

A. MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Môn Toán trong trường phổ thông giữ một vai trò, vị trí hết sức quan trọng, là môn học công cụ. Nếu học tốt môn Toán thì những tri thức trong Toán cùng với phương pháp làm việc trong Toán sẽ trở thành công cụ để học tốt những môn học khác. Hơn nữa, môn Toán còn góp phần phát triển nhân cách học sinh. Ngoài việc cung cấp cho học sinh hệ thống kiến thức, kĩ năng, môn Toán còn rèn luyện cho học sinh đức tính, phẩm chất của người lao động như: Tính cẩn thận, tính chính xác, tính kỉ luật, tính sáng tạo...

Do đó trong quá trình dạy học đòi hỏi đội ngũ các thầy, cô giáo phải tích cực học tập, không ngừng nâng cao năng lực chuyên môn, đổi mới phương pháp dạy học theo hướng phát huy tích cực, tự giác, chủ động và sáng tạo của học sinh, bồi dưỡng khả năng tự học, khả năng vận dụng kiến thức vào thực tế, đem lại sự say mê, hứng thú học tập cho học sinh.

Trong quá trình thực tế giảng dạy học sinh các khối 11 và 12 trường THPT Thạch Thành 2 trong những năm học đã qua và đặc biệt là năm học 2015-2016, tôi thấy học sinh còn gặp rất nhiều lúng túng trong việc giải quyết một bài toán hình học nói chung và đặc biệt là bài toán “***Tính khoảng cách***” trong hình học không gian nói riêng, có thể có rất nhiều nguyên nhân dẫn đến tình trạng nói trên, nhưng theo tôi, nguyên nhân chủ yếu là khi học hình học, học sinh không để ý đến các định nghĩa, các định lý và các tính chất hình học. Các phương pháp giải còn mang tính chất chủ quan, rời rạc, gặp bài toán nào thì chỉ chú trọng tìm cách giải cho riêng bài toán đó mà không có một cách nhìn tổng quát. Chính vì vậy dẫn đến tình trạng các em bị lúng túng trước các cách hỏi trong một bài toán mới.

Với vai trò là một giáo viên dạy Toán và qua nhiều năm giảng dạy, để trao đổi cùng các thầy cô đồng nghiệp với mong muốn tìm ra hướng giải quyết đơn giản nhất cho một bài toán, làm cho học sinh nhớ được kiến thức cơ bản trên cơ sở đó để sáng tạo. Tôi xin trình bày một số phương pháp và kinh nghiệm của mình về việc giải quyết bài toán “***Tính khoảng cách***” đó là:

“Hướng dẫn học sinh giải bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong đề thi THPT Quốc gia ”

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu là tìm ra phương pháp dạy học phù hợp cho từng đối tượng học sinh, để từ đó tạo hứng thú học tập cho các em, giúp cho các em hiểu rõ các dạng toán và định hướng cách giải cho bài toán “***Tính khoảng cách***”. Để

từ đó rút ra kết luận và đề xuất một số biện pháp cụ thể khi tiến hành giúp đỡ từng đối tượng học sinh, nhằm nâng cao chất lượng dạy và học.

3. Đối tượng nghiên cứu

Trong quá trình giảng dạy học sinh khối 11 và 12 và đặc biệt là đối tượng học sinh đang ôn tập để tham dự kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2016. Theo cấu trúc đề thi, để các em đạt được điểm 7 đồng nghĩa với việc các em phải vượt qua được câu hỏi (thường là số 7) có nội dung liên quan đến bài toán “**Tính khoảng cách**”. Rõ ràng đây là một mốc rất quan trọng trong đề thi, là một mốc mà quyết định đến việc chọn trường để học sau này của các em. Với tinh thần đó tôi đã quyết định chọn đề tài này , nhằm giúp các em nắm được **các phương pháp** cơ bản nhất để giải bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp trực quan.
- Phương pháp nêu và giải quyết vấn đề.
- Phương pháp thực nghiệm.

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN

1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0 .

Định nghĩa 2: Một đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Định nghĩa 3: Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0 .

Định nghĩa 4: Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b .

Định nghĩa 5: Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) bằng 90^0 . Nếu đường thẳng a không

vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (α) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α).

Định nghĩa 6: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Định nghĩa 7: Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) (hoặc đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H , với H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) (trên đường thẳng Δ).

Định nghĩa 8: Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) song song với d là khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc d đến mặt phẳng (α).

