

Người làm: Phương Minh + Cô Cao Nhung hỗ trợ 8 bài cuối file

Zalo: Phương Minh - số đt zalo: 0989606390

Email: [phuongminh0503@gmail.com](mailto:phuongminh0503@gmail.com)

**CD13: PHẦN HÌNH HỌC**

**Tính số đo góc, chứng minh góc:**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

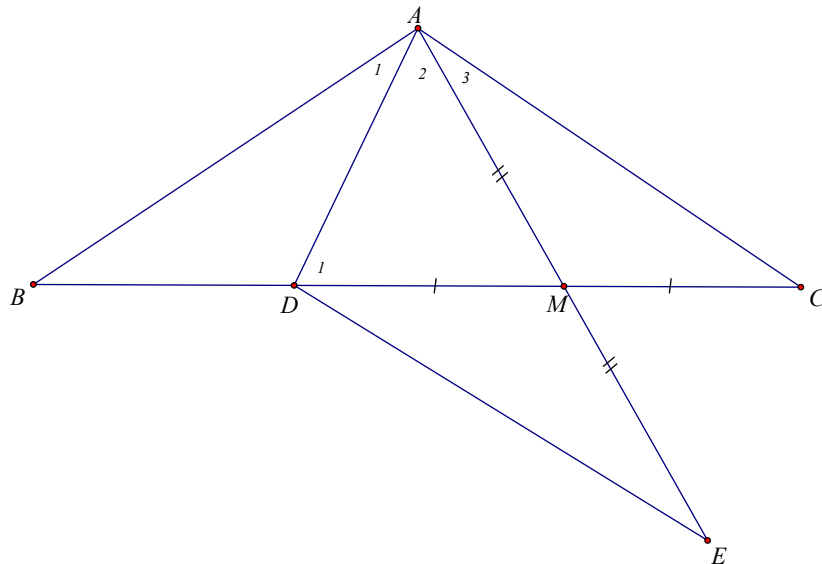
**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân. Trên cạnh đáy  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 2BD$ . Chứng minh rằng

$$\angle BAD < \frac{1}{2} \angle CAD$$

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $DC$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $MA = ME$

Ta có hai tam giác  $AMC$  và  $EMD$  bằng nhau

Vì  $MD = MC$ ,  $MA = ME$ ,  $\angle AMC = \angle EMD$

Nên  $DE = DC$ ,  $\angle 3 = \angle DEM$

Mặt khác:  $\angle D_1 = \angle B$  (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà  $\angle B = \angle C$  (vì  $\triangle ABC$  cân, đáy  $BC$ ) nên  $\angle D_1 > \angle C \Rightarrow AC > AD$

Từ đó  $DE > DA$

$\Rightarrow \angle 2 > \angle DEM$

$\Rightarrow \angle 2 > \angle 3$

Vì  $\angle D_1 = \angle 3$  (do  $\triangle ABD = \triangle ACM$ )

Nên  $\angle 2 + \angle 3 > \angle D_1 + \angle 3$  hay  $2\angle D_1 < \angle 2 + \angle 3$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} < \frac{1}{2} \widehat{CAD}$$

**Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau**

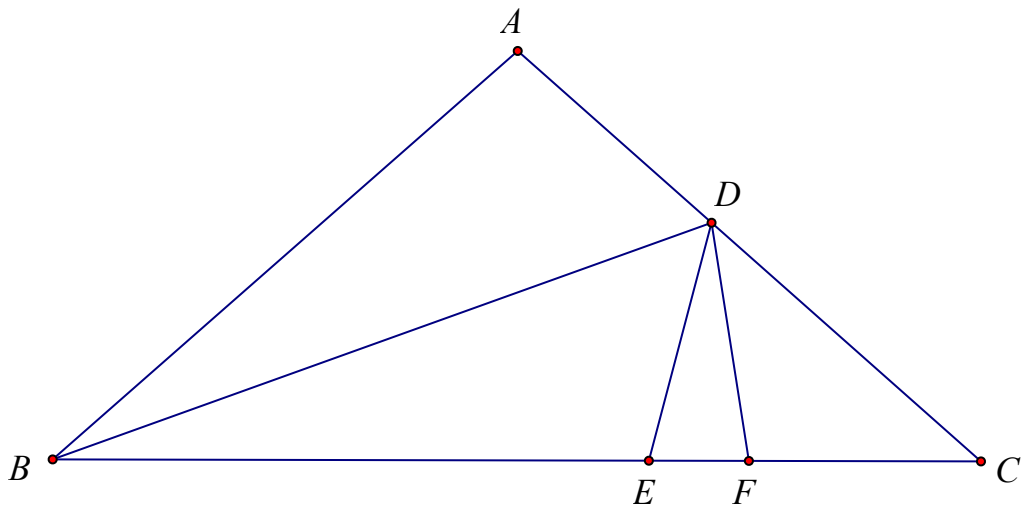
**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , có  $\widehat{H} = 100^\circ$  tia phân giác của góc  $\widehat{ABC}$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh :  
 $AD + BD = BC$

**Lời giải**



Trên cạnh  $BC$  lấy 2 điểm  $E, F$  sao cho:  $BE = BA, BF = BD$ .

Học sinh chứng minh được  $AD = DE$

Học sinh chứng minh được  $\Delta DFE$  cân tại  $D$

$$\Rightarrow DE = DF$$

Chứng minh được  $\Delta DFC$  cân tại  $F$

$$\Rightarrow DF = FC$$

$$\Rightarrow DE = FC$$

Suy ra  $AD + BD = BC$

**Chứng minh ba điểm thẳng hàng**

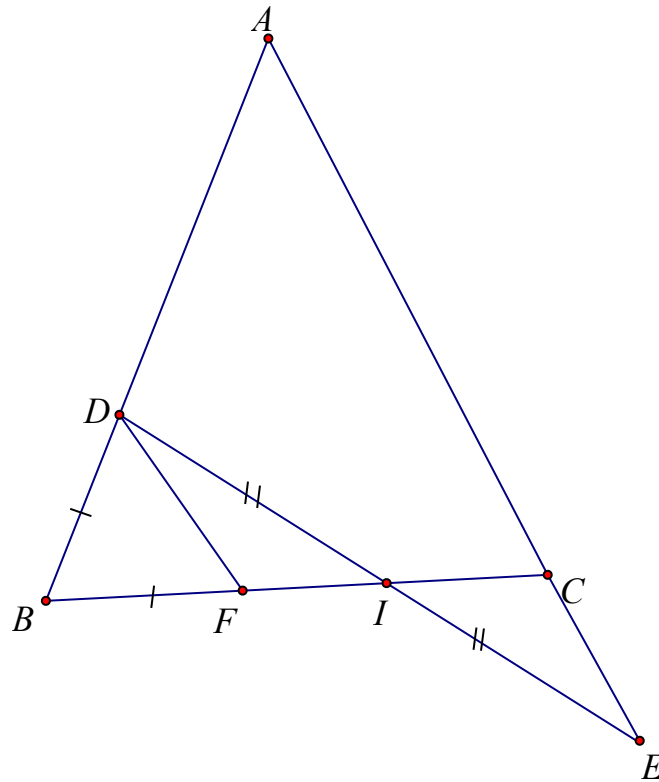
**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = BD$  Gọi  $I$  là trung điểm của  $DE$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, C$  thẳng hàng.

