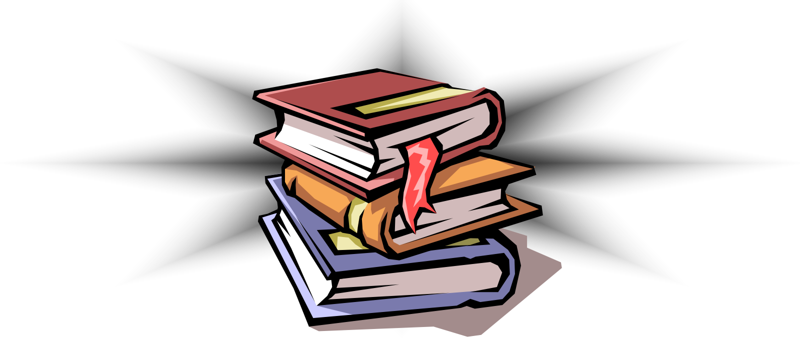
Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp



CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Thanh Hóa, ngày 7 tháng 3 năm 2020

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em chuyên đề về các bài toán về phương trình nghiệm nguyên. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để viết chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới về phương trình nghiệm nguyên thường được ra trong các kì thi gần đây.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề về các bài toán về phương trình nghiệm nguyên sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giải phương trình nghiệm nguyên.

Giải phương trình *f(x, y, z, ...) = 0* chứa các ẩn x, y, z, ... với nghiệm nguyên là tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z, ...) thỏa mãn phương trình đó.

2. Một số lưu ý khi giải phương trình nghiệm nguyên.

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các ẩn số cũng như các biểu thức chứa ẩn trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn. Các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên là:

- Phương pháp dùng tính chất chia hết
- Phương pháp xét số dư từng vế
- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức
- Phương pháp dùng tính chất của số chính phương
- Phương pháp lùi vô hạn, nguyên tắc cực hạn.

B. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT

🗁 **Dạng 1: Phát hiện tính chia hết của một ẩn**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x+17y=159 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3$ (do 17 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Đặt $y=3t\left(t\in Z\right)$ thay vào phương trình ta được $3x+17.3t=159 \Leftrightarrow x+17t=53$.

Do đó: $\begin{cases} x=53-17t \\ y=3t \end{cases}\left(t\in Z\right)$. Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (53 – 17t, 3t) với t là số nguyên tùy ý.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x+13y=156$ (1).

Hướng dẫn giải

- Phương pháp 1: Ta có $13y \vdots 13$ và $156 \vdots 13$ nên $2x \vdots 13 \Rightarrow x \vdots 13$ (vì (2,3) = 1).

Đặt $x=13k\ (k\in Z)$ thay vào (1) ta được: $y=-2k+12$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=13k \\ y=-2k+12 \end{cases} (k\in Z).$

- Phương pháp 2: Từ $(1) \Rightarrow x=\dfrac{156-13y}{2}=78-\dfrac{13y}{2}$,

Để $x\in Z \Rightarrow \dfrac{13y}{2}\in Z$ Mà $(13,2)=1 \Rightarrow y \vdots 2$ Đặt $y=2t(t\in Z) \Rightarrow x=78-13t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=78-13t \\ y=-2t \end{cases} (t\in Z).$

Chú ý: *Phương trình có dạng* $ax+by=c$ *với a,b,c là các số nguyên.*

** Phương pháp giải:*

- Phương pháp 1: Xét tính chia hết của các hạng tử.

- Phương pháp 2: Khử ẩn, sử dụng tính chia hết tìm điều kiện để một phân số trở thành số nguyên.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $23x+53y=109$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x=\dfrac{109-53y}{23}=\dfrac{23(4-2y)+17-7y}{23}=4-2y+\dfrac{17-7y}{23}$

Ta phải biến đổi tiếp phân số $\dfrac{17-7y}{23}$ để sao cho hệ số của biến y là 1.

Phân tích: Ta thêm, bớt vào tử số một bội thích hợp của 23

$$\frac{17-7y}{23}=\frac{17-7y+46-46}{23}=\frac{7(9-y)-46}{23}=-2+\frac{7(9-y)}{23}$$

Từ đó $x=2-2y+\dfrac{7(9-y)}{23}$, Để $x\in Z \Rightarrow \dfrac{9-y}{23}\in Z$, do (7,23) = 1.

Đặt $9-y=23t\ (t\in Z) \Rightarrow y=9-23t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=9-23t \\ y=53t-16 \end{cases} (t\in Z).$

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $11x+18y=120 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $11x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 6$ suy ra $x=6k\left(k\in Z\right)$ thay vào (1) rút gọn ta được: $11k+3y=20$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được: $y=\dfrac{20-11k}{3}$

Tách riêng giá trị nguyên của biểu thức này: $y=7-4k+\dfrac{k-1}{3}$

Lại đặt: $\dfrac{k-1}{3}=t\left(t\in Z\right)\Rightarrow k=3t+1$.

Do đó: $y=7-4\left(3t+1\right)+t=3-11t; \quad x=6k=6\left(3t+1\right)=18t+6$

Thay các biểu thức trên vào phương trình (1) thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của phưng trình là (x, y) = (18t + 6; 3-11t) với t $\in Z$

Chú ý: *a) Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (1) thì sau khi tìm được nghiệm tổng quát ta có thể giải điều kiện:*

$$\begin{cases}18t+6>0\\3-11t>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<t<\frac{3}{11}$$

Do đó t = 0 do t là số nguyên. Nghiệm nguyên dương của (1) là (x, y) = (6, 3).

Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên dương của (1) ta còn có thể giải như sau: 11x + 18y = 120

Do $y\ge 1$ *nên* $11x\le 120-18.1=102$.

Do x nguyên nên $x\le 9$ *. Mặt khác* $x\vdots 6$ *và x nguyên dương nên x = 6* $\Rightarrow y=3$

b) Có nhiều cách tách giá trị nguyên của biểu thức $y=\dfrac{20-11k}{3}$*, chẳng hạn:*

$y=7-4k+\dfrac{k-1}{3}$ *(cách 1)*

$y=7-3k-\dfrac{1+2k}{3}$ *(cách 2)*

$y=6-3k+\dfrac{2\left(1-k\right)}{3}$ *(cách 3)*

Ta thấy: - Cách 1 gọn hơn cách 2 vì ở cách 1 hệ số của k trong phân thức bằng 1, do đó sau khi đặt $\dfrac{k-1}{3}=t$ *ta không cần thêm một ẩn phụ nào nữa*

- Trong cách 3, nhờ đặt được thừa số chung mà hệ số của k của phần phân số bằng -1, do đó sau khi đặt $\dfrac{1-k}{3}=t$ *cũng không cần dùng thêm thừa số phụ nào nữa.*

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Hướng dẫn giải

Ta có: $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)\ (2)$

Từ (2) suy ra $6(x^2 - 4) \vdots 5$, mặt khác $(6,5) = 1 \Rightarrow (x^2 - 4) \vdots 5 \ \Rightarrow x^2 = 5t + 4\ (t \in N)$

Thay $x^2 - 4 = 5t$ vào (2) ta có: $30t = 5(10 - y^2) \Leftrightarrow y^2 = 10 - 6t$

Ta có: $x^2 > 0, y^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 4 > 0 \\ 10t - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\dfrac{4}{5} \\ t < \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5} < t < \dfrac{5}{3}, t \in N$ .Suy ra: $t \in \{0;1\}$

Với $t = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $t = 1$ ta có: $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$. Mặt khác x, y nguyên dương nên x = 3, y = 2.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (3, 2).

🗁 **Dạng 2: Phương pháp đưa về phương trình ước số**

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta tìm cách đưa phương trình đã cho thành phương trình có một vế là tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là hằng số nguyên.

Thực chất là biến đổi phương trình về dạng: $A(x;y).B(x;y) = c$ *trong đó* $A(x;y), B(x;y)$ *là các biểu thức nguyên, c là một số nguyên.*

Xét các trường hợp $A(x;y), B(x;y)$ *theo ước của c.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy - x + y = 3$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & 2xy - x + y = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 4xy - 2x + 2y = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(2y - 1) + (2y - 1) = 6 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & (2y - 1)(2x + 1) = 5. \end{aligned}$$

Ta gọi phương trình trên là ***phương trình ước số***: vế trái là một tích các thừa số nguyên, vế trái là hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên 2x + 1 và 2y – 1 là các số nguyên và là ước của 5.

(2x + 1) và (2y - 1) là các ước số của 5 nên ta có:

2x + 1	1	-1	5	-5

2y - 1	5	-5	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (3, 0); (-1, -2); (2, 1); (-3, 0).

Kinh nghiệm giải: *Để đưa vế trái* $2xy-x+y$ *về phương trình dạng tích, ta biến đổi thành* $x\left(2y-1\right)+\frac{1}{2}\left(2y-1\right)$ *bằng cách nhân 2 vế của phương trình với 2 rồi bớt 1 ca 1 để đưa về phương trình ước số. Luyện tập kinh nghiệm này bằng ví dụ 2 sau đây.*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x-3y=2xy-11$.

Hướng dẫn giải

$$5x-3y=2xy-11\Rightarrow x(5-2y)+\frac{3}{2}(5-2y)-\frac{15}{2}+11=0$$

$$\Leftrightarrow\left(5-2y\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{-7}{2}\Leftrightarrow\left(2y-5\right).\frac{2x+3}{2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(2y-5\right)\left(2x+3\right)=7\qquad(*)$$

(2x + 3) và (2y - 5) là các ước số của 7 nên ta có:

2x + 3	1	-1	7	-7
2y - 5	7	-7	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (-1, 6); (-2, -1); (2, 3); (-5, 2).

Nhận xét: *Đối với nhiều phương trình nghiệm nguyên việc đưa phương trình đã cho thành phương trình có một vế là tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là hằng số nguyên là rất khó khăn ta có thể áp dụng một số thủ thuật được thể hiện trong ví dụ 3 sau đây.*

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-2xy+3y-5x+7=0$.

Hướng dẫn giải

$$x^2-2xy+3y-5x+7=0\Leftrightarrow x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}+\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2+\frac{-4y^2-20y-25+12y+28}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4y^2+8y-3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4(y+1)^2-7}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-(y+1)^2=\frac{-7}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2x-2y-5\right)^2}{4}-(y+1)^2=\frac{-7}{4}\Leftrightarrow\left(2x-2y-5\right)^2-4\left(y+1\right)^2=-7$$

$$\Leftrightarrow\left(2x-2y-5-2y-2\right)\left(2x-2y-5+2y+2\right)=-7\Leftrightarrow\left(2x-4y-7\right)\left(2x-3\right)=-7\qquad(*)$$

Vì x, y nguyên nên từ PT(*) ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases}2x-4y-7=1\\2x-3=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-4y-7=-7\\2x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x-4y-7=-1\\2x-3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-4y-7=7\\2x-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Nhận xét: *Trong cách giải trên ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tam thức bậc hai* $\left(ax^2+bxy+cy^2, ax^2+bx+c\right)$*: trước hết ta chọn một biến để đưa về hằng đẳng thức (Bình phương của một tổng, hoặc một hiệu) chứa biến đó: ở đây ta chọn biến x là :* $x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}$, *phần còn lại của đa thức ta lại làm như vậy với biến y:* $\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=-\frac{4y^2+8y-3}{4}=-\frac{4(y+1)^2-7}{4}$.

Các bạn có thể tư duy tìm hướng giải như sau:

$x^2-2xy+3y-5x+7=0\Leftrightarrow x^2-(2y+5)x+3y+7+a=a\ \ (*)$

Xét phương trình: $x^2-(2y+5)x+3y+7+a=0\ (**)$

Với a là số chưa biết cần thêm vào, xác định a như sau:

$$\begin{aligned}\Delta_{(**)}&=(2y+5)^2-4(3y+7+a)\\&=4y^2+20y+25-12y-28-4a\\&=4y^2+8y-3-4a\end{aligned}$$

Chọn a để $\Delta_{(**)}$ là số chính phương nên $-3-4a=4\Rightarrow a=\frac{-7}{4}$ .khi đó :

$\Delta_{(**)}=4(x+1)^2\Rightarrow x_1=\frac{2y+5-2(x+1)}{2}=\frac{3}{2}, x_2=\frac{2y+5+2(x+1)}{2}=\frac{4y+7}{2}$

Vậy: $(*)\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4y+7}{2}\right)=-\frac{7}{4}\Leftrightarrow(2x-3)(2x-4y-7)=-7$

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases}2x-4y-7=1\\2x-3=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-4y-7=-7\\2x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x-4y-7=-1\\2x-3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-4y-7=7\\2x-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+12x=y^2$ (1)

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với :

$x^2+12x=y^2 \Leftrightarrow (x+6)^2-y^2=36 \Leftrightarrow (x+y+6)(x-y+6)=36$

Suy ra (x + y + 6) và (x – y + 6) là ước của 36.

Mà 36 có 18 ước nên: $(x+y+6)\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm9;\pm18;\pm36\}$

Kết quả ta tìm được các nghiệm nguyên là: $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

Nhận xét: *Phương pháp đưa về phương trình ước số có 2 bước: Phân tích thành ước và xét các trường hợp. Hai bước này có thể không khó nhưng trong trường hợp hằng số phải xét có nhiều ước số chúng ta cần dựa vào tính chất của biến (ví dụ: tính chẵn lẻ, số dư từng vế) để giảm số trường hợp cần xét.*

*Trong trường hợp **ví dụ 4** ta có thể nhận xét như sau:*

Do y có số mũ chẵn nên nếu y là nghiệm thì – y cũng là nghiệm nên ta giả sử $y\ge 0$ *. Khi đó* $x+6-y\le x+6+y$ *ta giảm được 8 trường hợp*

$\begin{cases}x+6+y=9\\x+6-y=4\end{cases}$, $\begin{cases}x+6+y=-9\\x+6-y=-4\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-1\\x+y-6=-36\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+6=36\\x-y+6=1\end{cases}$, $\begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$

$\begin{cases}x+6+y=-3\\x+6-y=-12\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=12\\x+y-6=3\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$

Bây giờ có 10 trường hợp, ta lại thấy $(x+6+y)+(x+6-y)=2y$ *nên* $(x+6+y),(x+6-y)$ *có cùng tính chẵn lẻ.Do đó ta còn 4 trường hợp:*

$\begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$

Tiếp tục xét hai phương trình $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$ *hai phương trình này đều có nghiệm y = 0 ta có xét y = 0 ngay từ đầu. Ta có phương trình ban đầu:* $x(x+12)=y^2$ *, xét hai khả năng:*

Nếu y = 0 thì x = 0 hoặc x = - 12

Nếu $y\ne 0$ *thì* $x+6-y<x+6+y$ *áp dụng hai nhận xét trên ta chỉ phải xét 2 trường hợp*

$\begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$

Giải và kết luận phương trình có 4 nghiệm $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

🗁 Dạng 3: Phương pháp tách ra các giá trị nguyên.