Định nghĩa 9: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Định nghĩa 10: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2. Các tính chất thường được sử dụng

$$\text{Tính chất 1: } \left. \begin{array}{l} a \cap b \\ a, b \subset (P) \\ d \perp a, d \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (P)$$

$$\text{Tính chất 2: } \left. \begin{array}{l} a \subset (P) \\ d \perp (P) \\ \forall a \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp a$$

$$\text{Tính chất 3: } \left. \begin{array}{l} d \perp (P) \\ d' // d \end{array} \right\} \Rightarrow d' \perp (P)$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (Q)$$

$$\left. \begin{array}{l} d // (P) \\ d' \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow d' \perp d$$

Tính chất 4: $\left. \begin{array}{l} d \perp (P) \\ d \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

Tính chất 5: $\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ d \subset (P) \\ d \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (Q)$

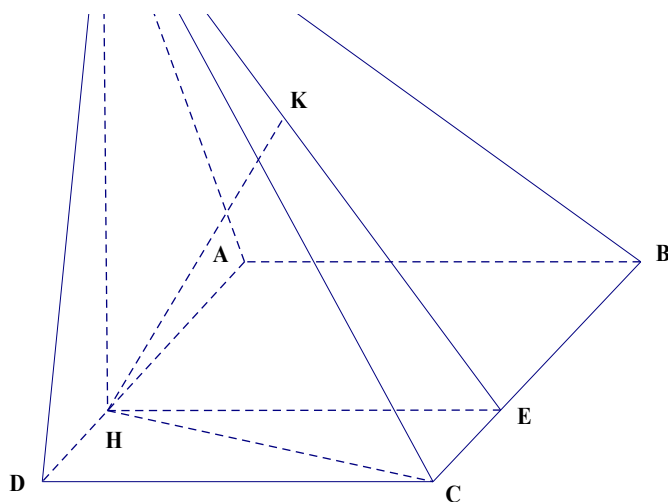
Tính chất 6: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ

Hình học không gian là một nội dung rất quan trọng trong cấu trúc đề thi THPT Quốc gia của Bộ giáo dục, nếu học sinh không nắm vững phương pháp và các bước thực hiện thì các em sẽ gặp rất nhiều lúng túng khi làm về dạng toán này. Có lẽ bài toán mà học sinh gặp nhiều khó khăn hơn đó là bài toán “**Tính khoảng cách**”. Trong quá trình giảng dạy tôi nhận thấy có rất nhiều học sinh rất ngại học môn hình học không gian vì các em nghĩ rằng nó quá trừu tượng và thiếu tính thực tế. Chính vì vậy mà có rất nhiều học sinh học yếu môn học này, về phía giáo viên cũng gặp không ít khó khăn khi truyền đạt nội dung kiến thức và phương pháp giải các dạng bài Toán hình học không gian cho các em. Chẳng hạn như bài toán sau:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AD và SC theo a .

Lời giải mong muốn:



Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $\angle SCH = \angle SC, (ABCD) = 30^\circ$. Trong tam giác vuông SAD ta có $SA^2 = AH \cdot AD$

$$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4} AD^2 \Rightarrow AD = 4a; HA = 3a; HD = a$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{HA \cdot HD} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = SH \cdot \cot 30^\circ = 3a$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2\sqrt{2}a.$$

Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$ mà $SC \subset (SBC)$ nên $d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(H, (SBC))$

Kẻ $HE \perp BC, (E \in BC)$; kẻ $HK \perp SE, (E \in SE)$

Trong tam giác vuông SHE , ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{24a^2} \Rightarrow HK = \frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}a.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AD và SC bằng $\frac{2\sqrt{66}}{11}a$

Vậy khó khăn của học sinh khi gặp bài toán này nằm ở bước nào?

- *Bước vẽ hình*
- *Bước dựng chân đường vuông góc của điểm mà tính khoảng cách từ đó đến mặt phẳng*
- *Bước tính toán*

Rõ ràng ta thấy, việc vẽ hình cho bài toán này học sinh không gặp quá nhiều khó khăn, giả thiết của bài toán rất rõ ràng, chỉ cần giáo viên yêu cầu học sinh đọc kỹ đề bài, phân tích cụ thể các dữ liệu là các em vẽ được hình. Bước then chốt của bài toán này có lẽ nằm ở việc dựng được chân đường vuông góc của điểm mà ta sẽ tính khoảng cách từ đó đến mặt phẳng (SBC). Bước khó khăn nhất của bài toán này đương nhiên là việc tính toán, đây là một công việc có lẽ học sinh nào cũng thấy thiếu và yếu, vì kỹ năng tính toán của các em rất hạn chế từ các lớp dưới và cấp dưới, hơn nữa đây là việc tính toán trong hình học, ngoài kỹ năng ra, các em còn phải nắm vững các tính chất hình học.