**Lời giải**



Kẻ  $DF \parallel AC$  ( $F \in BC$ )

$\angle DFB = \angle ACB$  (hai góc đồng vị)

Mà  $\angle ABC = \angle ACB$  (tam giác  $ABC$  cân)

$\Rightarrow \angle DFB = \angle ABC$

$\Rightarrow \triangle DBF$  cân tại  $D$

Ta có:  $DB = DF$

Mà  $DF = CE$  (gt)

$\Rightarrow DF = CE$

$\Rightarrow \triangle DFI = \triangle ECI$  (c.g.c)

$\Rightarrow DI = EI$

Vậy ba điểm  $B, I, C$  thẳng hàng (vì ba điểm  $D, I, E$  thẳng hàng)

**Bất đẳng thức trong tam giác**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

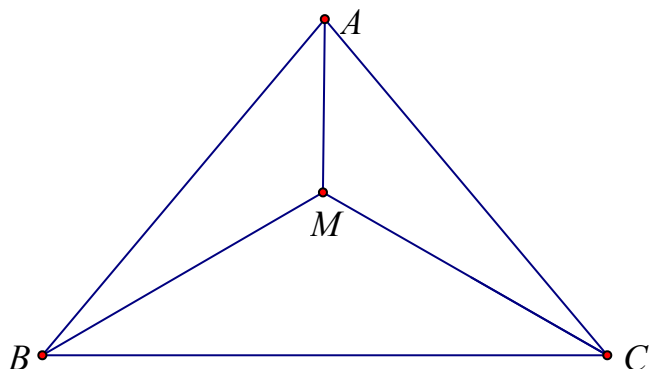
a) Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác  $ABC$ .  $AN, BP, CQ$  là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

**Lời giải**



a) Tam giác  $MBC$  có :  $MB + MC > BC$

Tương tự :  $MC + MA > AC; MA + MB > AB$   
 $\Rightarrow 2MA + 2MB + 2MC > AB + AC + BC$   
 $\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng câu a ta có:

$$2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$$

Có:  $GA = \frac{2}{3} AN; GB = \frac{2}{3} BP; GC = \frac{2}{3} CQ$

Thay vào trên được:

$$2\left(\frac{2}{3} AN + \frac{2}{3} BP + \frac{2}{3} CQ\right) > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

### Bài toán chứng minh tổng hợp

#### A. Trắc nghiệm (nếu có)

#### B. Tự luận

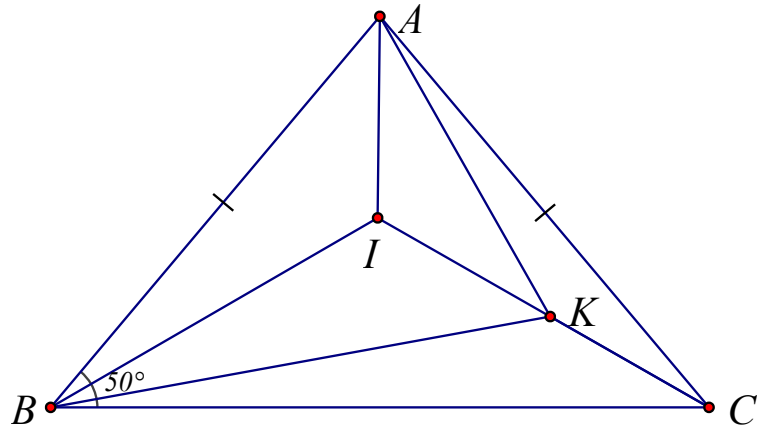
**Câu 1. (HSG 7, huyện Thanh Oai, trường THCS Thanh Văn, năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\angle B = 50^\circ$ . Gọi  $K$  là điểm trong tam giác sao cho  $\angle KBC = 10^\circ$ ,  $\angle KCB = 30^\circ$ .

a) Chứng minh  $BA = BK$

b) Tính số đo  $\angle BAK$

#### Lời giải



a) Vẽ tia phân giác của  $\angle B$  cắt  $AC$  ở  $I$

Ta có:  $\triangle ABC$  cân nên  $AB = AC$

$\angle A$  chung

$AB = AC$  (tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ )

$\Rightarrow \triangle BIA = \triangle CIA$  (c.c.c)

$\Rightarrow \angle BIA = \angle CIA = 120^\circ$

Do đó  $\triangle BIA = \triangle BIK$

$\Rightarrow BA = BK$

$$\angle BAK = 70^\circ$$

b) Từ phần a ta tính được

**Câu 2. (HSG 7, huyện Thanh Oai, trường THCS Thanh Văn, năm học 2017 - 2018)**

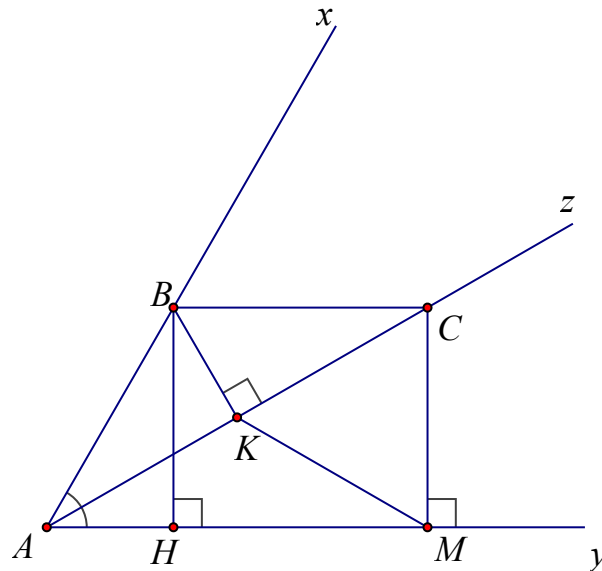
Cho  $\angle A = 60^\circ$  có tia phân giác  $AI$  Từ điểm  $B$  trên kẻ  $BH$  vuông góc với  $AI$  tại  $H$ , kẻ  $BK$  vuông góc với  $AC$  và song song với  $AI$  cắt  $AC$  tại  $K$ . Từ  $K$  kẻ  $KM$  vuông góc với  $BC$  tại  $M$ . Chứng minh:

