{x}}{3+\sqrt{1-x}}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ (điều kiện: $1 \geq x \geq 0$)

Dễ dàng chứng minh được: $\dfrac{2+\sqrt{x}}{3+\sqrt{1-x}} \leq 1 \leq \sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$(thỏa mãn phương trình đã cho)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$

37)

$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-(x+\dfrac{1}{x})$ (điều kiện: $2-x^2 \geq 0$ và $2-\dfrac{1}{x^2} \geq 0$)

Dùng bất đẳng thức bunhiacopski dễ dàng chứng minh được:

$x+\sqrt{2-x^2} \leq 2$

Và $\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} \leq 2$

$\Rightarrow x+\sqrt{2-x^2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} \leq 4$

Dấu"=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x=\sqrt{2-x^2} \\ \dfrac{1}{x}=\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$(thỏa mãn phương trình đã cho)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$

Mời các bạn tự giải các bài tập sau:

$\sqrt[3]{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$

$13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\frac{x^2}{4}=2 (x\geq 0)$$

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$$

$$x+\sqrt{2x-x^2}=1+2\sqrt{x}$$

$$2x^2+\sqrt{2x-1}=x^3+2x$$

$$x+x^2+\sqrt{2-x^4}+\sqrt[4]{2-x^4}=4$$

$$3x(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})=x^2+9$$

"Loss leaves us empty - but learn not to close your heart and mind in grief. Allow life to replenish you. When sorrow comes it seems impossible - but new joys wait to fill the void."

___Pam Brown___

Sự mất mát khiến chúng ta trống rỗng - nhưng hãy học cách không để sự đau khổ đóng lại trái tim và tâm hồn mình. Hãy để cuộc đời đổ đầy lại bạn. Dưới đáy u sầu, dường như điều đó là không thể - nhưng những niềm vui mới đang chờ đợi để lấp đầy khoảng trống.

Love begins with a smile, grows with a kiss, and ends with a teardrop.
Tình yêu bắt đầu với nụ cười, lớn lên với nụ hôn, và kết thúc bằng giọt nước mắt.

__Khuyết danh___

"Các bài giảng của giáo sư, cho dù có đầy đủ, xúc tích đến đâu, có chứa chan tình yêu tri thức của bản thân giáo viên đến đâu, thì về thực chất, mà nói, đó chẳng qua cũng vẫn chỉ là chương trình, là những lời chỉ dẫn tuần tự để điều chỉnh trật tự nhận thức của sinh viên. Người nào chỉ biết ngồi nghe giáo sư giảng chứ bản thân mình trong lòng không cảm thấy khát khao đọc sách, thì có thể nói tất cả những điều người ấy nghe giảng ở trường đại học cũng sẽ chỉ như một tòa nhà xây trên cát mà thôi."

--- I.A. Gontcharov---

V.Lời Kết

Lần đầu tiên mình xin cảm ơn các bạn cũng như các thầy cô giáo đã đọc tài liệu này.Hy vọng nó sẽ là tài liệu hay về phương pháp sử dụng kĩ thuật đánh giá cũng như giúp mọi người có thêm cho mình một phương pháp mạnh khi giải phương trình.

Mặc dù đã dành rất nhiều thời gian cũng như sự trau truốt về chuyên đề. Tuy vậy,tài liệu có thể gặp những sai sót trong ví dụ,bài tập,lời giải.Mong mọi người thông cảm và góp ý vào gmail của nhóm.

Chúc mọi người luôn mạnh khỏe và thành công.

Thay mặt,
ĐINH XUÂN HÙNG

CHÚC MỌI NGƯỜI MỘT NĂM MỚI 2016 HẠNH PHÚC VUI VẺ,AN KHANG,THỊNH VƯỢNG

Happy New Year-2016

Một số tài liệu tham khảo:

[1].Chinh phục phương trình-Bất phương trình-Lovebook
[2].Sáng tạo phương trình,bất phương trình,hệ phương trình
[3].Tạp chí toán học và tuổi trẻ

Một số trang web học tập hay

[1].Diễn đàn Toán học: http://diendantoanhoc.net/forum/index

[2].Diễn đàn K2pi: http://k2pi.net.vn/

[3].Diễn đàn BoxMath: http://boxmath.vn/forum/

[4].Diễn đàn THPT: http://diendanthpt.16mb.com/index.php

Và một công cụ rất tốt cho các bạn khi nhẩm nghiệm của một phương trình

https://www.wolframalpha.com/examples/Math.html

Mình xin kết thúc chuyên đề tại đây.Mong nhận được nhiều sự ủng hộ của các bạn ☺

TRY YOUR BEST AND YOU WILL SUCCEED