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán phương trình nghiệm nguyên ta tách phương trình ban đầu thành các phần có giá trị nguyên để dễ dàng đánh giá tìm ra nghiệm, đa số các bài toán sử dụng phương pháp này thường rút một ẩn (có bậc nhất) theo ẩn còn lại.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $xy-2y-3y+1=0$

Hướng dẫn giải

Ta có $xy-2y-3y+1=0 \Rightarrow y\left(x-3\right)=2x-1.$

Ta thấy $x=3$ không là nghiệm nên $x\neq 3$ do đó: $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$

Tách ra ở phân thức $\dfrac{2x-1}{x-3}$ các giá trị nguyên:

$$y=\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2\left(x-3\right)+5}{x-3}=2+\frac{5}{x-3}$$

Do y là số nguyên nên $\dfrac{5}{x-3}$ cũng là số nguyên, do đó (x – 3) là ước của 5.

+) x – 3 = 1 thì x = 4, y = 2 + 5 = 7

+) x -3 = -1 thì x = 2, y = 2 – 5 = -3 (loại)

+) x – 3 = 5 thì x = 8, y = 2 +1 = 3

+) x – 3 = -5 thì x = -2 (loại)

Vậy nghiệm (x, y) là (4, 7) , (8, 3).

Bài toán 2. Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình: $x^2+xy-2y-x-5=0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: trong phương trình này ẩn y có bậc nhất nên rút y theo x.

Ta có: $x^2+xy-2y-x-5=0 \Leftrightarrow y\left(x-2\right)=-x^2+x+5 \quad \left(*\right)$

Với x = 2 thì: $\left(*\right)\Leftrightarrow 0=3$ (vô lý)

Với $x\neq 2$ ta có: $\left(*\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-2}+\dfrac{3}{x-2}=-x-1+\dfrac{3}{x-2}$

Để y nguyên thì $3\,\vdots\left(x-2\right)$. Vậy (x – 2) là ước của 3 do đó:

$\left(x-2\right)\in\left\{-3,-1,1,3\right\}\Rightarrow x\in\left\{-1,1,3,5\right\}$

Vậy phương trình có nghiệm: (x, y) = (3; - 1) ; (5; -5); (1; -5); (-1; - 1)

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $6x+5y+18=2xy$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x=\frac{-5y-18}{6-2y}\Leftrightarrow 2x=\frac{-10y-36}{6-2y}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{-66+5(6-2y)}{6-2y}=\frac{-66}{6-2y}+5\Leftrightarrow 2x=\frac{-33}{3-y}+5$$

Như vậy x muốn nguyên dương thì (3 – y) phải là ước của – 33. Hay $(3-y)\in\{\pm1;\pm3;\pm11;\pm33\}$. Lại do $y\ge1\Rightarrow 3-y\le2\Rightarrow y\in\{\pm1;-3;-11;-33\}$. Ta có bảng sau:

3 - y	-1	1	-3	-11	-33
y	4	2	6	14	36
x	19	- 14	8	4	3

Thử lại ta được các cặp thỏa mãn là (19, 4); (8, 6); (4, 14); (3, 36).

Nhận xét: *- Dễ xác định được phương pháp để giải bài toán này, khi biểu diễn x theo y được* $x=\frac{-5y-18}{6-2y}$ *. Ta thấy biểu thức này khó phân tích như 2 ví dụ trên, tuy nhiên để ý ta thấy tử số là – 5y mẫu số là -2y, do đó mạnh dạn nhân 2 vào tử số để xuất hiện 2y giống mẫu.*

- Bài toán có thể giải bằng phương pháp đưa về phương trình ước số. Do ở bài toán trên đã nhân 2 ở x để biến đổi, do đó phải có bước thử lại xem x, y có thỏa mãn phương trình đã cho hay không.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy\Leftrightarrow 2y^2(x-1)-x(x-1)-y(x-1)+1=0$ (1)

Nhận thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình (1).

Chia cả 2 vế của (1) cho (x – 1) ta được: $2y^2-x-y+\frac{1}{x-1}=0$ (2)

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x-1}$ nguyên nên $x-1\in\{1;-1\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$

Thay x = 2 và x = 0 vào phương trình và để ý đến y nguyên ta được y = 1.

Vập phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2; 1) và (0; 1).

II. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẴN LẺ CỦA ẨN HOẶC XÉT SỐ DƯ TỪNG VẾ

*** Cơ sở phương pháp:**

Chúng ta dựa vào tính chẵn lẻ của ẩn hoặc xét số dư hai vế của phương trình nghiệm nguyên với một số nguyên nào đó rồi dùng luận luận để giải bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

🗁 **Dạng 1: Sử dụng tính chẵn lẻ**

Bài toán 1. Tìm x, y nguyên tố thoả mãn $y^2 - 2x^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y^2 - 2x^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow y$ là số lẻ

Đặt $y = 2k + 1$ (với k nguyên).Ta có $(2k + 1)^2 = 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 2k^2 + 2k \Rightarrow x$ chẵn , mà x nguyên tố $\Rightarrow x = 2, y = 3$

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (2, 3).

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\left(2x+5y+1\right)\left(2^{|x|}+y+x^2+x\right)=105$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(2x+5y+1\right)\left(2^{|x|}+y+x^2+x\right)=105$

Ta thấy 105 lẻ $\Rightarrow 2x + 5y + 1$ lẻ $\Rightarrow 5y$ chẵn $\Rightarrow$ y chẵn, $2^{|x|} + y + x^2 + x = 2^{|x|} + y + x(x+1)$ lẻ có $x(x+1)$ chẵn, y chẵn $\Rightarrow 2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow 2^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$

Thay x = 0 vào phương trình ta được

$(5y + 1)(y + 1) = 105 \Leftrightarrow 5y^2 + 6y - 104 = 0 \Rightarrow y = 4$ hoặc $y = -\dfrac{26}{5}$ (loại)

Thử lại ta có x = 0; y = 4 là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 4).

🗁 **Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và xét số dư từng vế**

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Hướng dẫn giải

a) Do x là số nguyên nên $x = 2k$ hoặc $x = 2k+1$ $(k \in Z)$ do đó $x^2 = 4k^2 \vee x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

vì thế x^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0. Tương tự ta cũng có y^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0

Suy ra: $x^2 - y^2$ chia cho 4 luôn dư 1 hoặc 0 hoặc 3. Mà 1998 chia cho 4 dư 2 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Như chứng minh câu a ta có: x^2, y^2 chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 hoặc 3. Mà 1999 chia cho 4 dư 3 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Chú ý: *Chúng ta cần lưu ý kết quả ở bài toán này:*

*) $x^2 - y^2$ *chia cho 4 không dư 2*

*) $x^2 + y^2$ *chia cho 4 không dư 3*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$

Hướng dẫn giải

Ta có: $9x + 2 = y^2 + y \Leftrightarrow 9x + 2 = y(y+1)$

Ta thấy vế trái phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia cho 3 dư 2

Do đó chỉ có thể $y = 3k+1$ và $y = 3k+2$ $(k \in Z)$

Khi đó: $9x + 2 = (3k+1)(3k+2) \Leftrightarrow 9x = 9k^2 + 9k \Leftrightarrow x = k(k+1)$

Thử lại: $x = k(k+1), y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x,y) = (k(k+1), 3k+1)$ với $k \in Z$

Bài toán 3. Tìm x, y là số tự nhiên thoả mãn $x^2 + 3^y = 3026$

Hướng dẫn giải

Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 3026 \Rightarrow x^2 = 3025$. Mà $x \in N \Rightarrow x = 55$

Xét $y > 0 \Rightarrow 3^y$ chia hết cho 3, x^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1$\Rightarrow x^2 + 3^y$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà 3026 chia cho 3 dư 2 (loại)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) = (55,0)

Bài toán 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 7y = 51$ không có nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Xét $x = 7k\,(k \in Z)$ thì $x^3 \vdots 7$.

Xét $x = 7k \pm 1 \left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 2 \left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 3 \left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Do đó vế trái phương trình chia cho 7 dư 0 hoặc 1 hoặc 6 còn vế phải của phương trình chia 7 dư 2. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 5y^2 = 27$

Hướng dẫn giải

Do x là số nguyên nên ta có thể biểu diễn x dưới dạng: $x = 5k$ hoặc $x = 5k \pm 1$ hoặc $x = 5k \pm 2$ với $k \in Z$

- Xét x = 5k thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k\right)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 - y^2\right) = 27$

Điều này là vô lý vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x = 5k \pm 1$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k \pm 1\right)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 \pm 2k - y^2\right) = 23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x = 5k \pm 2$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k \pm 2\right)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 \pm 4k - y^2\right) = 23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

🗁 Dạng 1: Sử dụng bất đẳng thức cổ điển

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán ta thường sử dụng bất đẳng thức để chứng minh một vế không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho phương trình có nghiệm thì dấu bằng của bất đẳng thức phải xảy ra đó là nghiệm của phương trình.

Một số bất đẳng thức Cổ điển thường được sử dụng như:

1. Bất đẳng thức Cauchy (tên quốc tế là AM – GM)

Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *là các số thực không âm thì:* $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt{a_1.a_2.a_3 \ldots a_n}$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ *ta có* $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2) \ge (a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n)^2$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực k $(k \ne 0)$ *sao cho* $a_i = kb_i$ *với i = 1, 2, 3,…, n.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $(x^2+1)(x^2+y^2) = 4x^2y$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2 + 1 \ge 2x$ Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

$x^2 + y^2 \ge 2xy$ Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Do x, y dương nên nhân 2 vế của bất đẳng thức trên ta được $(x^2+1)(x^2+y^2) \ge 4x^2y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 = 15x^2z + 3x^2y^2z \Leftrightarrow x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 = 3x^2z(y^2+5)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 \ge 3x^2z(y^2+5)$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = y^2 + 5 = z$

Từ $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 5$ giải ra được nghiệm (x, y, z) = (3, 2, 9).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức ***Bunhiacopxki*** ta có: $(1+1+1)(x^2+y^2+1) \ge (x+y+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy nguyệm nguyên của phương trình là (x, y) = (1, 1).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Hướng dẫn giải

Với $|x|\ge 2$ và $|y|\ge 2$ ta có:

$$\begin{cases} x^2y^2\ge 4x^2 \\ x^2y^2\ge 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2\ge 2\left(x^2+y^2\right)=x^2+y^2+x^2+y^2 \overset{AM-GM}{\ge} x^2+y^2+2|xy|>x^2+y^2+xy.$$

Vậy $|x|\le 2$ hoặc $|y|\le 2$

Nếu x = -2 hoặc x = 2 thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Thử x = -1, 1, 0 ta thấy phương trình có 3 nghiệm (0;0), (1; - 1), (-1; 1).

Dạng 2: Sắp xếp thứ tự các ẩn

*** Cơ sở phương pháp:**

Khi phương trình đối xứng với các ẩn $x, y, z, \ldots$, ta thường giả sử $x\le y\le z\le\ldots$ để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2xyz=x+y+z$

Hướng dẫn giải

Giả sử $x\le y\le z$. Ta có: $2xyz=x+y+z\le 3z$

Chia 2 vế cho z dương ta được $2xy\le 3\Rightarrow xy\le 1\Rightarrow xy=1$

Do đó x = y = 1. Thay vào phương trình ban đầu ta được: 2z = z + 2 hay z = 2.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (x, y, z) = (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Hướng dẫn giải

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử: $x\le y\le z$

Khi đó: $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3\Rightarrow x\in\{1;2;3\}$ $\left(\text{do } x\in Z^+\right)$

Với x = 1 phương trình đã cho vô nghiệm.

Với x = 2 ta có: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{2}+\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$. Mặt khác $y\ge x=2\Rightarrow y\in\{2,3,4\}$

+) y = 2 thì phương trình vô nghiệm.

+) y = 3 thì z = 6

+) y = 4 thì z = 4

Với x = 3 ta có: $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{3}+\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 3$. Mặt khác $y\ge x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow z=3$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành: $xyz=x+y$.

Do đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x\le y$. Ta có

$xyz=x+y\le y+y=2y\Rightarrow xz\le 2.$

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau: x = 1, z = 1; x = 2, z = 1; x =1, z = 2

Ta suy ra nghiệm (x, y, z) là (1, 1, 2) và (2, 2, 1).

Nhận xét: *Ở bài toán này do vai trò của x, y, z là không bình đẳng nên ta không có thể giải sử* $x\le y\le z$ *ta chỉ có thể giả sử* $x\le y$

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$5(x+y+z+t)+10=2xyzt$$

Hướng dẫn giải

Ta giả sử $x\ge y\ge z\ge t\ge 1$

Ta có: $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{5}{yzt}+\frac{5}{xzt}+\frac{5}{xyt}+\frac{5}{xyz}+\frac{10}{xyzt}\le\frac{30}{t^3}\Rightarrow t^3\le 15\Rightarrow t=1\vee t=2$$

Với t = 1 ta có:

$$5(x+y+z+1)+10=2xyz$$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{15}{xyz}\le\frac{30}{z^2}\Rightarrow z^2\le 15\Rightarrow z=\{1;2;3\}$$

Nếu z =1 ta có $5(x+y)+20=2xy\Leftrightarrow(2x-5)(2y-5)=65\Rightarrow\begin{cases}x=35\\y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=9\\y=5\end{cases}$

Ta được nghiệm (35, 3, 1, 1) ; (9, 5, 1, 1) và các hoán vị của chúng.