a)  $K$  là trung điểm của  $AC$

b)  $\triangle KMC$  là tam giác đều

c) Cho  $BK = 2\text{cm}$ . Tính các cạnh  $\triangle AKM$

**Lời giải**



a)  $\triangle ABC$  cân tại  $B$  do  $\hat{CAB} = \hat{ACB} (= \hat{MAC})$  và  $BK$  là đường cao nên  $BK$  là đường trung tuyến  
 $\Rightarrow K$  là trung điểm của  $AC$

b)  $\triangle ABH = \triangle BAK$  (cạnh huyền - góc nhọn)  
 $\Rightarrow BH = AK$

$$AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$$

Mà

Ta có:  $BH = CM$  (tính chất đoạn chắn)

$$CK = BH = \frac{1}{2} AC$$

Mà

$$\Rightarrow CM = CK$$

$\Rightarrow \triangle MKC$  là tam giác cân (1)

Mặt khác:  $\hat{MCB} = 90^\circ$  và  $\hat{ACB} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \hat{MCK} = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \triangle MKC$  là tam giác đều

c) Vì  $\triangle ABK$  vuông tại  $K$  mà  $\hat{KAB} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$

Vì  $\triangle ABK$  vuông tại  $K$  nên theo Pytago ta có:  $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$$KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AC = \sqrt{12}$$

Mà

$$KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

Mà

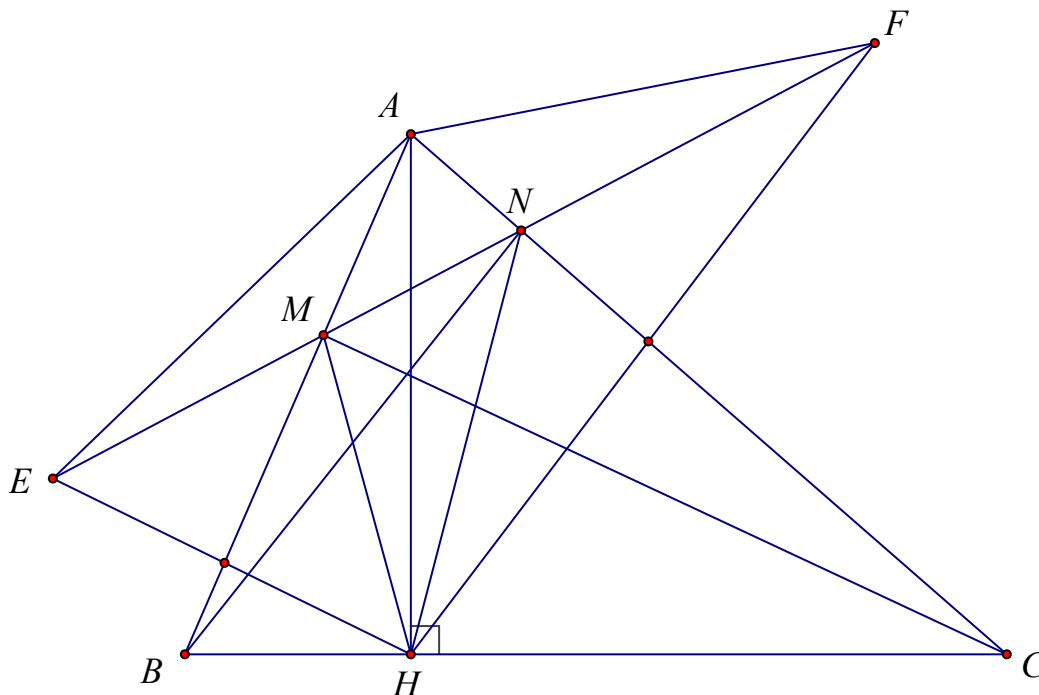
Theo phần b)  $AB = BC = 4; AH = BK = 2; HM = BC$  ( $HBCM$  là hình chữ nhật)  
 $\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle BAC < 90^\circ$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là điểm đối xứng của  $H$  qua  $AB, AC$ . Đường thẳng  $EF$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:

- a)  $AE = AF$
- b)  $HA$  là phân giác của  $\angle MHN$   
 $CM \parallel EH, BN \parallel FH$
- c) Chứng minh

**Lời giải**



a) Vì  $AB$  là trung trực của  $EH$  nên ta có:  $AE = AH$  (1)

Vì  $AC$  là trung trực của  $HF$  nên ta có:  $AH = AF$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AE = AF$

b) Vì  $M \in AB$  nên  $MB$  là phân giác  $\angle EMH$

$MB$  là phân giác ngoài góc  $M$  của tam giác  $MNH$

Vì  $N \in AC$  nên  $NC$  là phân giác  $\angle FNH$

$\Rightarrow NC$  là phân giác ngoài  $\angle N$  của tam giác  $MNH$

Do  $MB, NC$  cắt nhau tại  $A$  nên  $HA$  là phân giác trong góc  $H$  của tam giác  $MNH$

Hay  $HA$  là phân giác của  $\angle MHN$ .

c) Ta có:  $AH \perp BC$  (gt)

Mà  $HM$  là phân giác  $\angle MHN$

$\Rightarrow HB$  là phân giác ngoài của  $\angle H$  của tam giác  $MNH$

$MB$  là phân giác ngoài của  $\angle M$  của tam giác  $HMN$

$\Rightarrow NB$  là phân giác trong góc  $N$  của tam giác  $MNH$

$\Rightarrow BN \perp AC$  (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

$\Rightarrow BN \parallel HF$  (cùng vuông góc với  $AC$ )

Chứng minh tương tự ta có:  $EH \parallel CM$ .

