

Bài 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

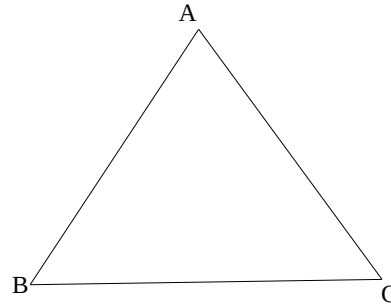
DẠNG 1: Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vectơ.

Phương pháp giải.

- Dựa vào định nghĩa $a.b = |a|.|b|\cos(a;b)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng:

- a. $AB.BC$
- b. $AB.AC$
- c) $AC.CB$
- d) $AB.(2.AB - 3AC)$**



a. $AB.BC$	<u>Lời giải</u>
b) $AB.AC$	<u>Lời giải</u>
c) $AC.CB$	<u>Lời giải</u>
d) $AB.(2.AB - 3AC)$	<u>Lời giải</u>

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

- a) Tính $AB.AC$, rồi suy ra giá trị của góc A .
- b) Tính $AC.BC$.
- c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $CD.CB$.

a) Tính $AB.AC$, rồi suy ra giá trị của góc A .	<u>Lời giải</u>
b) Tính $AC.BC$.	<u>Lời giải</u>
c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $CD.CB$.	<u>Lời giải</u>

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $AB.AC$.

Hình vẽ	<u>Lời giải</u>
---------	------------------------

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD

a) Phân tích BK , AC theo AB và AD .

b) Tính tích vô hướng $BK.AC$.

Hình vẽ

a) Phân tích BK , AC theo AB và AD .	<u>Lời giải</u>
b) Tính tích vô hướng $BK.AC$.	<u>Lời giải</u>

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

a) Phân tích DN , MN theo 2 vec-tơ AB và AD

b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Hình vẽ

<p>a) Phân tích DN, MN theo 2 vec-tơ AB và AD</p>	<p><u>Lời giải</u></p>
<p>b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.</p>	<p><u>Lời giải</u></p>

DẠNG 2: Chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.

Phương pháp giải.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng :

$$MA \cdot MB = IM^2 - IA^2$$

Lời giải

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $MA \cdot MC = MB \cdot MD$

b) $MA^2 + MB \cdot MD = 2MA \cdot MO$

a) $MA.MC = MB.MD$	<u>Lời giải</u>
b) $MA^2 + MB.MD = 2MA.MO$	<u>Lời giải</u>

Câu 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H , M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $MH.MA = \frac{1}{4}BC^2$.

Lời giải

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải

DẠNG 3: Chứng minh hai vectơ vuông góc. Tìm điều kiện để hai vectơ vuông góc

Phương pháp: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Câu 1: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng $AM \perp HD$

Giải

Hình vẽ	<u>Lời giải</u>

Câu 2: Cho $a \perp b$ và $|a| = 1, |b| = 2$. Chứng minh rằng vectơ $(2a - b)$ vuông góc với vectơ $(a + b)$

Giải

DẠNG 4: Tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.

Phương pháp giải.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|AM| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $MA \cdot MB = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- Nếu $MA \cdot a = 0$ với a khác 0 cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ a

Câu 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ a khác 0 và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $MA \cdot MB = \frac{3a^2}{4}$

b) $MA \cdot MB = MA^2$

a) $MA \cdot MB = \frac{3a^2}{4}$	<u>Lời giải</u>
b) $MA \cdot MB = MA^2$	<u>Lời giải</u>

Câu 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a. $(MA - MB)(2MB - MC) = 0$

b. $(MA + 2MB)(MB + 2MC) = 0$

c. $2MA^2 + MA \cdot MB = MA \cdot MC$

a. $(MA - MB)(2MB - MC) = 0$	<u>Lời giải</u>
b. $(MA + 2MB)(MB + 2MC) = 0$	<u>Lời giải</u>

<p>c. $2MA^2 + MA.MB = M.AMC$</p>	<p>Lời giải</p>
--	------------------------

DẠNG 5: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Phương pháp giải.

- Cho $a = (x_1; y_1)$, $b = (x_2; y_2)$. Khi đó
- + Tích vô hướng hai vectơ là $a.b = x_1x_2 + y_1y_2$
- + Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Chú ý: $a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức
- + Nếu $a = (x; y)$ thì $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- + Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Câu 1: Cho $a(1; 2)$; $b(3; 1)$, $c(-1; -2)$

- Tính $a.b$; $a.(b + c)$
- Tính $|a|$; $|a + 2b - c|$
- Tính góc (a, b)
- Xác định tọa độ của vectơ u biết $(a + 2b).u = -13$ và $(-b + 2u).a = -3$

Giải

<p>a. Tính $a.b$; $a.(b + c)$</p>	<p>Lời giải</p>
--	------------------------

b. Tính $ a ; a + 2b - c $	<u>Lời giải</u>
c. Tính góc (a, b)	<u>Lời giải</u>
d. Xác định tọa độ của vectơ u biết $(a + 2b).u = -13$ và $(-b + 2u).a = -3$	<u>Lời giải</u>

Câu 2. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- b) Tính diện tích tam giác ABC .
- c) Tính góc B của tam giác ABC .
- d. Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Giải

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .	<u>Lời giải</u>
b) Tính diện tích tam giác ABC .	<u>Lời giải</u>

c) Tính góc B của tam giác ABC	<u>Lời giải</u>
c. Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC	<u>Lời giải</u>

Câu 3. Cho tam giác $A(1;5)$; $B(4;-5)$; $C(4;1)$.

- Tính chu vi tam giác ABC .
- Tính độ dài các đường trung tuyến AM của tam giác ABC
- Tính $\cos A$
- Tìm tọa độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC . $CMR G,H,I$ thẳng hàng
- Tìm trên trục Ox điểm P cách đều 2 điểm A,B .
- Tìm N trên Oy sao cho tam giác ABN cân tại N .
- Tìm Q trên Ox sao cho tam giác ABQ vuông tại A

Giải

a. Tính chu vi tam giác ABC .	<u>Lời giải</u>
b. Tính độ dài các đường trung tuyến AM của tam giác ABC	<u>Lời giải</u>

c. Tính $\cos A$	<u>Lời giải</u>
d. Tìm tọa độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I, trọng tâm G của tam giác ABC. Chứng minh G, H, I thẳng hàng.	<u>Lời giải</u>
e. Tìm trên trục Ox điểm P cách đều 2 điểm A, B.	<u>Lời giải</u>
g. Tìm N trên Oy sao cho tam giác ABN cân tại N.	<u>Lời giải</u>
h. Tìm Q trên Ox sao cho tam giác ABQ vuông tại A	<u>Lời giải</u>

--	--

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-2; -1)$, $B(2; -4)$. Tìm trên trục Oy điểm M sao cho $\widehat{MBA} = 45^\circ$.

Lời giải