Vậy làm thế nào để khắc phục được các nhược điểm trên cho các em? Có lẽ đây là yêu cầu hết sức khó khăn cho cả giáo viên lẫn học sinh. Chính vì vậy mà tôi đã quyết tâm thực hiện đề tài này. Cho dù thời gian thực hiện cũng như kinh nghiệm chưa nhiều, nhưng cũng đã khắc phục được những khó khăn trước mắt của các em.

III. CÁC GIẢI PHÁP THỰC HIỆN

Trong đề thi THPT Quốc gia và đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ của Bộ giáo dục và đào tạo những năm học trước, bài toán khoảng cách luôn luôn xuất hiện ở các nội dung: Tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, trong đề tài này, tôi xin trình bày các phương pháp cũng như các kinh nghiệm cho học sinh khi giải dạng toán “ **Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**”.

Trong không gian, cho hai đường thẳng chéo nhau d và d' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

1. Phương pháp

Phương pháp 1: Xác định đường thẳng vuông góc chung của d và d' . Tính độ dài đoạn vuông góc chung đó.

Phương pháp 2: Tìm mặt phẳng (P) chứa d' và song song với d . Khi đó $d(d, d') = d(d, (P)) = d(A, (P))$, với A là một điểm bất kỳ thuộc d .

Phương pháp 3: Phương pháp thể tích.

Phương pháp 4: Phương pháp tọa độ.

2. Áp dụng

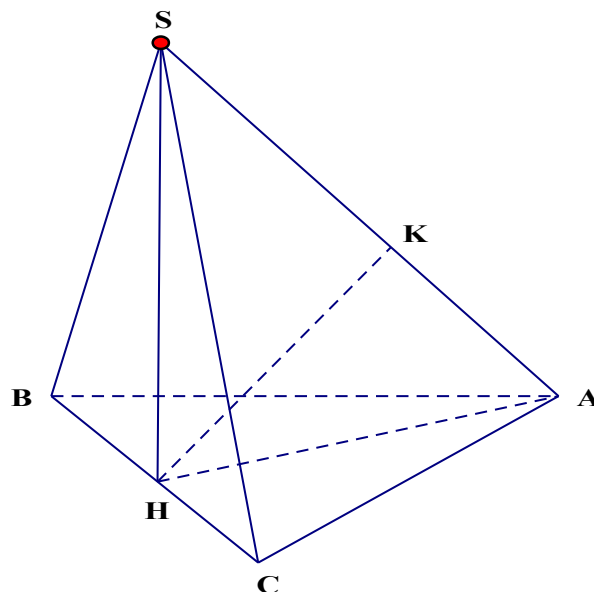
Ví dụ 1: (D-2014) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

Lời giải mong muốn:

Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. Vì mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a , nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA , suy ra $HK \perp SA$

Ta có $BC \perp (SAH)$ vì $BC \perp SH$ và $BC \perp AH \Rightarrow BC \perp HK$. Do đó HK là đường vuông góc chung của SA và BC .



Xét tam giác SHA vuông tại H, có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

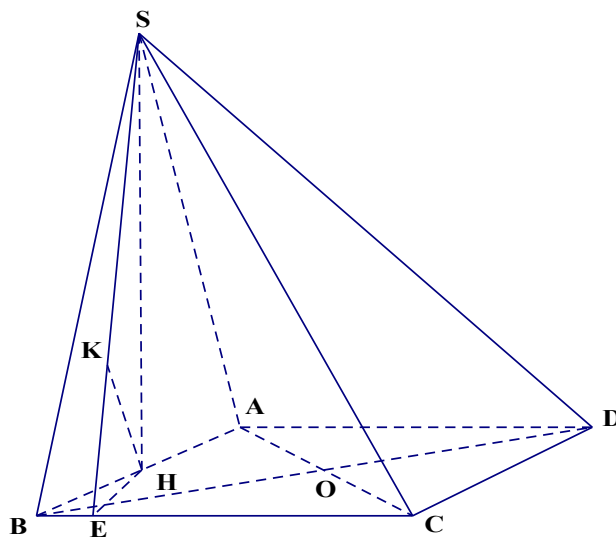
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Nhận xét: Rõ ràng đây là bài toán tương đối dễ đối với học sinh. Ta đã áp dụng trực tiếp phương pháp thứ nhất “ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau ” để giải bài toán này. Vậy yếu tố nào đã gợi ý cho học sinh sử dụng phương pháp trên để giải bài toán, có lẽ đó chính là giả thiết của bài toán, học sinh cần phải đọc kỹ đề bài, phân tích các giả thiết bài toán, đặc biệt là phải xâu chuỗi các giả thiết của bài toán với nhau. Có làm được như vậy học sinh mới vận dụng đúng phương pháp để giải.