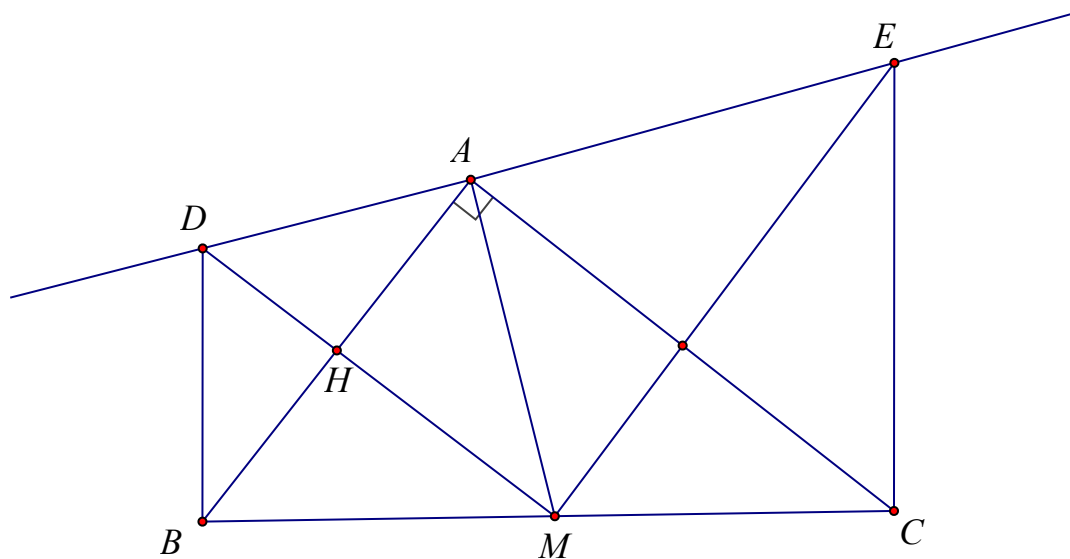
**Câu 4. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AM$ . Qua  $M$  kẻ các đường vuông góc với  $AB, AC$  chúng cắt  $d$  theo thứ tự ở  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng:

a)  $BD \parallel CE$

b)  $DE = BD + CE$

**Lời giải**



$MA = MB$

a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông:

Gọi  $H$  là giao điểm của  $MD$  và  $AB$

Tam giác cân  $AMB$  có  $MH$  đường cao ứng với đáy nên là đường trung trực, suy ra  $DA = DB$ .

Chứng minh được  $\triangle MBD = \triangle MAD$  (c.c.c)

$\Rightarrow \angle MBD = \angle MAD = 90^\circ$

Do đó:  $DB \perp BC$

Tương tự ta có:  $EC \perp BC$

Vậy  $BD \parallel CE$  (cùng vuông góc với  $BC$ ) (đpcm)

$DB = DA$

b) Theo câu a) ta có

$EC = EA$

Tương tự:

Suy ra  $DE = DA + AE = BD + CE$

Vậy  $DE = BD + CE$

**Câu 5. (HSG 7 trường Kỳ Xuân năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy điểm  $E$  sao cho

$ME = MA$ . Chứng minh rằng:

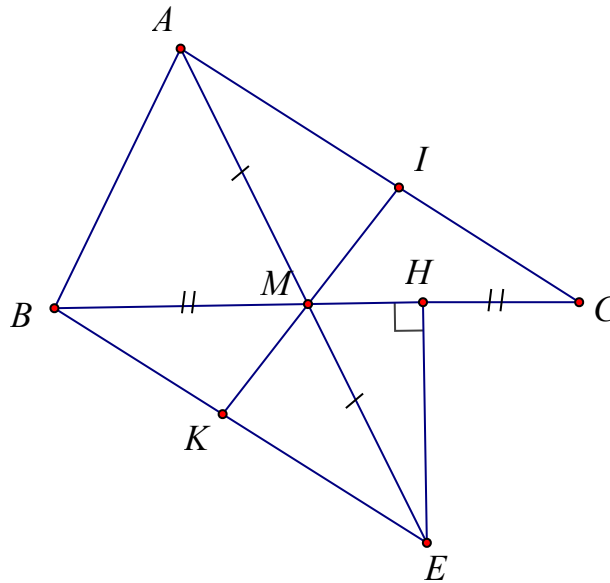
a)  $AC = EB$  và  $AC \parallel BE$

a) và

b) Gọi  $I$  là một điểm trên  $AC$ ,  $K$  là một điểm trên  $BE$  sao cho  $AI = EK$ . Chứng minh ba điểm  $I, M, K$  thẳng hàng.

c) Từ  $E$  kẻ  $EH \perp BC (H \in BC)$ . Biết  $HBE = 50^\circ; MEB = 25^\circ$ . Tính  $\angle HEM, \angle BME$ .

**Lời giải**



a) Xét  $\triangle AMC$  và  $\triangle EMB$  có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh);}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

Nên  $\triangle AMC = \triangle EMB$  (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = EM$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow AC \parallel BE$$

b) Xét  $\triangle AMI$  và  $\triangle EMK$  có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle MAI = \angle MEK (\triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

Nên  $\triangle AMI = \triangle EMK$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

Mà  $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$  (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Ba điểm  $I, M, K$  thẳng hàng

c) Trong tam giác vuông  $BHE$  có  $\angle HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow HBE = 90^\circ - HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$BME$  là góc ngoài tại đỉnh  $M$  của  $\triangle HEM$

Nên  $BME = HEM - MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$  (định lý góc ngoài của tam giác)

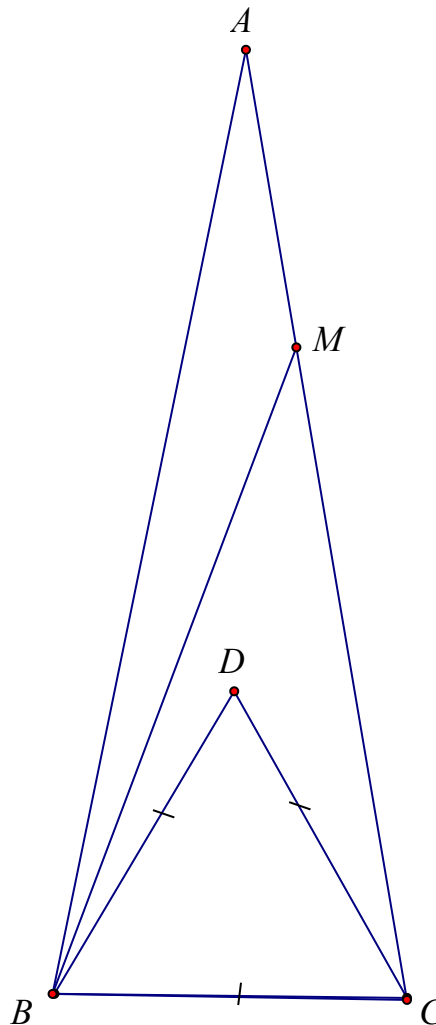
**Câu 6. (HSG 7 huyện Hồng Ngự năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{A} = 20^\circ$  vẽ tam giác đều  $DBC$  ( $D$  nằm trong tam giác  $ABC$ )

Tia phân giác của  $\widehat{ABD}$  cắt  $AC$  tại  $M$ . Chứng minh:

- a) Tia  $AD$  là phân giác của  $\widehat{ABC}$   
 $AM = BC$   
 b)

