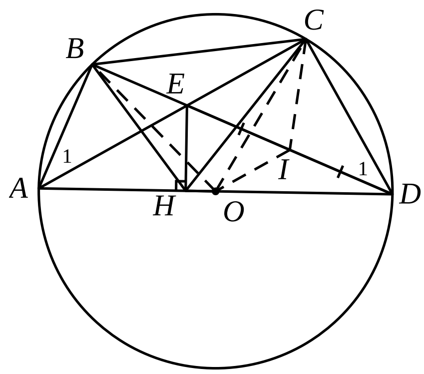
Bài 47. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính $AD,$ tâm $O.$ Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại $E.$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của $DE.$ Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $ABEH; DCEH$ nội tiếp.

b) E là tâm của đường tròn nội tiếp $\Delta BCH.$

c) Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



a)

- $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{ABE} = 90^\circ$

  $\widehat{AHE} = 90^\circ$ (gt)

  Do đó: $\widehat{ABE} + \widehat{AHE} = 180^\circ$

  Vậy tứ giác $ABEH$ nội tiếp đường tròn đường kính $KO.$
- Tương tự ta cũng chứng minh được tứ giác $DCEH$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} (= \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{AB})$; $\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (tứ giác $DCEH$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{HCE} \Rightarrow CE$ phân giác của $\widehat{BCH}$

Tương tự ta cũng chứng minh được BE là phân giác của $\widehat{CBH}$

Từ đó suy ra E là tâm của đường tròn nội tiếp $\Delta BCH.$

c) ΔECD vuông tại C có OI là đường trung tuyến nên $\widehat{BIC} = \widehat{EIC} = 2\widehat{D}_1 = 2\widehat{A}_1$ (vì $\widehat{D}_1, \widehat{A}_1$ chắn cung BC)

Dựa vào câu b ta có HE là phân giác của góc BHC nên $\widehat{BHC} = 2\widehat{A}_1$ (vì ABEH nội tiếp)

Ta cũng có $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}_1$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BC)

Vậy $\widehat{BIC} = \widehat{BHC} = \widehat{BOC} \left(= 2\widehat{A}_1\right)$

Ba điểm I, H, O cùng nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc không đổi. Do đó năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

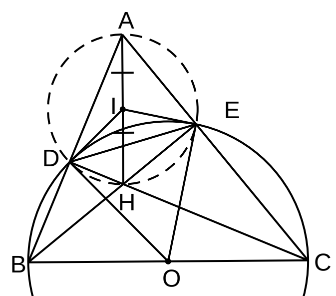
Bài 48. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E. Gọi H là giao điểm của BE và CD.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp.

b) Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh $IO \perp DE$.

c) Chứng minh AD.AB = AE.AC.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{BDC}=\widehat{BEC}=90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{ADH}=\widehat{AEH}=90^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ADH}+\widehat{AEH}=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH.

b) Vì I là trung điểm của AH nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE.

$\Rightarrow ID=IE$.

Lại có: OD = OE (bán kính đường tròn (O))

Do đó: OI là đường trung trực của DE

$\Rightarrow OI\perp DE$.

c) Xét ΔADE và ΔACB, có:

$\widehat{BAC}$: chung; $\widehat{ADE}=\widehat{ACB}$ (tứ giác BDEC nội tiếp)

Do đó: $\Delta ADE\#\Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}\Rightarrow AD.AB=AE.AC$.

Bài 49. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

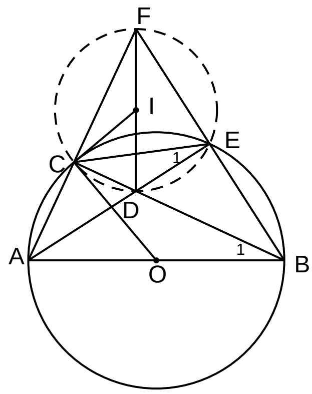
a) Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh DA.DE = DB.DC.

c) Chứng minh $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Cho biết DF = R. Chứng minh rằng: $\tan\widehat{AFB}=2$

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{ACB}=\widehat{AEB}=90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{FCD}=\widehat{FED}=90^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{FCD}+\widehat{FED}=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác FCDE nội tiếp đường tròn đường kính AH.

b) Xét ΔDAC và ΔDBE, có:

$\widehat{CAD}=\widehat{EBD}\left(=\dfrac{1}{2}sđ\,\widehat{CE}\right)$; $\widehat{ADC}=\widehat{BDE}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\Delta DAC\#\Delta DBE$ (g.g) $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DC}{DE}\Rightarrow DA.DE=DB.DC$

c) Ta có: $\widehat{CFD}=\widehat{E}_1$ (tứ giác FCDE nội tiếp)

$\widehat{E}_1=\widehat{B}_1$ (tứ giác ACEB nội tiếp); $\widehat{B}_1=\widehat{OCB}$ (ΔOCB cân tại O)

Suy ra: $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$

* Ta có: $\widehat{C}_1=\widehat{F}_1$ (ΔIFC cân tại I); $\widehat{F}_1=\widehat{B}_1$ ($=\widehat{E}_1$) $\Rightarrow \widehat{C}_1=\widehat{B}_1$

$\widehat{C}_2=\widehat{CAO}$ (ΔOAC cân)

$\Rightarrow \widehat{C}_1+\widehat{C}_2=\widehat{B}_1+\widehat{CAO}=90^0$ (ΔACB vuông tại C).

$\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^0 \Rightarrow$ IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Xét ΔAEB và ΔFED, có: $\widehat{EAB} = \widehat{EFD}$ $(= \widehat{ECD})$; $\widehat{AEB} = \widehat{FED} (= 90^0)$

Do đó: $\Delta AEB \backsim \Delta FED \Rightarrow \frac{AE}{FE} = \frac{AB}{FD} \Rightarrow \tan \widehat{AFB} = \frac{2R}{R} = 2$.