Trong thực tế giảng dạy qua các năm, khi gặp các bài toán này hoặc là các bài toán tương tự, nhiều học sinh do không đọc kỹ đề bài, phân tích các giả thiết bài toán một cách thiếu cẩn thận nên đã áp dụng phương pháp không phù hợp để giải bài toán, tất nhiên là khi áp dụng các phương pháp khác, các em vẫn giải được bài toán.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD), biết $AC = 2a, BD = 4a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

Lời giải mong muốn:



Gọi O là giao điểm của AC và BD , H là trung điểm của AB , suy ra $SH \perp AB$. Vì $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có $AC = 2a, BD = 4a$ nên $OA = a, OB = 2a$

$$\Rightarrow AB = a\sqrt{5} \Rightarrow SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \quad B = AH \cap (SBC)$$

Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$

Kẻ $HE \perp BC, H \in BC$, do $SH \perp BC$ nên $BC \perp (SHE)$.

Kẻ $HK \perp SE, K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$

$$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2AB} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$$

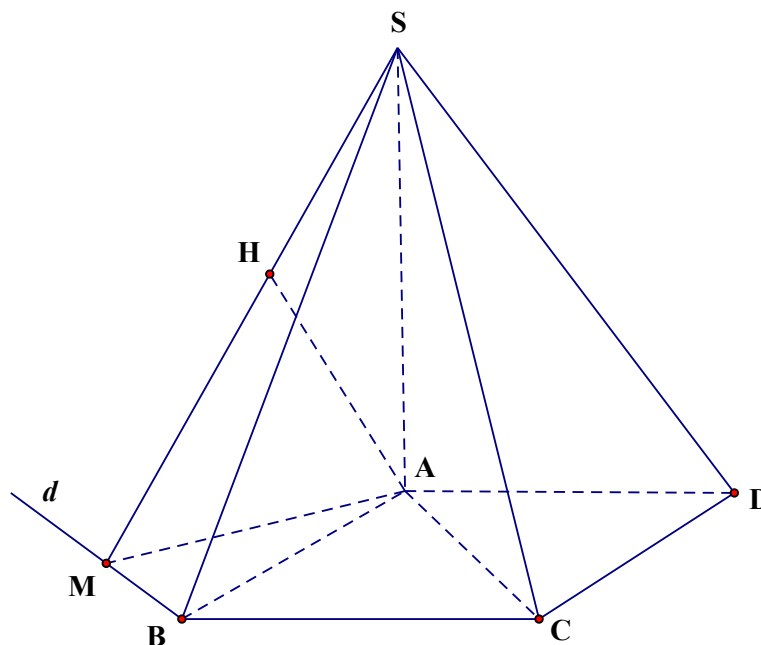
$$\text{do đó } d(AD, SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{1365}}{91}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng $\frac{4a\sqrt{1365}}{91}$

Nhận xét: Ta đã sử dụng **phương pháp 2** để giải bài toán này, tức là đã sử dụng tính chất “ Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia ” để quy việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về việc tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Bài toán này dễ với học sinh ở chỗ là đã có sẵn mặt phẳng (SBC) chứa SC và song song với AD . Công việc còn lại là các em chỉ cần xác định xem chọn điểm nào trên đường thẳng AD để tính khoảng cách từ đó đến mặt phẳng (SBC) cho phù hợp. Tuy nhiên trong thực tế thì không phải bài toán nào cũng có sẵn điều đó, chẳng hạn như **Ví dụ 3** dưới đây.

Ví dụ 3: (Trích đề thi THPT QG 2015) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

Lời giải mong muốn:



Ta có $\angle SCA = (\angle SC, (ABCD)) = 45^\circ$ suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$

Kẻ đường thẳng d qua B và song song với AC . Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên d , H là hình chiếu vuông góc của A trên SM . Khi đó $SA \perp BM$, $MA \perp BM$ nên $AH \perp BM \Rightarrow AH \perp (SBM)$