**Lời giải**



$$\triangle ADB = \triangle ADC$$

a) Dễ dàng chứng minh (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$$

$$DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

Do đó

b)  $\triangle ABC$  cân tại  $A$

Mà  $\hat{H} = 20^\circ$   $\hat{ABC} = 80^\circ$  (gt) nên

$\triangle ABC$  đều nên  $DBC = 60^\circ$

Tia  $BD$  nằm giữa hai tia  $BA$  và  $BC$  suy ra  $\hat{ADB} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Tia  $BM$  là phân giác của  $\hat{ABD}$  nên  $\hat{ABM} = 10^\circ$

Xét hai tam giác  $ABM$  và  $BAD$  có:

$AB$  cạnh chung

$$\hat{BAM} = \hat{ABD} = 20^\circ$$

$$\hat{ABM} = \hat{DAB} = 10^\circ$$

Vậy  $\triangle ABM = \triangle BAD$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = BD$$

Mà  $BD = BC$  (gt)

$$\Rightarrow AM = BC$$

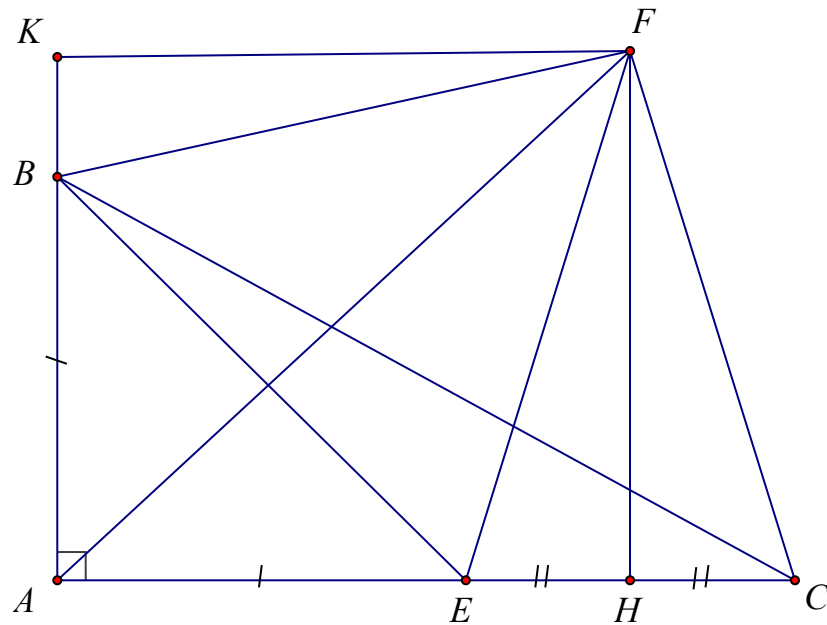
**Câu 7. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Tia phân giác của  $\hat{BAC}$  cắt đường trung trực của  $CE$  tại  $F$

a) Chứng minh tam giác  $BFC$  cân

b) Biết  $\hat{ACB} = 30^\circ$ . Chứng minh  $\triangle BFE$  đều

**Lời giải**



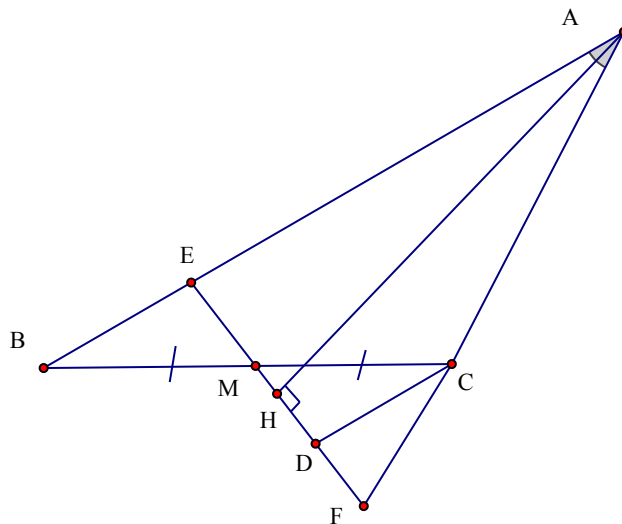
a) Chỉ ra được  $F$  là giao điểm hai trung trực của  $BC$  thuộc trung trực  $\Delta BFC$  cân

b) +Tính được  $\angle EBC = 15^\circ$   
 +Hạ  $FK \perp AB$   
 $\Rightarrow \Delta FKB = \Delta FHC$   
 $\Rightarrow \Delta BFC$  vuông cân  
 $\Rightarrow \angle FBC = 45^\circ$   
 $\Rightarrow \Delta BFE$  đều

**Câu 8. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  ( $AB > AC$ ),  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Đường thẳng đi qua  $M$  vuông góc với tia phân giác của  $\angle A$  tại  $H$  cắt cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh:

- $EH = HF$
- a)
- $2\angle BME = \angle ACB - \angle A$
- b)
- $\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$
- c)
- $BE = CF$
- d)



a) Xét  $\triangle AEH$  và  $\triangle AFH$  có:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 \quad (AH \text{ là tia phân giác của góc } A)$$

$AH$  là cạnh chung

$$\hat{AHE} = \hat{AHF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle AFH \quad (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow EH = HF \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

b)  $\triangle AEH = \triangle AFH$  (theo câu a)

$$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{F}$$

Xét  $\triangle CMF$  có  $\hat{ACB}$  là góc ngoài

$$\Rightarrow \hat{ACB} = \hat{CMF} + \hat{F}$$

$$\Rightarrow \hat{CMF} = \hat{ACB} - \hat{F}$$

Xét  $\triangle BME$  có  $\hat{E}_1$  là góc ngoài

$$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{BME} + \hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{BME} = \hat{E}_1 - \hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{CMF} + \hat{BME} = (\hat{ACB} - \hat{F}) + (\hat{E}_1 - \hat{B})$$

Mà  $\hat{CMF} = \hat{BME}$  (2 góc đối đỉnh  $\triangle AFH$ )

$$\hat{E}_1 = \hat{F} \quad (\text{cmt})$$

$$\Rightarrow 2\hat{BME} = \hat{ACB} - \hat{B}$$

c)  $\triangle AEH = \triangle AFH$  (theo câu a)

$$\Rightarrow HF = HE = \frac{FE}{2} \quad \text{và} \quad AE = AF$$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông  $\triangle AFH$  ta có:

$$HF^2 + HA^2 = AF^2$$

$$\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$$

d) Từ  $C$  vẽ  $CD \parallel AB$  ( $D \in EF$ )