Với z = 2, z = 3 phương trình không có nghiệm nguyên.

Với t = 2 ta có:

$5(x+y+z+1)+20=4xyz$

$\Leftrightarrow 4=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{20}{xyz}\le\frac{35}{z^2}\Rightarrow z^2\le\frac{35}{4}\le 9(z\ge t\ge 2)\Rightarrow(8x-5)(8y-5)=265$

Do $x \ge y \ge z \ge 2$ nên $8x - 5 \ge 8y - 5 \ge 11$

$\Rightarrow (8x - 5)(8y - 5) = 265$ vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là bộ (x, y, z)= (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị.

🗁 Dạng 3: Chỉ ra nghiệm nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng: chỉ ra một hoặc vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $3^x+4^x=5^x$

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của phương trình cho 5^x ta được: $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$

Thử thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình trên.

Với x = 2 thì VT = VP = 1 thỏa mãn bài toán.

Với $x\ge 3\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x\le\left(\frac{3}{5}\right)^2$ và $\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $2^x+3^x=35$

Hướng dẫn giải

Thử thấy x = 0; x = 1; x = 2 không thỏa mãn $2^x+3^x=35$

Với x = 3 thì $2^3+3^3=35$ (đúng)

Với $x \ge 3$ thì $2^3+3^3>35$

Vậy x = 3 là nghiệm của phương trình.

🗁 Dạng 4: Sử dụng điều kiện $\Delta\ge 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta viết phương trình *f(x, y) = 0* dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với x khi đó y là tham số. Điều kiện để phương trình có nghiệm nguyên là $\Delta\ge 0$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-2x+y=9$.

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$$x^2-2x+\left(y^2+y-9\right)=0$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì :

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1-\left(y^2+y-9\right)\ge 0\Leftrightarrow y^2+y-10\le 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+4y-40\le 0\Leftrightarrow \left(2y+1\right)^2\le 41$$

Do đó: $\left(2y+1\right)^2\in\left\{1;9;25\right\}$. Ta có:

2y+1	1	-1	3	-3	5	-5
2y	0	-2	2	-4	4	-6
y	0	-1	1	-2	2	-3
x	Loại	Loại	Loại	Loại	3 và -1	3 và -1

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (3, 2); (-1, 2); (3, -3); (-1, -3).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2+2y^2=2xy+2x+3y\quad(*)$

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$$x^2-2\left(y+1\right)x+2y^2-3y=0$$

Ta có: $\Delta'=\left(y+1\right)^2-\left(2y^2-3y\right)=y^2+2y+1-2y^2+3y=-y^2+5y+1$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì:

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow -y^2+5y+1\ge 0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{29}}{2}\le y-\frac{5}{2}\le\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5-\sqrt{29}}{2}\le y\le\frac{5+\sqrt{29}}{2}\Leftrightarrow\frac{5-6}{2}<y<\frac{5+6}{2}$$

Vì y nguyên nên $y\in\left\{0,1,2,3,4,5\right\}$ thay vào phương trình ta tính được giá trị của x.

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 0); (0, 2).

Nhận xét: *Ở ví dụ này mình đã cố tình tính* Δ' *cho các bạn thấy rằng khi tính* Δ *hoặc* Δ' *có dạng tam thức bậc 2 :* $f(x) = ay^2 + by + c$ *với a < 0 ta mới áp dụng phương pháp này, nếu a > 0 thì chúng ta áp dụng phương pháp đưa về phương trình ước số.*

IV. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

🗁 Dạng 1: Dùng tính chất về chia hết của số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

- Số chính phương không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8;
- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2
- Số chính phương chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1;
- Số chính phương chia 4 có số dư là 0 hoặc 1;
- Số chính phương chia cho 8 có số dư là 0, 1 hoặc 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 5 = y(y+1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned}&9x + 5 = y(y+1)\\ \Leftrightarrow\ &36x + 20 = 4y^2 + 4y\\ \Leftrightarrow\ &36x + 21 = 4y^2 + 4y + 1\\ \Leftrightarrow\ &3(12x+7) = (2y+1)^2.\end{aligned}$$

Số chính phương chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9, ta lại có 12x + 7 không chia hết cho 3 nên 3(12x + 7) không chia hết cho 9. Do đó phương trình vô nghiệm.

Cách khác:

$$\begin{aligned}&9x + 5 = y(y+1)\\ \Leftrightarrow\ &y^2 + y - 9x - 5 = 0\\ &\Delta = 1 + 4(9x+5) = 36x + 21 = 3(12x+7)\end{aligned}$$

Ta có Δ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương do đó không tồn tại y nguyên. Vậy phương trình vô nghiệm.

🗁 Dạng 2: Biến đổi phương trình về dạng $a_1A_1^2 + a_2A_2^2 + \ldots + a_nA_n^2 = k$**, trong đó** $A_i (i = 1,\ldots,n)$ **là các đa thức hệ số nguyên,** a_i **là số nguyên dương,** k **là số tự nhiên**

*** Cơ sở phương pháp:**

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a+b)^2$, đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các a_i, A_i để phân tích thành $k = a_1k_1^2 + a_2k_2^2 + ... + a_nk_n^2$ (với $k_i \in \mathbb{Z}$), dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1^2 = k_1^2 \\ A_2^2 = k_2^2 \\ \quad ... \\ A_n^2 = k_n^2 \end{cases}$$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - x - y = 8$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$x^2 + y^2 - x - y = 8 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x - 1\right) + \left(4y^2 - 4y + 1\right) = 34 \Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2 + \left(2y-1\right)^2 = 34$

$\Leftrightarrow \left|2x-1\right|^2 + \left|2y-1\right|^2 = 3^2 + 5^2$

Ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành hai số chính phương là 3^2 và 5^2.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(2x-1\right)^2 = 3^2 \\ \left(2y-1\right)^2 = 5^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(2x-1\right)^2 = 5^2 \\ \left(2y-1\right)^2 = 3^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|2x-1\right| = 3 \\ \left|2y-1\right| = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} \left|2x-1\right| = 5 \\ \left|2y-1\right| = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Giải ra ta được 4 nghiệm (x, y) = (2, 3); (-1, -2); (-2; -1); (3, 2).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x-y)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x-y) \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x(2y+1) + (2y+1)^2 - (2y+1)^2 + 5y^2 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2y-1)^2 + (y-1)^2 = 2 (*)$

Xét phương trình (*) ta có: $\left(x-2y-1\right)^2 \ge 0 \;\; \forall x, y \Rightarrow \left(y-1\right)^2 \le 2$

Mà x nguyên nên $\left(y-1\right)^2 \in \left\{0,1\right\}$

* Với $\left(y-1\right)^2 = 0$ thì $\left(x-2y-1\right)^2 = 2$ (loại)

* Với $(y-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

- $y=2 \Rightarrow (x-4-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=4 \end{array}\right.$

- $y=0 \Rightarrow (x-0-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(x,y)=(6,2);(4,2);(2,0);(0,0)$.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2-2xy+y^2=17$ **.**

Hướng dẫn giải

Ta có $5x^2-2xy+y^2=17 \Leftrightarrow (x-y)^2+4x^2=17 \Leftrightarrow (x-y)^2=17-4x^2$ (*)

Xét phương trình (*) ta có $(x-y)^2 \geq 0, \forall x,y \Rightarrow 17-4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \dfrac{17}{4}$

Mà x là số nguyên nên $x^2 \in \{0;1;4\}$

- Với $x^2=0 \Rightarrow (x-y)^2=17$ (loại).

- Với $x^2=1 \Rightarrow (x-y)^2=13$ (loại)

- Với $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$,

Với $x=2 \Rightarrow (2-y)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-y=1 \\ 2-y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$

Với $x=-2 \Rightarrow (2+y)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+y=1 \\ 2+y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: (2; 1), (2; 3), (-2; -1); (-2; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+y+xy=x^2+y^2$

Hướng dẫn giải

Biến đổi: $x+y+xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2.$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

Trường hợp: x – 1 = 0 ta được (1; 0), (1; 2)

Trường hợp: y – 1 = 0 ta được: (0; 1), (2; 1)

Trường hợp x – y = 0 ta được: (0; 0), (2; 2)

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (1; 0), (1; 2), (0; 1), (2; 1), (0;0), (2; 2).

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+4x=19-3y^2$.

Hướng dẫn giải

$$2x^2+4x=19-3y^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y)^2 \qquad (*)$$

Ta thấy $3(7-y^2)\,⋮\,2 \Rightarrow 7-y^2\,⋮\,2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có $7-y^2\ge 0$ nên chỉ có thể $y^2=1$

Khi đó (*) có dạng $2(x+1)^2=18$.

Ta được: $x+1=\pm 3$ do đó $x_1=2; x_2=-4$.

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho

🗁 Dạng 3: Xét các số chính phương liên tiếp

*** Cơ sở phương pháp:**

Phương pháp này dựa trên nhận xét sau:

1. Không tồn tại $n\in Z$ *thỏa mãn:* $a^2<n^2<(a+1)^2$ *với* $a\in Z$

2. Nếu $a^2<n^2<(a+2)^2$ *với* $a,n\in Z$ *thì n = a + 1. Tương tự với lũy thừa bậc 3*

3. Nếu $x(x+1)...(x+n)<y(y+1)...(y+n)<(x+a)(x+a+1)...(x+a+n)$

Thì $y(y+1)...(y+n)=(x+i)(x+i+1)...(x+i+n)$ *với* $i\in\{1,2,...,a-1\}$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1+x+x^2+x^3=y^3 \qquad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\ 5x^2+11x+7=5\left(x+\frac{11}{10}\right)^2+\frac{19}{20}>0$$

Nên

$$(1+x+x^2+x^3)-(x^2+x+1)<1+x+x^2+x^3<(1+x+x^2+x^3)+(5x^2+11x+7).$$

Do đó: $x^3<y^3<(x+2)^3\Rightarrow y^3=(x+1)^3$.

Kết hợp với (1) ta có: $(x+1)^3=1+x+x^2+x^3\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Nghiệm của phương trình là: (0;1) và (-1;0).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0 \quad (2)$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \ (3)$

Ta có: $y^2 \ge 0; 5y^2 + 2 > 0$ nên

$(y^3 + 2y^2 + 3y + 1) - (5y^2 + 2) < y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \le (y^3 + 2y^2 + 3y + 1) + y^2$.

Do đó: $(y-1)^3 < x^3 \le (y+1)^3 \Rightarrow x^3 = y^3$ hoặc $x^3 = (y+1)^3$.

Nếu $x^3 = y^3$ kết hợp với (3) ta có: $2y^2 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = -1$.

Nếu $x^3 = (y+1)^3$. Phối hợp với (3) ta có $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, lúc đó $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (-1; -1) và (1; 0).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng

$x^2 + x + 1 = y^2(y+1)^2 + 2y(y+1) + 1 = (y^2 + y + 1)^2 = k^2, k \in Z \quad (1)$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2 \Rightarrow x^2 < k^2 < (x+1)^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow y^2 + y + 1 = \pm 1$

Ta có các nghiệm nguyên của phương trình là (0; 0), (0; -1), (-1; 0); (-1; -1).

- Nếu $x < -1 \Rightarrow (x+1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2 \Rightarrow (x+1)^2 < k^2 < x^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

Bài toán 4. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0 \quad (6)$$

Hướng dẫn giải

$(6) \Leftrightarrow y(y-1) = x^4 + x^2 + 10 \quad (7)$

Ta có: $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 10 < (x^4 + x^2 + 10) + (6x^2 + 2)$.

Do đó: $x^2(x^2+1) < y(y-1) < (x^2+3)(x^2+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y(x-1)=(x^2+1)(x^2+2) \\ y(y-1)=(x^2+2)(x^2+3) \end{array}\right.$

Kết hợp với (7) ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=1 \end{array}\right.$

Từ đó: $x=\pm 2,\ x=\pm 1$

Do đó ta có thể tìm được nghiệm của phương trình (6)

🗁 **Dạng 4: Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Với phương trình nghiệm nguyên có dạng $f(x,y)=0$ có thể viết dưới dạng phương trình bậc 2 đối với một trong 2 ẩn chẳng hạn ẩn x, ngoài điều kiện $\Delta \ge 0$ để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương. Vận dụng điều này ta có thể giải được bài toán.

Chú ý: Δ là số chính phương chỉ là điều kiện cần nhưng chưa đủ để phương trình có nghiệm nguyên, do đó sau khi tìm được giá trị cần thử lại vào phương trình ban đầu.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

$\Leftrightarrow y^2+2(2x+1)y+3x^2+4x+5=0 \qquad (1)$

Coi phương trình (1) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$\Delta' = (2x+1)^2-(3x^2+4x+5) = 4x^2+4x+1-3x^2-4x-5 = x^2-4$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ' phải là số chính phương hay $\Delta' = x^2-4=n^2$ với $n \in N$

$(x-n)(x+n)=4$ giải ra ta được x = 2 hoặc x = -2.

Với x = 2 thì y = 3

Với x = -2 thì y = -5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (2, 3) ; (-2, -5).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y^2-xy=x^2+2y^2.\ (1)$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho viết lại: $\left(x^2-2\right)y^2-xy-x^2=0 \ (2)$

Do x nguyên nên $\left(x^2-2\right)\neq 0$ coi phương trình (2) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$$\Delta = x^2+4x^2\left(x^2-2\right)=x^2\left(4x^2-7\right).$$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ phải là số chính phương.

-Xét x = 0 thì từ (1) suy ra y = 0.

-Xét $x\neq 0$ thì $\left(4x^2-7\right)$ phải là số chính phương do đó $4x^2-7=m^2$ với m là số nguyên, ta có $\left(2x-m\right)\left(2x+m\right)=7$ ta tìm được x = 2 hoặc x = -2

Với x = 2 thay vào (2) ta được: $y^2+y-2=0 \Rightarrow y\in\{1;-2\}$.