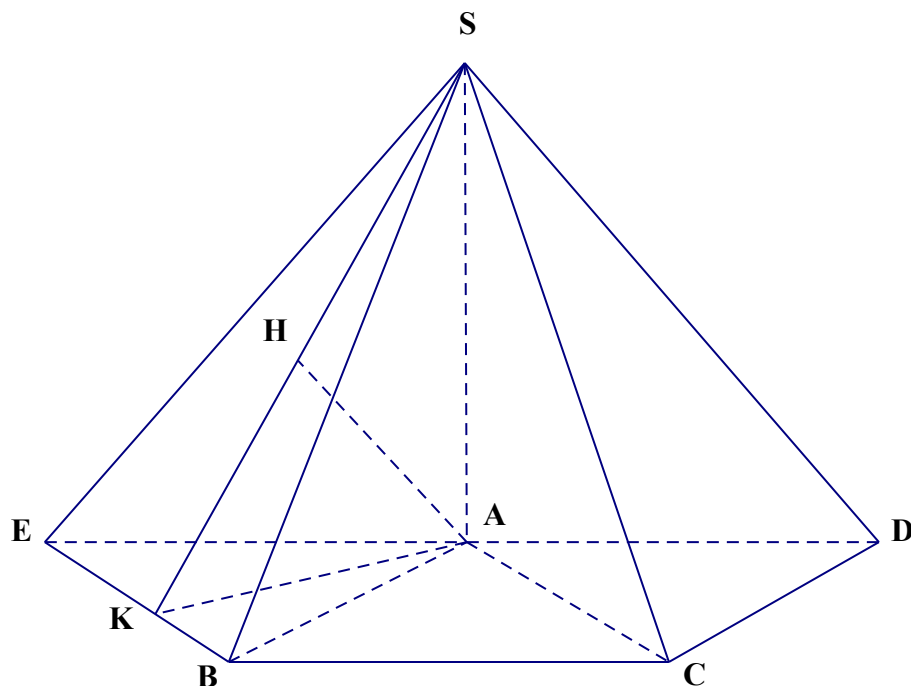
Do đó $d(AC, SB) = d(A, (SBM)) = AH$

Tam giác SAM vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Nhận xét: Qua giả thiết bài toán ta thấy chưa có sẵn một mặt phẳng nào chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại. Rõ ràng đây là một vấn đề khó với học sinh, lúc này việc hướng dẫn các em tìm được một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu trên là rất cần thiết đối với giáo viên. Ta có thể hướng dẫn học sinh như sau:

“Gọi E là điểm đối xứng với D qua A . Khi đó tứ giác $ACBE$ là hình bình hành, do đó $AC \parallel EB$, tức là $AC \parallel (SEB)$ mà $SB \subset (SEB)$. Vậy nên $d(AC, SB) = d(AC, (SEB)) = d(A, (SEB)) \dots$ ” Đến đây công việc tiếp theo có lẽ đã dễ hơn đối với các em rất nhiều rồi.



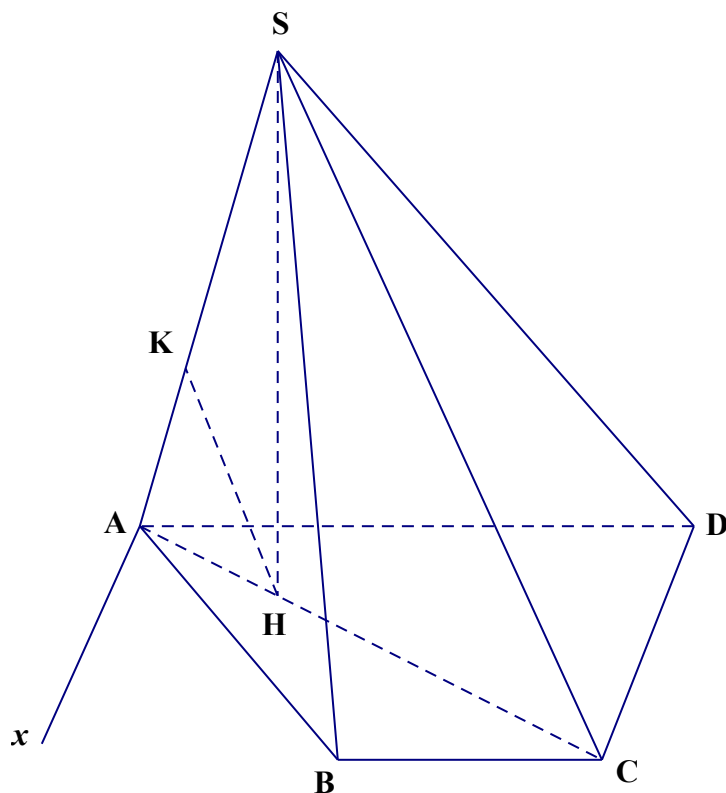
Ta cũng có thể hướng dẫn các em giải bài toán theo hướng sau: “ Dựng hình bình hành $ACBE$, ta có $AC \parallel EB$, tức là $AC \parallel (SEB)$ mà $SB \subset (SEB)$ nên $d(AC, SB) = d(AC, (SEB)) = d(A, (SEB)) \dots$ ” các bước tiếp theo được thực hiện như trên.