Xét  $\triangle BME$  và  $\triangle CMD$  có:

$$MC = MB \quad (M \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle BME = \angle CMD \quad (\text{hai góc đối đỉnh})$$

$$\angle EBM = \angle DCM \quad (CD \parallel AB, \text{ hai góc so le trong})$$

$$\Rightarrow \triangle BME = \triangle CMD \quad (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow BE = CD \quad (1)$$

Ta có:  $CD \parallel AB$

$$\Rightarrow \angle E_1 = \angle CDF \quad (\text{hai góc đồng vị})$$

$$\text{Mà } \angle E_1 = \angle E \quad (\text{cmt})$$

$$\Rightarrow \angle E = \angle CDF$$

$$\Rightarrow \triangle CDF \text{ cân tại } C$$

$$\Rightarrow CD = CF \quad (2)$$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow BE = CF$

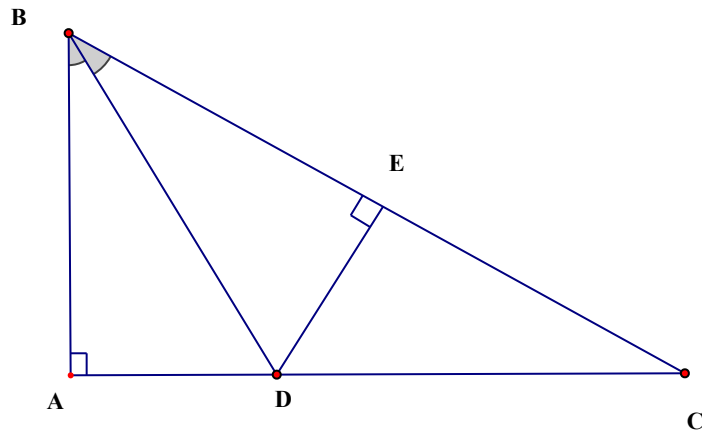
**Câu 9. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle H = 90^\circ$ , trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = BA$ . Tia phân giác của  $\angle B$  cắt  $AC$  ở  $D$ .

a) So sánh các độ dài  $DA$  và  $DE$ .

b) Tính số đo góc  $BED$

**Lời giải**



a) Xét  $\triangle ABD$  (vuông tại  $A$ ) và  $\triangle EBD$  (vuông tại  $E$ ) có:

$BD$  là cạnh chung

$\angle ABD = \angle EBD$  ( $BD$  là tia phân giác của góc  $B$ )

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$  (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow DA = DE$  (hai cạnh tương ứng)

b) Xét  $\triangle ABD = \triangle EBD$  (theo câu  $a$ )

$\Rightarrow \angle A = \angle BED$  mà  $\angle A = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BED = 90^\circ$

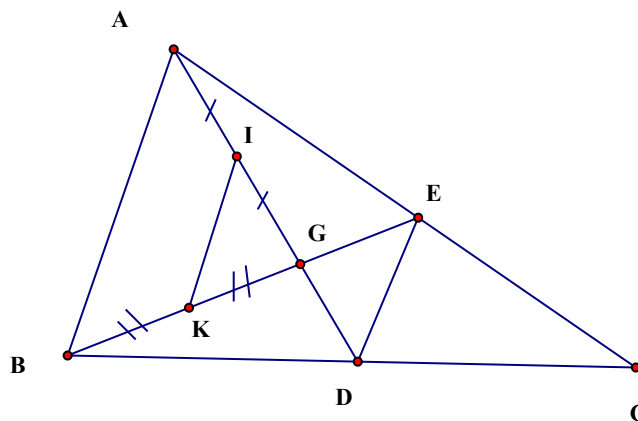
**Câu 10. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  có đường trung tuyến  $AD$ . Kẻ đường trung tuyến  $BE$  cắt  $AD$  ở  $G$ . Gọi  $I, K$  theo thứ tự là trung điểm của  $GA, GB$ . Chứng minh rằng:

a)  $IK \parallel DE; IK = DE$

b)  $AG = \frac{2}{3} AD$

**Lời giải**



a)  $\triangle ABC$  có hai trung tuyến  $AD$  và  $BE$  cắt nhau tại  $G$

$$\Rightarrow G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow GD = \frac{1}{2}AG \quad GE = \frac{1}{2}BG$$

và

Mà  $GI = \frac{1}{2}AG$  và  $GK = \frac{1}{2}BG$  ( $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AG$  và  $BG$ )

$$\Rightarrow GD = GI \quad GE = GK$$

và

Xét  $\triangle GED$  và  $\triangle GKI$  có:

$$GD = GI \text{ (chứng minh trên)}$$

$$GE = GK \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle EGD = \angle IGK \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle GED \cong \triangle GKI$$

(c.g.c)

$$\Rightarrow \angle GED = \angle GKI \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà  $\angle GED$  và  $\angle GKI$  ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow IK \parallel ED$$

Từ  $\triangle GED \cong \triangle GKI$

$$=$$

$$\Rightarrow IK = ED$$

b)  $\triangle ABC$  có hai trung tuyến  $AD$  và  $BE$  cắt nhau tại  $G$ .

$$\Rightarrow G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD$$

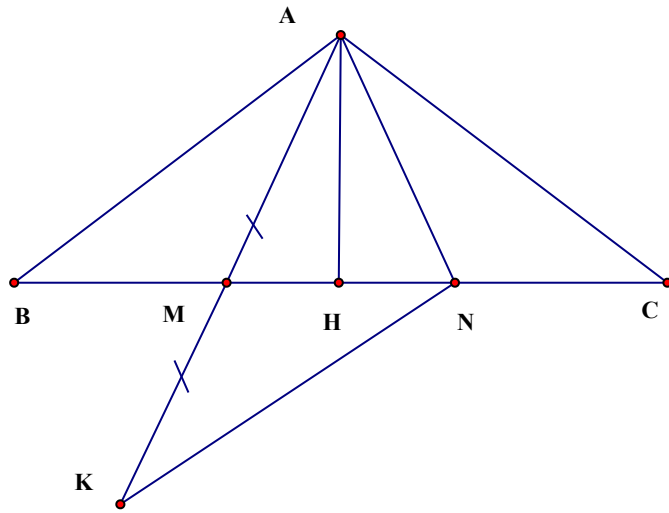
**Câu 11. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại đỉnh  $A$ , trên cạnh  $BC$  lần lượt lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = MN = NC$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

a) Chứng minh:  $AM = AN$  và  $AH \perp BC$ .

b) Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$  khi  $AB = 5\text{cm}$ ,  $BC = 6\text{cm}$ . Chứng minh:  $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

**Lời giải**



a) Xét  $\triangle ABM$  và  $\triangle ACN$  có:

$AB = AC$  ( $\triangle ABC$  cân tại  $A$ )