Với x = -2 thay vào (2) ta được: $y^2-y-2=0 \Rightarrow y\in\{-1;2\}$.

Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 1); (2, -2); (-2, -1); (-2, 2).

🗁 **Dạng 5: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0**

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử a(a + 1) = k² (1) với $a\in Z, k\in N$.

Giải sử a ≠ 0, a + 1 ≠ 0 thì k² ≠ 0. Do k là số tự nhiên nên k > 0.

Từ (1) suy ra: a² + a = k²

$$\Rightarrow 4a^2+4a=4k^2 \Rightarrow 4a^2+4a+1=4k^2+1 \Rightarrow \left(2a+1\right)^2=4k^2+1 \qquad (2)$$

Do k > 0 nên $4k^2<4k^2+1<4k^2+4k+1 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\left(2k\right)^2<\left(2a+1\right)^2<\left(2k+1\right)^2$, vô lý

Vậy nếu a(a + 1) = k² thì tồn tại một trong hai số a, a + 1 bằng 0.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

Hướng dẫn giải

Thêm xy vào hai vế: $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2=xy\left(xy+1\right) \qquad (*)$

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0. Từ (1) có x² + y² = 0 nên x = y = 0

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = -1 nên (x, y) = (1; -1), (-1; 1)

Thử lại ba cặp số (0; 0), (1; -1), (-1; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2xy=5y+6\quad(1)$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=y^2+5y+6\Leftrightarrow(x+1)^2=(y+3)(y+2)$

Do (y + 3) và (y + 2) là 2 số nguyên liên tiếp mà có tích là một số chính phương nên một trong 2 số phải bằng 0.

Nếu y + 3 = 0 thì y = -3, x = -1.

Nếu y + 2 = 0 thì y = -2, x = -1

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x, y) = (-3, -1); (-2, -1).

🗁 **Dạng 6: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử ab = c² (1) với $a,b,c\in N^*,(a,b)=1.$

Giả sử trong a và b có một số, chẳng hạn a, chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ thì số b không chứa thừa số p nên c² chứa thừa số p với số mũ lẻ, trái với giả thiết c² là số chính phương.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy=z^2\quad(1)$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số (x_0,y_0,z_0) thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_0=dx_1,y_0=dy_1,z_0=dz_1$ thì (x_1,y_1,z_1) cũng là nghiệm của phương trình (1).

Với (x, y, z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà (x, y) = 1 nên $x = a^2$, $y = b^2$ với $a,b\in N^*$

Suy ra $z^2 = xy = (ab)^2$, do đó z = ab.

Như vậy: $\begin{cases}x=ta^2\\y=tb^2\\z=tab\end{cases}$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta công thức nghiệm nguyên dương của (1).

Bài toán 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$$

$<=> x^4-2x^3+6x^2-32x+40=4y^2-4y+1$

$<=> (x-2)^2(x^2+2x+10)=(2y-1)^2$

Vì y là số nguyên nên $2y-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2$ $(m\in N^*)$ suy ra $(x+1)^2+9=m^2 \Leftrightarrow (x+1-m)(x+1+m)=-9\ (*)$

Do $(x+1+m)>(m+1-m)$ nên

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1+m=9\\x+1-m=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1+m=1\\x+1-m=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x+1+m=3\\x+1-m=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\m=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\m=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\m=3\end{cases}\end{array}\right.$$

- $x=3\Rightarrow (2y-1)^2=25\Rightarrow y=3$ hoặc $y=-2$
- $x=-5\Rightarrow (2y-1)^2=1225\Rightarrow y=18$ hoặc $y=-17$
- $x=-1\Rightarrow (2y-1)^2=81\Rightarrow y=5$ hoặc $y=-4$

Vậy các bộ (x;y) nguyên thỏa yêu cầu bài toán là (3;3),(3;–2),(–5;18),(–5;–17),(–1;5),(–1;–4)

V. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

🗁 Dạng 1: Phương pháp lùi vô hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Dùng để chứng minh phương trình f(x, y, z, ...) ngoài nghiệm tầm thường $x=y=z=0$ thì không còn nghiệm nào khác. Phương pháp này diễn giải như sau:

Giải sử $(x_0,y_0,z_0,...)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...), nhờ phép biến đổi suy luận ta tìm được bộ nghiệm khác $(x_1,y_1,z_1,...)$ sao cho các nghiệm này có quan hệ với nghiệm ban đầu tỷ số k nào đó. Ví dụ $x_0=kx_1, y_0=ky_1, z_0=kz_1$;...

Rồi từ bộ $(x_2,y_2,z_2,...)$ có quan hệ với $(x_1,y_1,z_1,...)$ bởi tỷ số k nào đó.

Ví dụ $x_1=kx_2, y_1=ky_2, z_1=kz_2$. Quá trình này dẫn đến $x_0,y_0,z_0,..$ chia hết cho k^s vớ s là số tự nhiên tùy ý, điều này xảy ra khi x = y = z = 0. Chúng ta đi đến ví dụ cụ thể như sau:

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $x^2 + y^2 = 3z^2$

Hướng dẫn giải

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên. Xét (mod 3) ta chứng minh x_0, y_0 chia hết cho 3. Thật vậy rõ ràng vế phải chia hết cho 3 suy ra $(x_0 + y_0) \vdots 3$. Ta có $x_0^2 \equiv 0;1 \pmod 3; y_0^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ do đó $(x_0^2 + y_0^2) \vdots 3 \Rightarrow x_0^2 \vdots 3, y_0^2 \vdots 3$

Đặt $x_0 = 3x_1; y_0 = 3y_1; z_0 = 3z_1$ thế vào rút gọn ta được $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2 \Rightarrow z_0 \vdots 3$ $\Rightarrow z_0 = 3z_1$.

Thế $z_0 = 3z_1$ vào $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2$ và rút gọn ta được: $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. Do đó nếu (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình trên. Tiếp tục suy luận như trên dẫn đến $x_0, y_0, z_0 \vdots 3^k$ điều này xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Hướng dẫn giải

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên, ta có $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$ suy ra $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$ chẵn (do $2x_0y_0z_0$) nên có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Có 2 số lẻ một số chẵn không mất tính tổng quát giả sử x_0, y_0 lẻ, z_0 chẵn. Xét mod 4 ta có: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv 2 \pmod 4$ còn $2x_0y_0z_0 \vdots 4$ (do z_0 chẵn) $\Rightarrow$ Vô lý/

Trường hợp 2: Cả 3 số đề chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$ thế vào rút gọn ta có: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$ lập luận như trên ta được x_1, y_1, z_1 chẵn.

Quá trình tiếp tục đến $x_0, y_0, z_0 \vdots 2^k \left(k \in N^*\right)$ điều đó xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

🗁 Dạng 1: Nguyên tắc cực hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Về hình thức phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng về ý tưởng sử dụng thì như nhau, đều chứng minh phương trình ngoài nghiệm tầm thường không còn nghiệm nào khác.

Phương pháp bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0, y_0, z_0, ...)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...) với điều kiện rằng buộc với bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$. Ví dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + z_0 + \cdots$ nhỏ nhất . Bằng phép biến đổi số học ta tìm được bộ nghiệm khác $(x_1, y_1, z_1, ...)$ trái với điều kiện rằng buộc trên. Ví dụ khi tìm được bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1, y_1, z_1, ...)$ thỏa mãn $x_1 < x_0$ từ đó dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giải sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên với điều kiện x_0 nhỏ nhất.

Từ phương trình (1) suy ra t là số chẵn. Đặt $t = 2t_1$ thế vào phương trình (1) và rút gọn ta được: $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8t_1^4$ rõ ràng z_0 chẵn. Đặt $z_0 = 2z_1 \Rightarrow 2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4 \Rightarrow y_0$ chẵn . Đặt $y_0 = 2y_1 \Rightarrow x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4 \Rightarrow x_0$ chẵn.

Đặt $x_0 = 2x_1 \Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4 \Rightarrow (x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là nghiệm của phương trình trên và dễ thấy $x_1 < x_0$ (vô lý) do ta chọn x_0 nhỏ nhất. Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$.

Tổng kết: *Một bài toán nghiệm nguyên thường có thể giải bằng nhiều phương pháp, bạn đọc nên tìm nhiều cách giải cho một bài toán để rèn luyện kĩ năng của mình. Sau đây mình sẽ giải một bài toán bằng nhiều phương pháp để tổng kết.*

Bài toán. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \quad (1)$

Lời giải

Cách 1. *Đưa về phương trình ước số*

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+8xy+y^2=4x^2y^2+4xy$$
$$\Leftrightarrow (2x+2y)^2=(2xy+1)^2-1$$
$$\Leftrightarrow (2xy+1)^2-(2x+2y)^2=1$$
$$\Leftrightarrow (2xy+2x+2y+1)(2xy+1-2x-2y)=1$$

Sau đó giải phương trình ước số

Cách 2. *Dùng tính chất số chính phương và phương trình ước số*

$$4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2+3y^2=4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2=y^2(4x^2-3)$$

Nếu y = 0 thì x = 0 ta có (0, 0) là nghiệm của phương trình.

Nếu $y\neq 0$ thì $4x^2-3$ phải là số chính phương .

Ta có: $4x^2-3=k^2\ (k\in N)$ đưa về $(2x+k)(2x-k)=3$

Ta tìm được x = 1 và x = -1 từ đó tìm được y

Cách 3. *Đưa về phương trình bậc 2 đối với x*

$$(y^2-1)x^2-yx-y^2=0 \qquad (2)$$

Xét y = 1 thì (2) có dạng: -x – 1 = 0 được x = -1.

Xét y = -1 thì (2) có dạng x – 1 = 0 được x = 1.

Xét $y\neq \pm 1$ thì (2) là phương trình bậc hai đối với x có:

$$\Delta=y^2+4y^2(y^2-1)=y^2(4y^2-3).$$

Ta phải có Δ là số chính phương .

Nếu y = 0 thì từ (2) suy ra x = 0

Nếu $y\neq 0$ thì $4y^2-3$ phải là số chính phương.

Ta có $4y^2-3=k^2\ (k\in N)\Rightarrow (2y+k)(2y-k)=3$,ta được $y=\pm 1$ do đang xét $y=\pm 1$

Cách 4. *Sử dụng bất đẳngthức*

Không mất tính tổng quát giả sử $|x|\le|y|$, thế thì $x^2\le y^2, xy\le|xy|\le y^2$

Do đó: $x^2y^2=x^2+xy+y^2\le y^2+y^2+y^2\le 3y^2$

Nếu y = 0 thì x = 0.

Nếu $y\neq 0$ chia hai vế cho y^2 ta được $x^2\le 3$. Do đó $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Vậy phương trình có ba nghiệm (1, -1) , (-1, 1), (0, 0)

Cách 5. Sử dụng tính chất số chính phương

Thêm xy vào hai vế $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy \Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

Ta thấy xy và (xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

Xét xy = 0 từ (1) có $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$

Xét xy = -1 nên x = 1 , y = -1 hoặc x = -1, y = 1

Thử lại thấy phương trình có ba nghiệm (0, 0); (1, -1); (-1, 1).

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2xy-x-y=1$.

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+x+2009=y^2$.

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+5y^2+6z^2+2xy-4xz=10$.

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2-2xy+y-5x+2=0$.

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

Bài 6: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3-y^3=2xy+8$.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x+y+z)+3=2xyz$.

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $1+x+x^2+x^3+x^4=y^4$;

b) $1+x+x^2+x^3=y^3$.

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên $4x+9y=48$.

Bài 10: Tìm những số tự nhiên lẻ n để $26n+17$ là số chính phương.

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $x^4+y^4+z^4=2012$.

Bài 12: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+13y^2=z^2 \\ 13x^2+y^2=t^2. \end{cases}$

Bài 13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-3y^3-9z^3=0$.

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-4z=-4.$$

Bài 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2+1)(y^2+4)(z^2+9)=48xyz.$$

Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y^2+t^2=16 \\ xt+yz=12. \end{cases}$$

Bài 17: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

Bài 18: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$ (1)

Bài 19: Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình: $(x^2-y)(y^2-x)=(x-y)^3$

Bài 20: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}$

Bài 21: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ trong đó p là số nguyên tố.

Bài 22: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Bài 23: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x+15+10z=3$

Bài 24: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^2+y^2+z^2=1999 \quad (1)$$

Bài 25: Tìm nghiệm dương của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$.

Bài 26: Giải phương trình nghiệm nguyên: $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Bài 27: Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1$

(Chuyên Quảng Trung – Bình Phước 2015)

Bài 28: Tìm số tự nhiên x và số nguyên y sao cho $2^x+3=y^2$

Bài 29: Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

Bài 30: Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 31: Tìm số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức: $\begin{cases} x-y+z=2 \quad (1) \\ 2x^2-xy+x-2z=1 \quad (2) \end{cases}$

Bài 32: Tìm số thực a để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên:

$$x^2-ax+\left(a+2\right)=0 \qquad (1)$$

Bài 33: Tìm các số nguyên dương *x* và *y* thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833.$$

(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn: $2^x.x^2=9y^2+6y+16$

(Chuyên Hà Nội 2016 – 2017)

Bài 35: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2\left(x+y\right)+x+y=3+xy$

(Trích đề vào lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQGHN năm 2014)

Bài 36: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;\ y\right)$ thỏa mãn $\left(x+y\right)^3=\left(x-y-6\right)^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định 2014-2015)

Bài 37: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-y^2=xy+8$

(Trích đề vào Chuyên Bình Dương 2017)

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$.