Tóm lại, qua ba cách tiếp cận trên, ta thấy mục đích cuối cùng là giáo viên hướng dẫn học sinh tìm được một mặt phẳng nào đó chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại. Vấn đề nằm ở chỗ là khi gặp một bài toán tương tự, các em có chủ động tìm ra được hướng giải quyết vấn đề hay không, điều này còn phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố khác nữa, chẳng hạn như giả thiết của bài toán tương đối phức tạp giống như bài toán trong đề thi thử THPT QG năm 2016 của sở giáo dục và đào tạo Thanh Hóa sau đây.

Ví dụ 4: (Trích đề thi thử THPT QG 2016 – Thanh Hóa) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AD là đáy lớn $AD = 2a, AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $HC = 2HA$. Góc giữa hai mặt

phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

Lời giải mong muốn:



Từ giả thiết ta có $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC \perp CD$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp CD$, từ đó ta có $CD \perp (SAC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là $\angle SCH = 60^\circ$

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, AH = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SH = HC. \tan 60^\circ = 2a$$

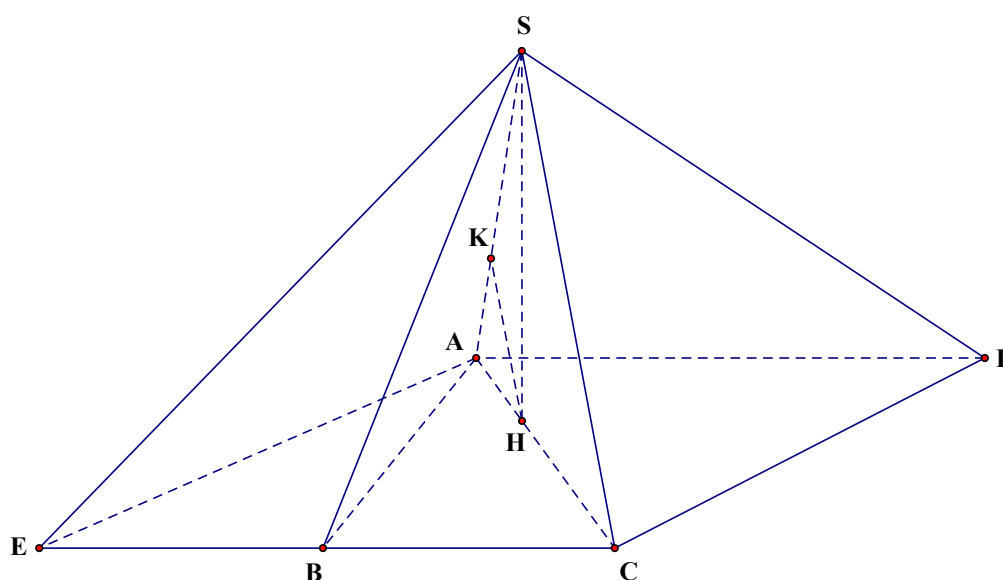
Kẻ đường thẳng Ax song song với CD . Gọi (P) là mặt phẳng chứa Ax và SA , khi đó $AC \parallel (P)$ suy ra $d(CD, SA) = d(CD, (P)) = d(C, (P)) = 3d(H, (P))$ (vì $CA = 3HA$)

Ta có $AC \perp CD$ nên $HA \perp Ax$ mà $SH \perp Ax \Rightarrow Ax \perp (SAH)$. Từ H kẻ $HK \perp SA$, ($K \in SA$), khi đó $Ax \perp HK \Rightarrow HK \perp (P)$ nên $HK = d(H, (P))$

Trong tam giác vuông SHK có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{13}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$.

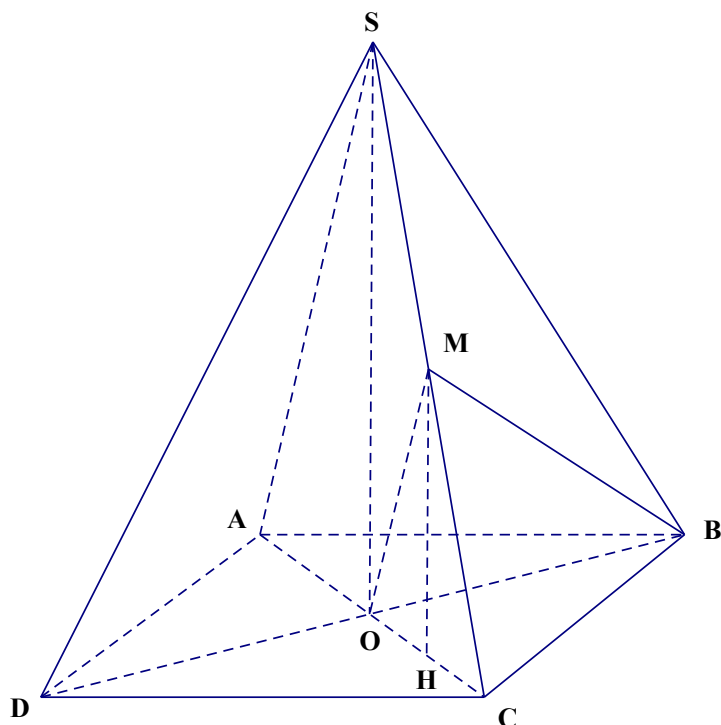
Nhận xét: Đây cũng chính là một bài toán mà chưa có sẵn một mặt phẳng nào đó chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại. Cách tiếp cận mặt phẳng (P) của đáp án như trên là rất trừu tượng đối với học sinh, ta có thể hướng dẫn học sinh tiếp cận mặt phẳng (P) theo lối mòn như sau:



“ Dựng hình bình hành $ADCE$, ta có $CD \parallel EA$ nên $CD \parallel (SAE)$ mà $SA \subset (SAE)$ do đó $d(CD, SA) = d(CD, (SAE)) = d(C, (SAE)) = 3d(H, (SAE)) \dots$
 ” Các bước tiếp theo cũng được thực hiện như đáp án nêu trên.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, $AC = 4$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , M là trung điểm cạnh SC , biết SO vuông góc với mặt đáy và $SO = 2\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM .

Lời giải mong muốn:



Vì $SA \parallel (OMB)$ nên $d(SA; MB) = d(SA; (OMB)) = d(S; (OMB)) = d(C; (OMB))$

Kẻ $MH \perp (ABCD) \Rightarrow H \in OC$. Ta có tính $OB = 1$, $MH = \frac{1}{2}SO = \sqrt{2}$

$$\text{Do đó } V_{M.OBC} = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot MH = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có } OM = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3} \quad \text{và} \quad V_{C.MOB} &= \frac{1}{3} S_{MOB} \cdot d(C; (OMB)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OM \cdot d(C; (OMB)) \end{aligned} \quad (2)$$

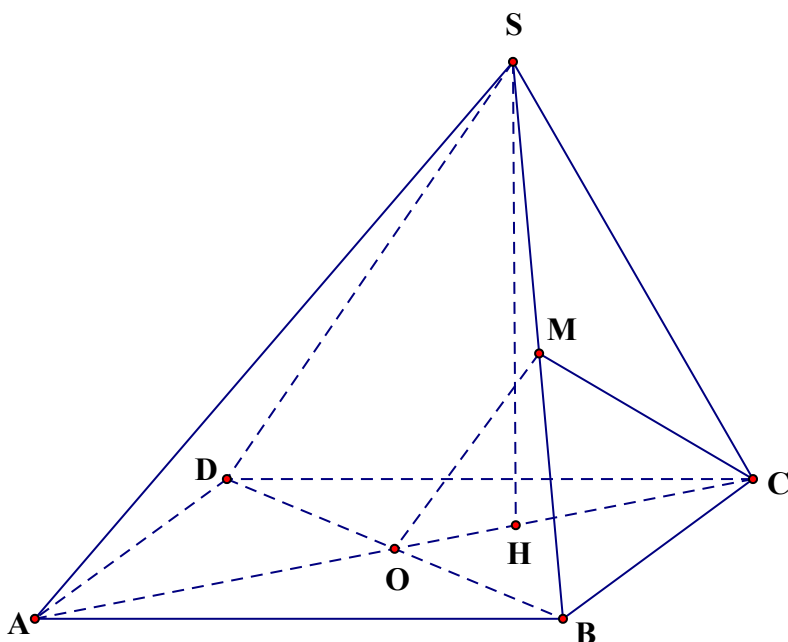
$$\text{Từ (1) và (2) ta có } d(C; (OMB)) = d(SA; MB) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$,

$AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác BCD . Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a .

Lời giải mong muốn:



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD . Theo giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có $CH = \frac{2}{3}CO = \frac{1}{3}AC = a \Rightarrow AH = AC - HC = 2a$.

Cạnh SA tạo với đáy góc 45° , suy ra $\angle SAH = 45^\circ$, $SH = AH = 2a$.

Gọi M là trung điểm SB thì mặt phẳng (ACM) chứa AC và song song với SD .

Do đó $d(SD; AC) = d(SD; (ACM)) = d(D; (ACM))$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$, với $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2\sqrt{2}a; 0)$, $C(a; 2\sqrt{2}a; 0)$,

$S(\frac{2a}{3}; \frac{4\sqrt{2}a}{3}; 2a)$, $M(\frac{5a}{6}; \frac{2\sqrt{2}a}{3}; a)$.