$\angle B = \angle C$  ( $\triangle ABC$  cân tại  $A$ )

$BM = CN$

(gt)

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACN$$

(c.g.c)

$$\Rightarrow AM = AN$$

(hai cạnh tương ứng)

$\triangle ABC$  cân tại  $A$ , có  $AH$  là đường trung tuyến

$\Rightarrow AH$  đồng thời là đường cao của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AH \perp BC$$

b)  $\triangle ABH$  vuông tại  $H$

$$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$\Rightarrow AH = 4\text{cm}$$

$$AM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{6}{3} = 2\text{cm}$$

Ta có:

$\Rightarrow \triangle AMN$  cân tại  $A$ , có  $AH$  là đường cao

$\Rightarrow AH$  đồng thời là đường trung tuyến của  $\triangle AMN$

$$\Rightarrow HM = HN = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ cm}$$

$\triangle AMH$  vuông tại  $H$

$$\Rightarrow AM^2 = AH^2 + MH^2 = 4^2 + 1 = 17$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{17} \text{ cm}$$

Trên tia  $AM$  lấy điểm  $K$  sao cho  $AM = MK$

Xét  $\triangle AMB$  và  $\triangle KMN$  có:

$$AM = MK$$

$$BM = MN$$

$\angle AMB = \angle KMN$  (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle KMN$  (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = KN$$

Lại có:  $AM = AN$

$$AB > AM \quad (AB = 5\text{cm} = \sqrt{25} > AM = \sqrt{17}\text{cm})$$

Mà

$$\Rightarrow KN > AN$$

Xét  $\triangle AKN$  có:  $KN > AN$

$$\Rightarrow \angle MAN = \angle MKN$$

Mà  $\angle MKN = \angle MAB$  ( $\triangle ABM = \triangle KNC$ )

$\angle MAB = \angle NAC$  ( $\triangle ABM = \triangle ACN$ )

$$\Rightarrow \angle MAN = \angle NAC$$

**Câu 12. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

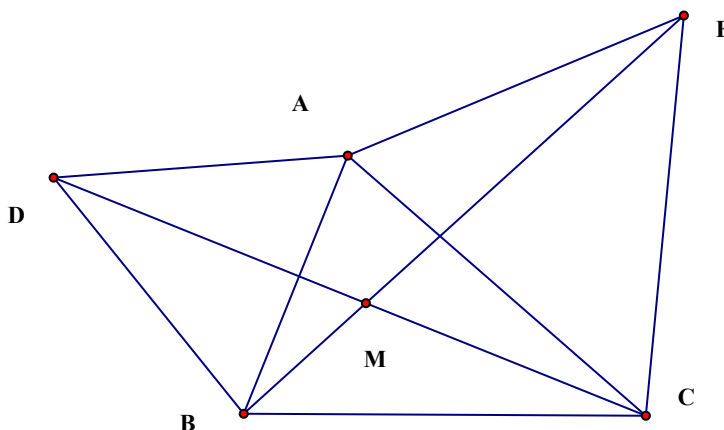
Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DC$  và  $BE$ .

$$\Delta ABE = \Delta ADC$$

a) Chứng minh

b) Tính số đo  $\angle BMC$

**Lời giải**



Xét  $\Delta ABE$  và  $\Delta ADC$  có:

$$AD = AB \text{ (}\Delta ABD \text{ đều)}$$

$$AC = AE \text{ (}\Delta ACE \text{ đều)}$$

$$\angle BAE = \angle DAC (=60^\circ + \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADC \text{ (c.g.c)}$$

$$\angle BMC = \angle MCE + \angle CEM$$

$$= \angle MCA + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEM + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEC + \angle ACE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

**Câu 13. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

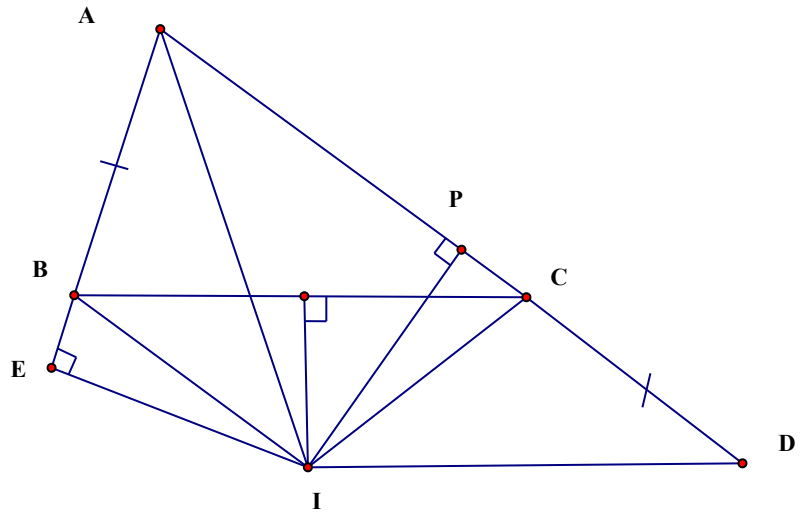
Cho tam giác  $\Delta ABE$  có  $AB < AC$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = AB$ . Gọi  $I$  là giao điểm các đường trung trực của  $BC$  và  $AD$ .

a) Chứng minh:  $\Delta AIB = \Delta DIC$

b) Chứng minh:  $AI$  là tia phân giác của  $\angle BAC$

c) Kẻ  $IE$  vuông góc với  $AB$ , chứng minh  $AE = \frac{1}{2} AD$

**Lời giải**



a) Vì  $I$  là giao điểm các đường trung trực của  $BC$  và  $AD$

$$\Rightarrow IB = IC \text{ và } IA = ID$$

Xét  $\triangle AIB$  và  $\triangle DIC$  có:

$$IB = IC$$

$$IA = ID$$

$$AB = CD$$

$$\Rightarrow \triangle AIB = \triangle DIC \text{ (c.c.c.)}$$

b) Ta có:  $IA = ID$

$$\Rightarrow \triangle AIB \text{ cân tại } I$$

$$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{B}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAI} = \widehat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{BAI}$$

$$\Rightarrow AI \text{ là tia phân giác của } \widehat{BAC}$$

c) Kẻ  $IP \perp AD$

Xét  $\triangle AIE$  (vuông tại  $E$ ) và  $\triangle AIP$  (vuông tại  $P$ ) có:

$AI$  là cạnh chung

$$\widehat{EAI} = \widehat{PAI} \text{ (} AI \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AIE = \triangle AIP \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AE = AP \text{ mà } AP = \frac{AD}{2} \text{ (vì } P \text{ là trung điểm của } AD \text{)}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2} AD$$