(Trích đề vào Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Bài 39: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

(Trích đề vào Chuyên bạc Liêu 2017)

Bài 40: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^3 - 2x - 2 = x(x+1)^2$. $\quad (1)$

(Trích đề vào Chuyên Hưng Yên 2017)

Bài 41: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0 \quad (1)$

(Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 2017)

Bài 42: Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$

(Chuyên Bình Định 2015)

Bài 43: Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình $9x + 2 = y^2 + y$

(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

Bài 44: Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$

(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014)

Bài 45: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

(Chuyên Lam Sơn 2014)

Bài 46: 1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn

$$\begin{cases} p - 1 = 2x(x+2) \\ p^2 - 1 = 2y(y+2) \end{cases}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$

(Chuyên Hà Nội Amsterdam 2014)

Bài 47: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$

(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2015)

Bài 48: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$

(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ 2015)

Bài 49: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2015)

Bài 50: a) Chứng minh không tồn tại các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

b) Tìm tất cả các nguyện nguyên thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$

(Chuyên KHTN Hà Nội 2011)

Bài 51: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + 5y^2 = 41 + 2xy.$

(Chuyên Nam Định 2018-2019)

Bài 52: Tính tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^{2019} = y^{2019} - y^{1346} - y^{673} + 2$

(Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 53: Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!(1)$ với $x; y; z$ là ẩn và 9! Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1).

(Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Bài 54: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - xy + 2 = x + y$

(Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Bài 55: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đồng thời: $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 4(x+z) = 396$ và $x^2 + y^2 = 3z$.

(Chuyên Đăk Lăk 2018-2019)

Bài 56: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 4y^2 - 2xy - 3x - 3 = 0$

(Chuyên Đồng Nai 2018-2019)

Bài 57:Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - 2xy + y - 5x + 2 = 0$

(Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Bài 58: Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371$

(Chuyên Thái Nguyên 2018-2019)

Bài 59: Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 2y^2 = 1$

(Chuyên Bắc Ninh 2018-2019)

Bài 60: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$

(Chuyên Vĩnh Long 2018-2019)

Bài 61: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2 - x^2 - 6y^2 = 2xy.$

(Chuyên Quảng Nam 2018-2019)

Bài 62: Tìm tất cả cặp số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

(Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Bài 63: Tìm tất cả bộ số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $3\left(a^2 + b^2\right) - 7(a + b) = -4$

(Chuyên Bình Phước 2018-2019)

Bài 64: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

(Chuyên Toán Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 65: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy - 5x + 5y + 2 = 0$

(Chuyên Tin Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 66: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2 - (y-45)^2 + 2xy + x - 220y + 2024 = 0.$$

(Chuyên Hưng Yên 2019-2020)

Bài 67: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2 - n^2x + n + 1 = 0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

(Chuyên Bình Thuận 2019-2020)

Bài 68: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{85}{13}$

(Chuyên Phú Yên 2019-2020)

Bài 69: Tìm các số nguyên không âm a, b, n thỏa mãn: $\begin{cases} n^2 = a + b \\ n^3 + 2 = a^2 + b^2 \end{cases}$.

(Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Bài 70: Tìm tất cả cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $2020(x^2 + y^2) - 2019(2xy + 1) = 5$

(Chuyên Cần Thơ 2019-2020)

Bài 71: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2y - 1 = x^2 + 3y$.

(Chuyên Đăk Nông 2019-2020)

Bài 72: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(Chuyên Quảng Ngãi 2019-2020)

Bài 73: Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

(Chuyên Bình Phước 2019-2020)

Bài 74: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $(xy + x + y)(x^2 + y^2 + 1) = 30$.

(Chuyên Bắc Ninh 2019-2020)

Bài 75: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(2x + 5y + 1)\left(2^{|x|-1} + y + x^2 + x\right) = 65$$

(Chuyên Tiền Giang 2019-2020)

Bài 76: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m;n) thỏa mãn phương trình

$$2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19.$$

(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 2019-2020)

Bài 77: Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $(x^2 - x + 1)(y^2 + xy) = 3x - 1$

(Chuyên Hà Nội 2019-2020)

Bài 78: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2 - 4x^2y + y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 1 = 0$.

(Chuyên Sư phạm Hà Nội 2019-2020)

Bài 79: Tìm x, y thỏa mãn: $\sqrt{2\left(\sqrt{x}+y-2\right)}=\sqrt{\sqrt{x}.y}$

(HSG Lớp 9 An Giang năm 2015-2016)

Bài 80: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 81: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thoả mãn $x^5+y^2=xy^2+1$

(HSG Lớp 9 TP. Bắc Giang năm 2016-2017)

Bài 82: Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2014-2015)

Bài 83: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2\left(x+y\right)+x=2+y\left(x-1\right)$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 84: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$xy^2+2xy-243y+x=0$$

Bài 84: Tìm số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2=y^2+\sqrt{y+1}$

Bài 85: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^2=1+\sqrt{9-x^2-4x}$

Bài 86: Tìm số nguyên a để phương trình sau có nghiệm nguyên dương $\left|4-3a\right|=5-a$

Bài 87: Tìm tất cả các cặp $\left(x;y\right)$ nguyên thỏa mãn

$x^2y^2+\left(x-2\right)^2+\left(2y-2\right)^2-2xy\left(x+2y-4\right)=5$.

(HSG Lớp 9 Lạng Sơn năm 2018-2019)

Bài 88: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $4y^4+6y^2-1=x$.

(HSG Lớp 9 Bình Phước năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;\ y\right)$ thỏa mãn phương trình

$$\left(x-y-1\right)\left(x+1-y\right)+6xy+y^2\left(2-x-y\right)=2\left(x+1\right)\left(y+1\right).$$

(HSG Lớp 9 Nam Định năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $\left(x-2018\right)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2017-2018)

Bài 90:Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2017-2018)

Bài 91: Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2016-2017)

Bài 92: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$.

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2016-2017)

Bài 93: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x+y)(x+2y)=x+5$

(HSG Lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Bài 94: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x^2+x+1)=4^y-1$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2015-2016)

Bài 95: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x+171=y^2$.

(HSG Lớp 9 Nghệ An năm 2015-2016)

Bài 96: Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 97: Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2014-2015)

Bài 98: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2)=4y(y-1)$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2014-2015)

Bài 99: Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2=2x+\overline{yzz4}$.

(HSG Lớp 9 Khánh Hòa năm 2014-2015)

Bài 100: Tìm $x,y,z\in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2012-2013)

Bài 101: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

(HSG Lớp 9 Bình Định năm 2018-2019)

Bài 102: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $4^x=1+3^y$.

(HSG Lớp 9 Quảng Trị năm 2018-2019)

Một số bài toán từ đề thi học sinh giỏi toán lớp 10!

Bài 103. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4=3361-\sqrt{11296320}$$

(Đề đề nghị THPT TP. Cao Lãnh – Đồng Tháp)

Bài 104. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{|4x-6y|+|9x-6y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{313}\qquad(1)$

(Đề đề nghị THPT Bạc Lưu)

Bài 105. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+x+1=2xy+y$

(Đề đề nghị Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi)

Bài 106. Chứng tỏ rằng số: $444444+303030\sqrt{3}$ không viết dưới dạng $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2$ với $x,y\in Z$

(Đề đề nghị Chuyên Quang Trung – Bình Phước)

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình:

$$9\left(x^2+y^2+2\right)+2\left(3xy-1\right)=2008$$

(Đề đề nghị THPT Hùng Vương – Lê Lai)

Bài 108. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$

(Đề đề nghị Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên)

Bài 109. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+17y^2+34xy+51\left(x+y\right)=1740$$

Bài 110. Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 111. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0.$$

Bài 112. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

Bài 113. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$

Một số bài toán phương trình nghiệm nguyên trong tạp trí toán học tuổi trẻ

Bài 114. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2\left(y-5\right)-xy=x-y+1.$

Bài 115. Tìm các bộ số nguyên $\left(a.b,c,d\right)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} ac-3bd=4 \\ ad+bc=3 \end{cases}$

Bài 116. Một tam giác có số đo 3 cạnh là các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều

Bài 117. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^2+y^3=\left(x+y\right)^2+\left(xy\right)^2$$

Bài 118. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0.$$

Bài 119. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Bài 120. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG III. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1:

Biến đổi phương trình thành $4xy-2x-2y=2$

$\Leftrightarrow 2x(2y-1)-(2y-1)=3 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1)=3$.

Vì x và y là các số nguyên nên $2x-1$ và $2y-1$ là các số nguyên.

Do vai trò của x, y như nhau, không giảm tổng quát giả sử $x \ge y$ nên $2x-1 \ge 2y-1$.

Mà $3=3.1=(-3)(-1)$ nên xảy ra hai trường hợp

1) $\begin{cases} 2x-1=3 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};$

2) $\begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases}$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(x;y)$ là $(2;1),(1;2),(0;-1),(-1;0)$.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng $ax+by+cxy=d$, trong đó a,b,c,d là các số nguyên.

Bài 2: Ta có $x^2+x+2009=y^2 (y \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=-8035$

$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1)=-8035.$

Do $y \in \mathbb{N}$ nên $2x+2y+1 \ge 2x-2y+1$, và chúng đều là số nguyên.

Ta có sự phân tích $-8035=1607.(-5)=(-1607).5=1.(-8035)=(-8035).1$.

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp

1) $\begin{cases} 2x+2y+1=1607 \\ 2x-2y+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=1602 \\ 4y=1612 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=403. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+2y+1=-1607 \\ 2x-2y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=-1602 \\ 4y=1612 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-401 \\ y=403. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=-8035 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=-8034 \\ 4y=8036 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2009 \\ y=2009. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+2y+1=-1 \\ 2x-2y+1=8035 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=8034 \\ 4y=8036 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2008 \\ y=2009. \end{cases}$

Bài 3: Biến đổi như sau

$[x^2+2x(2y-2z)+(y-2z)^2]-(y-2z)^2+5y^2+6z^2=10$

$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+4y^2+4yz+2z^2=10$

$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+(2y+z)^2+z^2=10.$

Nhận thấy x,y,z là các số nguyên và $2y+z+z=2(y+z)$ là số chẵn, nên $(2y+z)^2$ và z^2 là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết

$$10=0^2+3^2+1^2.$$

Xảy ra các khả năng sau

$$1)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\(2y+z)^2=3^2\\z^2=1\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(1;1;1),(4;-2;1),(-4;2;-1),(-1;-1;-1). \qquad (*)$$

$$2)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\(2y+z)^2=1^2\\z^2=3\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(7;-1;3),(8;-2;3),(-8;2;-3),(-7;1;-3). \qquad (**)$$

Vậy có tất cả 8 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn được mô tả ở $(*)$ và $(**)$.

Bài 4: *Cách 1.* Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với y nên ta có thể rút y theo x.

Ta có $(1-2x)y=-3x^2+5x-2$.

Do x nguyên nên $1-2x\neq 0$. Suy ra

$$y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}\Leftrightarrow 4y=\frac{12x^2-20x+8}{2x-1}=6x+7+\frac{1}{2x-1}.$$

Do x,y là các số nguyên suy ra $\frac{1}{2x-1}$ là số nguyên, nên $2x-1\in\{1;-1\}$. Từ đó tìm được $(x;y)$ là $(1;0),(0;2)$.

Cách 2. Coi phương trình bậc hai đối với x, ta có

$$3x^2-(2y-5)x+y+2=0.$$

$\Delta=(2y+5)^2-12(y+2)=4y^2+8y+1.$

Nên phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$4y^2+8y+1=k^2 (k\in\mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (2y+2)^2-k^2=3$$

$$\Leftrightarrow (2y+k+2)(2y-k+2)=3.$$

Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

$ax^2+bxy+cx+dy=e$, hoặc $(ay^2+bxy+cx+dy=e)$

Trong đó a,b,c,d,e là các số nguyên.

Bài 5: Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2]=0.$$

Nếu $y=0$ thì x sẽ là số nguyên tùy ý.

Xét $y\neq 0$ thì $2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2=0.$ (1)

Ta coi (1) là phương trình bậc hai theo ẩn y, ta tính

$$\Delta=(x^2-3x)^2-8(x+3x^2)=x(x+1)^2(x-8).$$

Trường hợp $x=-1$ thì $\Delta=0$, nghiệm kép của (1) là $y=-1.$

Trường hợp $x\neq -1$, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$x(x-8)=k^2(k\in\mathbb{N})\Leftrightarrow(x-4-k)(x-4+k)=16.$$

Vì $k\in\mathbb{N}$ nên $x-4-k\leq x-4+k$ và $(x-4-k)+(x-4+k)=2(x-4)$ nên $x-4-k, x-4+k$ cùng chẵn.Lại có $16=2.8=4.4=(-4).(-4)=(-2).(-8).$ Xảy ra bốn trường hợp

$$\begin{cases}x-4-k=a\\x-4+k=b\end{cases}\text{ với }(a;b)=(2;8),(4;4),(-4;-4),(-2;-8).$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;-1),(8;-10),(0;k)$ với $k\in\mathbb{Z}.$

Lưu ý. Trong trường hợp $F(x,y)$ là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến x và y, ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

Bài 6: Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn y bằng phép đặt $x=y+a$ (với a nguyên). Khi đó ta có $(3a-2)y^2+(3a^2-2)y+a^3-8=0.$

Do a nguyên nên $3a-2\neq 0$, tính

$$\begin{aligned}\Delta&=(3a^2-2)^2-4(3a-2)(a^3-8)\\&=-3a^4+8a^3-12a^2+96a-60\\&=-(a^2-4a-2)^2-2a(a^3-56)-56.\end{aligned}$$

Để cho $\Delta\geq 0$ suy ra $2a(a^3-56)<0\Leftrightarrow 0<a\leq\sqrt[3]{56}$. Vì a nguyên nên a chỉ nhận giá trị $1,2,3.$ Thử chọn chỉ có $a=2$ là thích hợp và tìm được $(x;y)$ là $(0;-2),(-2;0).$

Bài 7: Do vai trò x,y,z như nhau, không giảm tổng quát giả sử $1\leq x\leq y\leq z.$ Chia hai vế của phương trình cho xyz ta có

$$2=\frac{5}{xy}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xyz}\leq\frac{18}{x^2}.$$

Do vậy $2x^2\leq 18\Rightarrow x\in\{1,2,3\}.$

1) Với $x=1$ thì ta có $5(y+z)+8=2yz\Leftrightarrow(2y-5)(2z-5)=41.$

Vì y,z nguyên dương và $y\leq z$ nên $-3\leq 2y-5\leq 2z-5,$ và $41=1.41.$

Chỉ xảy ra trường hợp $\begin{cases}2y-5=1\\2z-5=41\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\z=23.\end{cases}$

2) Với $x=2$ thì ta có $5(y+z)+13=4yz\Leftrightarrow(4y-5)(4z-5)=77.$

Vì y,z nguyên dương và $2=x\leq y\leq z$ nên $-3\leq 4y-5\leq 4z-5,$ và $77=11.7.$

Xảy ra trường hợp $\begin{cases} 4y-5=7 \\ 4z-5=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4. \end{cases}$

3) Với $x=3$ thì ta có $5(y+z)+18=6yz \Leftrightarrow (6y-5)(6y-5)=133.$ (*)

Mặt khác y,z nguyên dương và $3\le y\le z$ nên $15\le 6y-5\le 6z-5$

suy ra $(6y-5)(6y-5)\ge 15^2=225.$ (Mâu thuẫn với (*)).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ là $(1;3;3),(2;3;4)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $a(x_1+x_2+...+x_n)+b=cx_1x_2...x_n$, trong đó a,b,c,n là các số nguyên dương và $n\ge 2$.