Từ đó, ta viết phương trình mặt phẳng (ACM) là: $2\sqrt{2}x - y - \sqrt{2}z = 0$.

$$\text{Do đó } d(SD, AC) = d(D, (ACM)) = \frac{|-2\sqrt{2}a|}{\sqrt{8+1+2}} = \frac{2\sqrt{22}a}{11}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng $\frac{2\sqrt{22}a}{11}$

Nhận xét: Ta có thể dùng phương pháp hình học thuần túy, quy về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng để giải bài toán này.

Qua các ví dụ trên cho thấy, mỗi bài toán không phải chỉ có một cách giải mà đối với mỗi bài toán, tùy vào giả thiết được nêu, trong từng trường hợp, học sinh có thể định hướng cho mình nhiều phương pháp giải khác nhau, phù hợp với đặc điểm của từng bài toán. Có những phương pháp giải thì rất hiệu quả đối với bài toán này nhưng sẽ gặp khó khăn đối với bài toán khác.

3. Bài tập

Bài 1: (A-2010) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a .

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với $mp(ABCD)$ và $SH = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC .

Bài 2: (A-2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm AB , mặt phẳng qua SM song song BC cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Bài 3: (A-2012) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trên AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Bài 4: (D-2008) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM theo a .

Bài 5: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'C$ và $C'D$ theo a .

- Bài 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD theo a .
- Bài 7:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' theo a .
- Bài 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) , $SA = a\sqrt{6}$, $AB = AC = a\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120^\circ$; lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .
- Bài 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $(ABCD)$ là hình thoi cạnh a và góc $\angle ABC = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết góc giữa SC và đáy $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a .
- Bài 10:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{10}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) , góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC theo a , biết M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

IV. HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Một số phương pháp giải các bài toán về “**Tính khoảng cách**” đã được bản thân tôi và các đồng nghiệp cùng đơn vị thí điểm trên các lớp mũi nhọn và các em học sinh có học lực từ khá trở lên. Kết quả thu được rất khả quan, các em học tập một cách say mê hứng thú. Một số em đã đạt được những thành tích tốt qua những đợt thi học sinh giỏi, thi THPT Quốc gia.

Tuy nhiên với đề tài này người thầy phải biết vận dụng sáng tạo các phương pháp, luôn không ngừng tìm tòi, tham khảo các tài liệu, tham khảo đồng nghiệp, xâu chuỗi chúng lại và cho học sinh các bài tập định hướng để các em học tập, tìm hiểu.

Đối tượng học sinh là học sinh khá giỏi, luôn tin tưởng ở thầy, có điều kiện học tập, nghiên cứu.

C. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

Với mục đích nâng cao năng lực tư duy, tính sáng tạo trong giải toán khoảng cách của học sinh. Hy vọng với kết quả nhỏ này sẽ bổ sung được phần nào kiến thức cơ bản cho các em, giúp các em nhận thức đầy đủ và rèn luyện tốt kỹ năng giải các bài toán khoảng cách trong hình học không gian.

Qua thời gian thực tế giảng dạy bài toán “***Tính khoảng cách***” ở trường THPT Thạch Thành 2, tôi rút ra được một số kinh nghiệm sau đây.

- Về phương pháp dạy học, cần chú ý hơn đến phương pháp lĩnh hội tri của học sinh, giúp các em có khả năng tiếp thu sáng tạo và vận dụng linh hoạt tri thức trong các tình huống đa dạng.
- Rèn luyện cho học sinh thói quen, tính kỉ luật trong việc thực hiện các kĩ năng giải toán thông qua việc luyện tập, nhằm khắc phục tính chủ quan, hình thành tính độc lập, tính tự giác ở người học, thông qua đó hình thành và phát triển nhân cách của các em.
- Phải thường xuyên học hỏi trau dồi chuyên môn để tìm ra phương pháp dạy học phù hợp.
- Phải nhiệt tình, gương mẫu quan tâm tới học sinh, giúp đỡ các em để các em không cảm thấy áp lực trong học tập.
- Luôn tạo ra tình huống có vấn đề, kích thích hứng thú tìm tòi học tập ở học sinh.
- Đặt ra câu hỏi gợi mở phù hợp với đối tượng học sinh trong quá trình giảng dạy.

Do thời gian nghiên cứu và ứng dụng chưa nhiều nên đề tài của tôi không tránh khỏi còn nhiều hạn chế. Rất mong được sự đóng góp của các đồng nghiệp để tôi có thể hoàn thiện hơn đề tài của mình.

XÁC NHẬN
CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình
viết, không sao chép nội dung của người
khác.

Người thực hiện

Nguyễn Sỹ Thạc