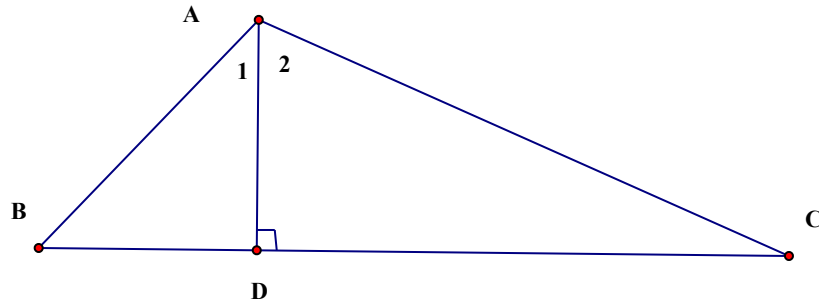
**Câu 14. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{H} = 3\widehat{B} = 6\widehat{E}$

a) Tính số đo các góc của tam giác  $ABC$

b) Kẻ  $AD$  vuông góc với  $BC$  ( $D \in BC$ ) . Chứng minh :  $AD < BD < CD$

Lời giải



$$H = 3B = 6C$$

a) Ta có:

$$\Delta ABC \quad H + B + C = 180^\circ$$

có:

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = \frac{H+B+C}{6+2+1} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow H = 120^\circ \text{ và } B = 40^\circ \text{ và } C = 20^\circ$$

b) Trong  $\Delta ACD$  có:  $\hat{ACD} = 90^\circ$  và  $C = 20^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = 70^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = 50^\circ$$

Xét  $\Delta ADB$  có:  $B = 40^\circ < \hat{H}_1 = 50^\circ$

$$\Rightarrow AD < BD \text{ (1)}$$

Xét  $\Delta ADC$  có:  $B = 40^\circ > C = 20^\circ$

$$\Rightarrow AB < AC$$

$$\Rightarrow AB^2 < AC^2 \text{ (2)}$$

Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác vuông  $\Delta ADB$  và  $\Delta ADC$  có:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ và } AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\text{Do đó từ (2)} \Rightarrow AD^2 + BD^2 < AD^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow BD^2 < CD^2 \Rightarrow BD < CD \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow AD < BD < CD$$

**Câu 15. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

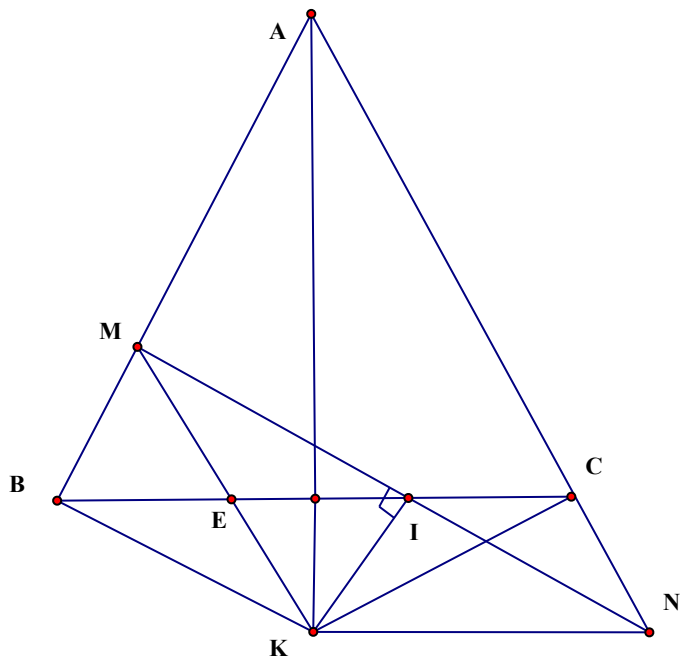
Cho tam giác  $ABC$  cân ở  $A$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$ , trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AM + AN = 2AB$

a) Chứng minh rằng:  $BM = CN$

b) Chứng minh rằng:  $BC$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $MN$

c) Đường trung trực của  $MN$  và tia phân giác của  $BAC$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh rằng:  $KC \perp AC$

**Lời giải**



$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

Theo giả thiết, ta có:

a)

$$\Rightarrow AM + AN = AM + AC + CN$$

Mà  $AM + AN = 2AB$

$$\Rightarrow 2AB = AM + AC + CN$$

$\Delta ABC$  cân ở  $A \Rightarrow AB = AC$

$$\Rightarrow 2AB = AM + AC + CN = AM + AB + CN$$

$$\Rightarrow AB = AM + CN$$

$$\Rightarrow AM + BM = AM + CN$$

$$\Rightarrow BM = CN$$

b) Qua  $M$  kẻ  $ME \parallel AC$  ( $E \in BC$ )

$\Delta ABC$  cân ở  $A$

$$\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{ACB}$$

Mà  $\hat{MEB} = \hat{ACB}$  ( $ME \parallel AC$ , hai góc đồng vị)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{MEB}$$

$\Rightarrow \Delta BME$  cân ở  $M$

$\Rightarrow ME = BM$  mà  $BM = CN$

$\Rightarrow ME = CN$

Xét  $\Delta MEI$  và  $\Delta NCI$  có:

$$ME = CN \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{MEI} = \widehat{NCI} \text{ (} ME // AC \text{, hai góc so le trong)}$$

$$\widehat{EMI} = \widehat{CNI} \text{ (} ME // AC \text{, hai góc so le trong)}$$

$\Rightarrow \Delta MEI = \Delta NCI$  (g.c.g)

$\Rightarrow IM = IN$

Vậy  $BC$  đi qua trung điểm của  $MN$

c)  $K$  thuộc đường trung trực của  $MN$

$\Rightarrow KM = KN$

Xét  $\Delta ABK$  và  $\Delta ACK$  có:

$$AB = AC \text{ (tam giác } ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\widehat{BAK} = \widehat{CAK} \text{ (} AK \text{ là tia phân giác của góc } A)$$

$AK$  là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABK = \Delta ACK$  (c.c.c)

$\Rightarrow KB = KC$

Xét  $\Delta BMK$  và  $\Delta CNK$  có:

$$BM = CN \text{ (chứng minh trên)}$$

$$KB = KC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$KM = KN \text{ (chứng minh trên)}$$

$\Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK$  (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{NCK}$

Mà  $\widehat{NCK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$  (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{MBK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$  ( $\widehat{MBK} = \widehat{NCK}$ )

Mà  $\widehat{MBK} = \widehat{ACK}$  ( $\Delta ABK = \Delta ACK$ )

$\Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$  ( $\widehat{MBK} = \widehat{NCK}$ )  $\Rightarrow 2\widehat{ACK} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$