Bài 8: a) Với $x=0$ thay vào phương trình tìm được $y=1$ hoặc $y=-1$.

Với $x=-1$ thì $y=1$ hoặc $y=-1$.

Với $x>0$ thì $x^4<y^4<(x+1)^4$, điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^4<y^4<x^4$, điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên $(x;y)$ là

$(0;1),(0;-1),(-1;1),(-1;-1).$

b) Với $x=0$ thì $y=1$.

Với $x=-1$ thì $y=0$.

Với $x>0$ thì $x^3<y^3<(x+1)^3$, điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^3<y^3<x^3$, điều này vố lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1),(-1;0)$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $1+x+x^2+...+x^n=y^n$ với n là số nguyên dương.

Bài 9: Giả xử x,y là các số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và $4x$ chia hết cho 4 nên $9y$ chia hết cho 4, mà $(9;4)=1$ nên $y\,\vdots\,4$.

Đặt $y=4t\left(t\in\mathbb{Z}\right)$, thay vào phương trình đầu ta được $4x+36t=48$

$\Leftrightarrow x=12-9t$ và $y=4t$ (*). Thay các biểu thức của x,y ở (*) thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(12-9t;4t\right)$ với $t\in\mathbb{Z}$.

Bài 10: Giả sử $26n+17=k^2$ (với k tự nhiên lẻ). Khi đó

$26n+13=\left(k-2\right)\left(k+2\right)\Leftrightarrow 13\left(2n+1\right)=\left(k-2\right)\left(k+2\right)$.

Do $13\left(12n+1\right)\vdots 13$ nên $\left(k-2\right)\vdots 13$ hoặc $\left(k+2\right)\vdots 13$.

Nếu $\left(k-2\right)\vdots 13$ thì $k=13t+2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2-4t-1}{2}$.

Nếu $\left(k+2\right)\vdots 13$ thì $k=13t-2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2+4t-1}{2}$.

Vậy số tự nhiên lẻ n cần tìm có dạng $\dfrac{13t^2\pm 4t-1}{2}$(t lẻ).

Bài 11: Giả sử tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy x^4, y^4, z^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên $x^4+y^4+z^4$ chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.

Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Bài 12: Giả sử tìm được bộ số nguyên dương $(x,y,z,t)=(a,b,c,d)$ thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có $\begin{cases} a^2+13b^2=c^2 \\ 13a^2+b^2=d^2. \end{cases}$

Gọi ƯCLN$(a,b)=m\,(m\in\mathbb{N}^*)$, suy ra $c\,\vdots\,m$ và $d\,\vdots\,m.$

Đặt $a=ma_1, b=mb_1, c=mc_1, d=md_1$, với a_1,b_1,c_1,d_1 là các số tự nhiên và $(a_1,b_1)=1$. Suy ra $14(a^2+b^2)=c^2+d^2 \Leftrightarrow 14(a_1^2+b_1^2)=c_1^2+d_1^2$. Suy ra $c_1^2+d_1^2\,\vdots\,7$, do đó $c_1\,\vdots\,7$ và $d_1\,\vdots\,7$, dẫn đến $a_1^2+b_1^2\,\vdots\,7$ nên $a_1\,\vdots\,7$ và $b_1\,\vdots\,7$. Điều này mâu thuẫn với $(a_1,b_1)=1$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+ny^2=z^2 \\ nx^2+y^2=t^2 \end{cases}$ với $n+1$ có ước nguyên tố dạng $4k+3$ và $(n+1,p^2)=1$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 13: Giả sử (x_0,y_0,z_0) là nghiệm của phương trình.

Khi đó $x_0\,\vdots\,3$, đặt $x_0=3x_1$ (với $x_1\in\mathbb{Z}$) ta có $9x_1^3-y_0^3-3z_0^3=0$.

Khi đó $y_0\,\vdots\,3$, đặt $y_0=3y_1$ (với $y_1\in\mathbb{Z}$) ta có $3x_1^3-9y_1^3-z_0^3=0$.

Khi đó $z_0\,\vdots\,3$, đặt $z_0=3z_1$ (với $z_1\in\mathbb{Z}$) ta có $x_1^3-3y_1^3-9z_1^3=0$.

Như vậy $(x_1,y_1,z_1)=\left(\dfrac{x_0}{3};\dfrac{y_0}{3};\dfrac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số $\left(\dfrac{x_0}{3^n};\dfrac{y_0}{3^n};\dfrac{z_0}{3^n}\right)$ mọi $n\in\mathbb{N}$ cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0=y_0=z_0=0$,

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

Bài 14: Biến đổi phương trình về dạng

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-4z+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(2;2;2)$.

Bài 15: Nhận thấy nếu $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x_0,y_0,z_0 cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra $(-x_0;-y_0;z_0),(x_0;-y_0;-z_0),(-x_0;y_0;-z_0)$ cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$x^2+1\ge 2x\ge 0;\ y^2+4\ge 4y\ge 0;\ z^2+9\ge 6z\ge 0.$$

Suy ra $(x^2+1)(y^2+4)(z^2+9)\ge 48xyz.$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=2,z=3.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z)$ của phương trình là

$$(1;2;3),(-1;-2;3),(1;-2;-3),(-1;2;-3).$$

Nhận xét. Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng $(x_1^2+a_1^2)(x_2^2+a_2^2)...(x_n^2+a_n^2)=2^n x_1x_2...x_n.a_1a_2...a_n$ với a_i,n là các số nguyên dương.

Bài 16: Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số (x,z) và (t,y) ta có

$$9.16=(x^2+z^2)(y^2+t^2)\ge(xt+yz)^2=12^2,$$

suy ra $(x^2+z^2)(y^2+t^2)=(xt+yz)^2$ khi và chỉ khi $xy=zt.$

Từ $x^2+z^2=9\Leftrightarrow x=0,z=\pm3$ hoặc $x=\pm3,z=0.$

Nếu $x=0$ thì $t=0,$ khi đó $y^2=16,yz=12.$ Vậy $y=4,z=3$ hoặc $y=-4,z=-3.$

Nếu $z=0$ thì $y=0,$ tương tự tìm được $x=3,t=4$ hoặc $x=-3,t=-4.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z;t)$ của hệ là

$$(0;4;3;0),(0;-4;-3;0),(3;0;0;4),(-3;0;0-4).$$

Bài 17:

Ta có:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$$
$$\Leftrightarrow(x-y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)=5$$
$$\Leftrightarrow(x+y)(x^2-2xy+y^2)=5$$
$$\Leftrightarrow(x+y)(x-y)^2=5$$

Do (x - y)²≥0 và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

$$\text{Th1:}\begin{cases}x+y=5\\(x-y)^2=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}\\\begin{cases}x+y=5\\x-y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\text{Th2:}\begin{cases}x+y=1\\(x-y)^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x-y=\pm\sqrt5\end{cases}\ \text{(loại)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Bài 18: Nếu y thỏa mãn phương trình thì – y cũng thỏa mãn phương trình, do đó ta có ta giả sử $y \ge 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2$

Đặt $t = x^2 + 3x + 1$ được :

$(t-1)(t+1) = y^2 \Leftrightarrow t^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow (t-y)(t+y) = 1 \Rightarrow t + y = t - y \Rightarrow y = 0$

Thay y = 0 vào (1) ta được: x = 0, - 1, -2, - 3.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (0, 0); (-1, 0); (-2, 0); (-3, 0).

Bài 19: Ta có:

$$\begin{aligned}&(x^2-y)(y^2-x) = (x-y)\\ &\Leftrightarrow x^2y^2 - y^3 - x^3 + xy = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\\ &\Leftrightarrow 2x^3 - x^2y^2 - xy - 3x^2y + 3xy^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x\left(2x^2 + (-y^2 - 3y)x - y + 3y^2\right) = 0\end{aligned}$$

Nếu x = 0 thì y bất kì thuộc Z.

Nếu $x \ne 0$ suy ra: $2x^2 + (-y^2 - 3y)x - y + 3y^2 = 0$

Coi đây là phương trình ẩn x ta có: $\Delta = (y^2 + 3y)^2 - 8(3y^2 - y) = (y-1)^2 y(y+8)$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương tức là:

$y(y+8) = a^2 \Leftrightarrow (y+4)^2 - a^2 = 16 \Leftrightarrow (y+4+a)(y+4-a) = 16 \ (a \in N)$

Vì (y + 4 + a) > (y + 4 – a) và (y + 4 + a) + (y + 4 – a) là số chẵn nên ta có các trường hợp:

$\begin{cases} y+4+a=8 \\ y+4-a=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=4 \\ y+4-a=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} y+4+a=-8 \\ y+4-a=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=-4 \\ y+4-a=-4 \end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là:

$(1;1), (10,-8), (6,-9), (21,-9), (0;k)$ với $k \in Z$

Bài 20: Ta có

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{617} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$

$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\y-617=617\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=1\\y-617=617^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=617^2\\y-617=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1234\\x=618;y=381306\\x=381306;y=618\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là

(1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

Bài 21: Ta có: $xy=px+py\Rightarrow(x-y)(y-p)=p^2$.

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là: $\pm1,\pm p,\pm p^2$. Thử lần lượt với các ước trên ta được các nghiệm (x, y) là: $(p+1,p+p^2);(2p,2p);(p+p^2,p+1)$.

Bài 22: Ta có: $(1)\Leftrightarrow 6y+6x+1=xy\Leftrightarrow x(y-6)-6(y-6)=37\Leftrightarrow(x-6)(y-6)=37$

Do vai trò của x, y bình đẳng giả sử: $x\ge y\ge1\Rightarrow x-6\ge y-6\ge-5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases}x-6=37\\y-6=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=43\\y=7\end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là (x, y) = (43, 7); (7, 43).

Bài 23: Ta có: $10z\,\vdots\,3\Rightarrow z\,\vdots\,3$. Đặt $z=3k$ ta được $6x+15y+30k=3\Leftrightarrow 2x+5y+10k=1$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau $2x+5y=1-10k\Rightarrow x=\dfrac{1-10-5y}{2}=-5k-2y+\dfrac{1-y}{2}$

Đặt $\dfrac{1-y}{2}=t\,(t\in Z)$ ta được $\begin{cases}y=1-2t\\x=-5k-2(1-2t)+t=5t-5k-2\\z=3k\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (5t - 5k - 2, 1 – 2t, 3k) với k, t là số nguyên tùy ý.

Bài 24: Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.

Tổng $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2;y^2;z^2$ phải có: hoặc có một số lẻ, hai số chẵn; hoặc cả ba số lẻ.

Trường hợp trong ba số $x^2;y^2;z^2$ có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái của (1) chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999chia cho 4 dư 3, loại.

Trong trường hợp ba số $x^2;y^2;z^2$ đều lẻ thì vế trái của (1) chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, loại.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 25: Ta thấy ngay $0 \le x, y \le 50$. Từ $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}$ ta có

$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} = 50 + x - 10\sqrt{2x}$

Vì x, y nguyên nên $10\sqrt{2x}$ nguyên. Ta biết rằng với x nguyên thì $10\sqrt{2x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỷ. Do đó để $10\sqrt{2x}$ nguyên thì 2x phải là số chính phương tức là $2x = 4k^2$ $\Rightarrow x = 2k^2, k \in Z$ với $2k^2 \le 50 \Rightarrow k^2 \le 25 \Rightarrow$ k chỉ có nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lựa chọn k trong các số trên để thỏa mãn phương trình ta được các nghiệm (x, y) là (0, 50); (2, 32); (8, 18); (18, 8); (32, 2); (50,0).

Bài 26: Điều kiện: $x \ge 1$

$$y = \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}$$
$$= \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

Với x = 1 thì y = 2

Với $x \ge 2$ thì $y = \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$. Do đó: $y^2 = 4\left(x-1\right)$

Do $x \ge 2$ nên có thể đặt: $x - 1 = t^2$ với t nguyên dương.

Do đó ta có: $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2t \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (1, 2); $(1 + t^2, 2t)$ với t nguyên dương.

Bài 27: $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1 \quad (1)$

Có $y(y+1)(y+2)(y+3) = \left[y(y+3)\right]\left[(y+1)(y+2)\right] = (y^2+3y)(y^2+3y+2)$

Đặt $t = y^2 + 3y + 1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3) = t^2 - 1$ ($t \in \mathbb{Z}$, $t^2 \ge 1$)

(1) $\Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{t^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 \ge 0 \\ (x^{2015} - 1)^2 = t^2 - 1 (2) \end{cases}$

Với x, t là số nguyên ta có:

$(2) \Leftrightarrow \left(x^{2015} - 1 + t\right)\left(x^{2015} - 1 - t\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = 1 \\ x^{2015} - 1 - t = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = -1 \\ x^{2015} - 1 - t = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2015} = t = 1 \\ \begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $x^{2015} = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Bài 28: Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x:

Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Nếu $x = 1$ thì $y^2 = 5$, không có nghiệm nguyên

Nếu $x \geq 2$ 2 thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia cho 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia cho 4 dư 1. Mâu thuẫn.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là (0 ; 2), (0 ; -2).

Bài 29: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

$\Leftrightarrow \left(2^{2x}+5.2^x+4\right)\left(2^{2x}+5.2^x+6\right)-5^y=11879 \qquad (1)$

Đặt $t = 2^{2x}+5.2^x+5, t \in \mathbb{N}^*,$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1)-5^y=11879$

$\Leftrightarrow t^2-5^y=11880(2)$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \vdots 5 \Rightarrow t^2 \vdots 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 \vdots 25$ (vô lí)

• TH2: y = 1

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: y = 0

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$

$\Rightarrow 2^{2x}+5.2^x+5=109 \Rightarrow 2^{2x}+5.2^x-104=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 8(tm) \\ 2^x = -13(L) \end{array}\right. \Rightarrow x = 3.$

Vậy x = 3, y = 0 là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 30: Ta có:

$(x+y+z)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow 27-3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=8 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} x+y=a\in Z \\ y+z=b\in Z \\ z+x=c\in Z \end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6\Rightarrow a\ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow x-5;y=4;z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 31: Từ (1) ta được z = 2 + y – x thay vào (2) ta được:

$2x^2-xy+x-4-2y+2x=1\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=y(x+2)$

Do x = - 2 không thỏa mãn phương trình trên nên:

$$y=\frac{2x^2+3x-5}{x+2}=2x-1-\frac{3}{x+2}$$

y nguyên nên (x + 2) là ước của 3. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x+2=\pm1 \\ x+2=\pm3 \end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{-1;-3;1;-5\}$

Từ đó suy nghiệm của hệ là: $(x,y,z)=(1;-6;-3),(-3;-4;1),(1;0;1),(-5;-10;-3)$

Bài 32:

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1) . Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1.x_2=a+2 \end{cases}$

Do đó: $x_1x_2-(x_1+x_2)=2\Leftrightarrow x_1(x_2-1)-(x_2-1)=3\Leftrightarrow(x_1-1)(x_2-1)=3$

Suy ra (x_1-1) và (x_2-1) là ước của 3.

Giải sử: $x_1\ge x_2\Rightarrow x_1-1\ge x_2-1$. Khi đó:

a) $\begin{cases} x_1-1=3 \\ x_2-1=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$. Khi đó a = 6.

b) $\begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$. Khi đó a = -2

Thay giá trị của a vào phương trình (1) thử lại và kết luận.

Bài 33: Ta có:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2+4\left(y^2+7\right)^2\right]^2=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\left[4x^4-\left(y^2+7\right)\right]^2=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2x+y\right)\left(2x-y\right)=7\ \left(1\right)$$

Vì $x,y\in N^*\Rightarrow 2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$ Do đó: $\begin{cases}2x+y=7\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Kết luận: (x, y) = (2, 3) thỏa mãi yêu cầu bài toán.

Bài 34: Ta có: $9y^2+6y+16\equiv\left(\bmod 3\right)\Rightarrow 2^x.x^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)$. Mà

$x^2\equiv 0;1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow\begin{cases}2^x\equiv 1\left(\bmod 3\right)\\x^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)\end{cases}$

Nếu x lẻ đặt: $x=2k+1\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=2.4^k\equiv 2\left(\bmod 3\right)\left(\text{sai}\right)$, suy ra x lẻ loại.

Nếu x chẵn đặt: $x=2k\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=4^k\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ (đúng).

Do đó khi x chẵn thì

$2^x.x^2=9y^2+6y+16\Leftrightarrow\left(2k.2^k\right)^2=\left(3k+1\right)^2+15\Leftrightarrow\left(2k.2^k-3y-1\right)\left(2k+3y+1\right)=15.$

Vì $y,k\in N\Rightarrow 2k.2^k+3y+1>2k.2^k-3y-1>0.$

Vậy ta có các trường hợp:

$+\begin{cases}2k.2^k-3y-1=1\\2k.2^k+3y+1=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k.2^k=8\\3y+1=7\end{cases}\Rightarrow k\notin N$ (loại)

$+\begin{cases}2k.2^k-3y-1=3\\2k.2^k+3y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k.2^k=4\\3y+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\y=0\end{cases}$. Vậy (x, y) = (2; 0).

Bài 35: Đặt x + y = a; xy = b. Phương trình trở thành: $ab^2+a=3+b$

Xét b = 3 suy ra: $a=\dfrac{3}{5}$ (Vô lý)

Xét $b\neq 3$ ta có: $b^2a+a=3+b\Leftrightarrow a\left(b^2+1\right)=3+b\Leftrightarrow a=\dfrac{3+b}{b^2+1}\Leftrightarrow a\left(b-3\right)=\dfrac{b^2-9}{b^2+1}=1+\dfrac{-10}{b^2+1}$

Ta phải có (b^2 + 1) phải là ước dương của 10 do đó: $b^2+1\in\left\{1;2;5;10\right\}\Rightarrow b\in\left\{0;\pm1;\pm2;-3\right\}$

Nếu b = 0 thì a = 3. Ta có: $x+y=3,xy=0\Rightarrow x=0,y=3$ và $x=3,y=0$

Nếu b = 1 thì a = 2. Ta có $x+y=2,xy=1\Rightarrow x=1,y=1$

Nếu $b=-1$ thì a = 1

Ta có: x + y = 1, xy = -1 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Nếu b = 2 thì a = 1. Ta có: x + y = 1 và xy = 2 không tồn tại x, y.

Nếu b = -2 thì $a = \frac{1}{5}$ (vô lý).

Nếu $b = -3$ thì a = 0. Ta có: x + y = 0 và $xy = -3$ không tồn tại x, y nguyên.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là (x, y) = (0, 3); (3, 0); (1, 1).

Bài 36:

$x^3 + y^3 - 3xy = 1$

$<=> (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy = 1$

Đặt x + y = a và xy = b (a, b nguyên) ta có:

$a^3 - 3ab - 3b = 1$

$<=> (a+1)(a^2 - a + 1) - 3b(a+1) = 2$

$<=> (a+1)(a^2 - a + 1 - 3b) = 2$

1) $\begin{cases} a+1=1 \\ a^2 - a + 1 - 3b = 2 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{-1}{3} (L) \end{cases}$

2) $\begin{cases} a+1=2 \\ a^2 - a + 1 - 3b = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=1 \\ xy = 0 \end{cases} => (x;y) \in \{(0;1);(1;0)\}$

3) $\begin{cases} a+1=-1 \\ a^2 - a + 1 - 3b = -2 \end{cases} <=> \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=-2 \\ xy = 3 \end{cases} => (x;y) \in \varnothing$

4) $\begin{cases} a+1=-2 \\ a^2 - a + 1 - 3b = -1 \end{cases} <=> \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=-3 \\ xy = 4 \end{cases} => (x;y) \in \varnothing$

Vậy $(x;y) \in \{(0;1);(1;0)\}$

Bài 37: Phương trình đã cho tương đương $x^2 - xy - \left(y^2 + 8\right) = 0$

Coi phương trình trên là phương trình ẩn x có y là tham số ta có: $\Delta = y^2 + 4\left(y^2 + 8\right) = 5y^2 + 32$

Ta có Δ chia cho 5 dư 2 nên có tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không là số chính phương vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 38: Ta có: $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow \left(2y-1\right)\left(2y+1\right) = x^3$

Do $\left(2y-1, 2y+1\right) = 1$ cho nên $2y + 1 = a^3, 2y - 1 = b^3 \left(a, b \in Z\right)$

Suy ra: $a^3 - b^3 = 2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ b=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{cases}\end{array}\right.$$

Do a, b là số nguyên nên chỉ nhận được giá trị a =1 và b = -1 suy ra y = 0 và x = -1

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (-1, 0)

Bài 39: Ta có: $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=-5x^2y^2+35xy-60$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2=-5(x^2y^2+7xy-12) \quad (1)$$

Do $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow -5(x^2y^2+7xy-12) \ge 0$. Đặt $t=xy$ ($t \in Z$) ta có:

$-5(t^2+7t-12) \ge 0 \Leftrightarrow 3 \le t \le 4$. Mà t là số nguyên nên t = 3 hoặc t = 4

Khi t = 3 ta có $\begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=y^2=3$ (không tồn tại giá trị nguyên của x, y)

Khi t = 4 ta có $\begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$ hoặc $x=y=-2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là (x, y) = (2, 2); (-2, -2).

Bài 40: Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^3=x^3+2x^2+3x+2$

Do $2x^2+3x+2=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0 \Rightarrow y^3>x^3$

Xét $|x|>1$ thì: $y^3=x^3+2x^2+3x+2=(x+1)^3+1-x^2<(x+1)^3$

Do đó $x^3<(y+1)^3<(x+1)^3$

Vì x, y nguyên nên phương trình không có nghiệm.

Xét $|x| \le 1$ thì do x nguyên nên x = 1 hoặc x = -1 hoặc x = 0

Với x = -1 ta được y = 0

Với x = 1 thì y = 2

Với x = 0 thì y = $\sqrt[3]{2}$ (loại)

Vậy phương trình có 2nghiệm (x, y) = (-1, 0); (1, 2).

Bài 41: Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y-2)^2+(y+2)^2=1$

Do đó ta có: $(y+2)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y+2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le y \le -1 \Rightarrow y \in \{-3,-2.-1\}$

Với $y=-3$ thay vào phương trình ta được: $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Với $y=-2$ thay vào phương trình ta được: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với $y=-1$ thay vào phương trình ta được: $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (x, y) = (-1, -3); (1, -2); (-1, -2); (1, -1).

Bài 42: Ta có : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}(x \ge 0; y \ge 0)$

Pt viết: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{2}(1)(0 \le \sqrt{x} \le 3\sqrt{2}; 0 \le \sqrt{y} \le 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$\sqrt{x}=3\sqrt{2}-\sqrt{y} \ge 0 <=> (\sqrt{x})^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{y})^2 <=> 6\sqrt{2y}=y-x+18$

$=> \sqrt{2y}=\dfrac{y-x+18}{6} \in Q$

$<=> \sqrt{2y}=a \in Q <=> 2y=a^2 \in Q <=> \begin{cases} a^2 \in N(Vi\ 2y \in Z\ va\ a \ge 0) \\ a \vdots 2 \end{cases}$

$a=2m(m \in N)$

$=> 2y=(2m)^2 <=> y=2m^2 <=> \sqrt{y}=m\sqrt{2}.TT => \sqrt{x}=n\sqrt{2}$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2}+m\sqrt{2}=3\sqrt{2} <=> m+n=3(m;n \in N)$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} => \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} => \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} => \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases} => \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}; \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 43: Phương trình đã cho tương đương với $9x=(y-1)(y+2)(1)$

Nếu $y-1 \not\vdots 3$ thì $y+2=(y-1)+3 \vdots 3 => (y-1)(y+2) \vdots 9$

Mà $9x \vdots 9\ \forall x \in Z$ nên ta có mâu thuẫn.

Suy ray $-1 \vdots 3$, do đó: $y-1=3k(k \in Z)$=>y=3k+1$(k \in Z)$

Thay vào (1) ta có: $9x=3k(3k+3) => x=k(k+1)$

Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=k(k+1) \\ y=3k+1 \end{cases}(k \in Z)$

Bài 44:

$$2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$$
$$<=> 2014(x-y)^2+x^2+y^2=2039$$

Đặt t=|x-y| , $t \in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: t = 0, tức x = y ⇒ phương trình vô nghiệm

TH2: t = 1, tức là x – y = ±1

+ Với x – y = 1 hay x = y + 1, phương trình trở thành:

$$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-4 \end{array}\right.$$

Với y = 3 thì x = 4; với y = –4 thì x = –3

+ Với x – y = –1 hay x = y – 1, phương trình trở thành:

$$(y-1)^2+y^2=25 <=> y^2-y-12=0$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3

TH3: t ≥ 2, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bìnhphương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phươngtrình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Bài 45:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$$
$$<=> (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)=5$$
$$<=> (x+y)(x^2-2xy+y^2)=5$$
$$<=> (x+y)(x-y)^2=5$$

Do $(x-y)^2 \geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} => \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (L)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(3;2);(2;3)\}$

Bài 46:

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được

$p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

⇒ 2(y – x)(y + x + 2) ⋮ p. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• y – x ⋮ p ⇒ y – x = kp (k ∈ N*)

Khi đó từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(x + y + 2) ⇒ kp – k = 2k²(x + y + 2) ⇒ y – x – k = 2k²(x + y + 2)

(loại vì x + y + 2 > y – x – k > 0 ; 2k²> 1 ⇒ 2k²(x + y + 2) > y – x – k)

• y + x + 2 ⋮ p ⇒ x + y + 2 = kp (k ∈ N*)

Từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(y – x) ⇒ kp – k = 2k²(y – x) ⇒ x + y + 2 – k = 2k²(y – x) (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ x + y = 2k²(y – x) + k – 2 ≥ 8(y – x) (vì y – x > 0)

⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x

Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)

(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))

⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử x ≥ y ≥ z ≥ 1.

Từ (1) $\Rightarrow 0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \Rightarrow ny^2z^2-1>0 \Rightarrow ny^2z^2-1 \ge 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \ge x^2(*)$

Vì x ≥ y ≥ z nên $3x^3 \ge x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \ge n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right) \ge 9x^2 \ge n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1+\dfrac{z^3}{y^3}\right) \ge n^2yz^4$

Mà $y \ge z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3} \le 1 \Rightarrow n^2yz^4 \le 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right) \le 18(**)$

Ta có: $(**) \Rightarrow z^4 \le 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

• Nếu $z=2$: (**) $\Rightarrow 16n^2y \le 18 \Rightarrow n=y=1$ (loại vì $y<z$)

• Nếu $z=1$: (**) $\Rightarrow n^2y \le 18 \Rightarrow n^2 \le 18 \Rightarrow n \le 4$

Ta chứng minh $n \notin \{2;4\}$. Thật vậy,

*Nếu $n = 4$ thì từ $n^2y \le 18 \Rightarrow 16y \le 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 $\Rightarrow$
$x = 1$ (không thỏa mãn)

*Nếu $n = 2$ thì từ $n^2y \le 18$ suy ra $4y \le 18 \Rightarrow 1 \le y \le 4$.

+ $y=1:(1) \Rightarrow x^3-2x^2+2=0 \Rightarrow x^2(x-2)=-2<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x=1(L)$

+ $y=2:(1) \Rightarrow x^3-8x^2+9=0 \Rightarrow 9=x^2(8-x).$ Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \ge y^2 = 4$ nên x=3 (không thỏa
mãn)

+ $y=3:(1) \Rightarrow x^3-18x^2+28=0 \Rightarrow x^2(18-x)=28.$ Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \ge y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4:(1) \Rightarrow x^3-32x^2+65=0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n \notin \{2;4\}$. Do đó $n \in \{1;3\}$

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1;3\}$

$y=4:(1) \Rightarrow x^3-32x^2+65=0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n \notin \{2;4\}$. Do đó $n \in \{1;3\}$

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1;3\}$

Bài 47: Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 <=> (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$<=> 2(x^2-xy+y^2-x-y)=0$
$<=> (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2=1 <=> x=y=2, z=4 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=0 \\ (x-y)^2=1 <=> x=1, y=2, z=3 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 <=> x=2, y=1, z=3 \\ (x-1)^2=1 \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 48: Ta có:

$x^2-2y(x-y)=2(x+1) <=> x^2-2(y+1)x+2(y^2-1)=0(1)$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương

Ta có $\Delta'=y^2+2y+1-2y^2+2=-y^2+2y+3=4-(y-1)^2 \leq 4$

Δ'chính phương nên $\Delta' \in \{0;1;4\}$

+ Nếu $\Delta'=4 => (y-1)^2=0 <=> y=1$ thay vào phương trình (1) ta có :

$x^2-4x=0 <=> x(2-4) <=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-4 \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta'=1 => (y-1)^2=3 <=> y \notin Z.$

+ Nếu $\Delta'=0 => (y-1)^2=4 <=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

+ Với $y=3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2-8x+16=0 <=> (x-4)^2=0 <=> x=4$

+ Với y =-1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2=0 <=> x=0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x;y) \in \{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$

Bài 49:

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4+x^2+20=y^2+y$

Ta thấy $x^4+x^2 < x^4+x^2+20 \leq x^4+x^2+20+8x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$

Vì x, y $\in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1)=(x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4+x^2+20=x^4+3x^2+2$

$\Leftrightarrow 2x^2=18 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Với $x^2=9$, ta có $y^2+y=9^2+9+20 \Leftrightarrow y^2+y-110=0$

$\Leftrightarrow y = 10; y = -11(\text{t.m})$

+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{2}$ (loại)

+ TH3. $y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$ (loại)

+ TH4. $y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên (x;y) là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

Bài 50:

a) Giải sử tồn tại (x, y, z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5 \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \ (*)$

Ta có $a^4 \equiv 0,1 \pmod 8$ với mọi số nguyên a $\Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0,1,2,3 \pmod 8 \\ 8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$

Mâu thuẫn với (*) vậy không tồn tại (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$\left[(x+1)^2 + (x-1)^2\right]\left[(x+1)^2 - (x-1)^2\right] = y^3 \Leftrightarrow (2x^2+2).4x = y^3 \Leftrightarrow 8x^3 + 8x = y^3.$

Nếu $x \ge 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3 + 8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẫn với y nguyên)

Nếu $x \le -1$ và (x, y) là nghiệm, ta suy ra (-x, -y) cũng là nghiệm mà $-x \ge 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn

Nếu x = 0 thì y = 0 (mâu thuẫn)

Vậy (x, y) = (0, 0) là nghiệm duy nhất

Bài 51:

Phương trình đã cho tương đương $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 41 = 0.$ (1)

Ta có $\Delta'_x = 82 - 9y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le \dfrac{82}{9}$. Mặt khác từ (1) ta có y^2 là số lẻ, nên $y^2 \in \{1;9\}$

Với $y = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y = -1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y = 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Với $y = -3 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $\{(1;3),(2;3),(-1;-3),(-2;-3)\}$.

Bài 52:

Đặt : $x^{673}=a;y^{673}=b\left(a;b\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3=b^3-b^2-b+2(*)$

$\Rightarrow a^3=b^3-3b^2+3b-1+2b^2-4b+3=\left(b-1\right)^3+\left(2b^2-4b+3\right)>\left(b-1\right)^3$

Lại có: $a^3=b^3+6b^2+12b+8-7b^2-13b-6=\left(b+2\right)^3-\left(7b^2+13b-6\right)<\left(b+2\right)^3$

Từ (1) và (2) ta có: $\left(b-1\right)^3<a^3<\left(b+2\right)^3\Rightarrow b-1<a<b+2$

Vì $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=b+1\end{array}\right.$

+) Với $a=b$ ta có: $\left(*\right)\Leftrightarrow b^3=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow b^2+b-2=0\Leftrightarrow\left(b-1\right)\left(b+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=1\\a=b=-2\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^{673}=y^{673}=1\\x^{673}=y^{673}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1(tm)\\x=y=\sqrt[673]{-2}(ktm)\end{array}\right.$

+)Với $a=b+1\Rightarrow\left(*\right)\Leftrightarrow\left(b+1\right)^3=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow b^3+3b^2+3b+1=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow 4b^2+4b-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}(ktm)\\b=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}(ktm)\end{array}\right.$

Vậy $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

Bài 53:

a) Chứng minh rằng…..

Ta có: $9!=1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3\vdots 2\Rightarrow x\vdots 2\Rightarrow x=2m\quad\left(m\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 8m^3+2y^3+4z^3=9!\Leftrightarrow 4m^3+y^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3\vdots 2\Rightarrow y\vdots 2\Rightarrow y=2n\quad\left(n\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 4m^3+8n^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3+4n^3+z^3=1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3 \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 2p\left(p \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 2m^3 + 4n^3 + 8p^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow m^3 + 2n^3 + 4p^3 = 1.3.5.6.7.8.9$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có $\begin{cases} m \vdots 2 \\ n \vdots 2 \\ p \vdots 2 \end{cases} \left(m; n; p \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2m \vdots 4 \\ y = 2n \vdots 4 \\ z = 2p \vdots 4 \end{cases}$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại…..

Theo ý a) ta có thể đặt $x = 4a; y = 4b; z = 4c \qquad \left(a; b; c \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow a^3 + 2b^3 + 4c^3 = \dfrac{9!}{4^3} = \dfrac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3} = 1.3.5.6.7.9$ là số chẵn

$\Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a = 2u \qquad \left(u \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow 8u^3 + 2b^3 + 4c^3 = 1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3 + b^3 + 2c^3 = 1.3.3.5.7.9 = 1.5.7.3^4$

Lại có:

$\begin{cases} \left(1.5.7.3^4\right) \vdots 3^4 \Rightarrow \left(1.5.7.3^4\right) \vdots 9 \\ x^3 \equiv 0; \pm 1 \qquad (\bmod 9)\left(x \in Z\right) \end{cases}$

$\Rightarrow a; b; c \vdots 9 \Rightarrow \left(4u^3 + b^3 + 2c^3\right) \vdots 9^3$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 54:

$x^3 - xy + 2 = x + y \Leftrightarrow x^3 - xy - x - y = 2$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - y\left(x + 1\right) = -2$

$\Leftrightarrow \left(x + 1\right)\left(x^2 - x - y\right) = -2$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=-2 \\ x^2-x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=2 \\ x^2-x-y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=1 \\ x^2-x-y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=-1 \\ x^2-x-y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=11 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} (tm) \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên $(x;y) = \{(-3;11);(1;1);(0;2);(-2;4)\}$

Bài 55:

Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đồng thời:

$x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396$ và $x^2+y^2=3z$.

Từ điều kiện $x^2+y^2=3z$ suy ra x^2+y^2 chia hết cho 3 hay x, y đều chia hết cho 3.

$x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396 \Leftrightarrow (x+z+2)^2=4(100-y^2)$.

Suy ra: $100-y^2$ là số chính phương và $y^2 \le 100$. Mặt khác $y \vdots 3$ nên $y^2 \in \{0;36\}$ $\Rightarrow y \in \{0;6;-6\}$.

Xét $y=0$: $\begin{cases} x^2=3z \\ (x+z+2)^2=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3} \\ x+z+2=20 \end{cases} \vee \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3} \\ x+z+2=-20 \end{cases}$

Tìm được $x=6, z=12$ hoặc $x=-9, z=27$.

Xét $y=6$ hoặc $y=-6$: $\begin{cases} x^2+36=3z \\ (x+z+2)^2=256 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3}+12 \\ x+z+2=16 \end{cases} \vee \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{3}+12 \\ x+z+2=-16 \end{cases}$.

Giải ra $x, z \notin \mathbb{Z}$. Vậy $(x;y;z)$ là $(6;0;12)$ hoặc $(-9;0;27)$.

Bài 56:

$2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$

$\Leftrightarrow (2x^2-4xy-2x)+(2xy-4y^2-2y)-(x-2y-1)=4$

$\Leftrightarrow 2x(x-2y-1)+2y(x-2y-1)-(x-2y-1)=4$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)(2x+2y-1)=4 \qquad (*)$

Do $x, y \in \mathbb{Z}, 2x+2y-1$ lẻ nên ta có các trường hợp sau đây:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y-1=-1 \\ x-2y-1=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y-1=1 \\ x-2y-1=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x-2y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-2y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{-4}{3} \end{cases} (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(1;-1)$

Bài 57:
Ta có:

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2-2xy+y-5x+2=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=2xy-y$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=y(2x-1)$$
$$\Rightarrow y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}(Do...x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2x-1\neq 0)$$

Do x, y nguyên nên:

$$\begin{cases} (3x^2-5x+2)\,\vdots\,(2x-1) \\ 3(2x-1)^2\,\vdots\,(2x-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[4(3x^2-5x+2)-3(2x-1)^2\right]\vdots\,(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow \left[-20x+8-3(-4x+1)\right]\vdots\,(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow (-8x+5)\,\vdots\,(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow \left[-8x+5+4(2x-1)\right]\vdots\,(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow 1\,\vdots\,(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=0\Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình đã cho là $(1;0);(0;-2)$

Bài 58:
Vì x, y nguyên dương nên $VP>0$ do đó $VT>0$ nên $x>y$

Ta có: $15xy=16(x^3-y^3)-371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ, do vậy : $\begin{cases} x\geq 3 \\ y\geq 1 \end{cases}$

Xét $x=3$ thì $y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn

Xét $x \geq 5$

Ta có:

$x-2 \geq y \Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right) \geq 16\left[x^3-\left(x-2\right)^3\right]=16\left(6x^2-12x+8\right)$

$15xy+371 \leq 15x\left(x-2\right)+371=15x^2-30x+371$

$16\left(6x^2-12x+8\right)-\left(15x^2-30x+371\right)=81x^2-162x-243=81\left(x^2-2x-3\right)$

Ta có: $x^2-2x-3>0, \forall x \geq 5 \Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$

Vậy trường hợp này vô nghiệm

Vậy phương trình có cặp nghiệm nguyên dương duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$

Bài 59:

Ta có 1 số chính phương khi chia cho 3 sẽ nhận được số dư là 0 hoặc 1 nên ta có:

$$\begin{cases}(3k)^2=9k^2\\(3k+1)^2=9k^2+6k+1 \equiv 1\left(\bmod 3\right)\\\left(3k+2\right)^2=9k^2+12k+4 \equiv 1\left(\bmod 3\right)\end{cases}$$

Nếu $x,y>3$ thì x,y không chia hết cho 3 do đó số dư của Vế trái cho 3 là $1-2.1=-1$ chia 3 dư 2 vô lý do $x^2-2y^2=1$

$\Rightarrow$ trong hai số x, y phải có một số bằng 3

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \Rightarrow 9-2y^2=1 \Rightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=2(y>0)\\y=3 \Rightarrow x^2-2.9=1 \Leftrightarrow x^2=19 \Rightarrow x \in \varnothing\end{array}\right.$$

Vậy các cặp số nguyên $\left(x;y\right)=\left(3;2\right)$

Bài 60:

$x^2-xy+y^2=2x-3y-2 \Leftrightarrow x^2-\left(y+2\right)x+y^2+3y+2=0 \quad (1)$

$\Delta=\left(y+2\right)^2-4\left(y^2+3y+2\right)=-3y^2-8y-4$

Để phương tình (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$\Rightarrow -3y^2-8y-4 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2+8y+4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq -\dfrac{2}{3}$

Vì y nguyên nên $y=-2$ hoặc $y=-1$.

Với $y=-2$, (1) $\Rightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $y=-1$, (1) $\Rightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $(0;-2),(0;-1),(1;-1)$.

Bài 61:

- Với $y=0$, ta có $x=0$.
- Với $y\neq 0$, ta có:

$$x^2y^2-x^2-6y^2=2xy \Leftrightarrow x^2y^2-5y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-5=\frac{(x+y)^2}{y^2}=a^2 \quad (a\in\mathbb{Z}).$$

$$x^2-a^2=5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+|a|=5 \\ |x|-|a|=1 \end{cases} \Rightarrow |x|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Khi $x = 3 \Rightarrow 3y^2-6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$

Khi $x = -3 \Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right.$

Vậy $(x;y)\in\{(0;0);(3;-1);(3;3);(-3;1);(-3;-3)\}$

Bài 62:

Coi phương trình đã cho là phương trình bậc 2 ẩn y có tham số x

Ta có: $\Delta=4x^2+12x+8$

Vì $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow\Delta$ là số chính phương

$\Rightarrow 4x^2+12x+8=k^2 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2k+3-k)(2k+3+k)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3-k=1 \\ 2x+3+k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3-k=-1 \\ 2x+3+k=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ k=0 \end{cases}(tm) \\ \begin{cases} x=-2 \\ k=0 \end{cases}(tm) \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình đề

Với $x=-1\Rightarrow(*)\Leftrightarrow y^2-2y+1=0\Leftrightarrow(y-1)^2=0\Rightarrow y=1(tm)$

Với $x=-2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow y^2-4y+4=0\Leftrightarrow(y-2)^2=0\Leftrightarrow y=2(tm)$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=\{(-1;1);(-2;2)\}$

Bài 63:

Nhân cả hai vế của phương trình với 12 ta được:

$$36(a^2+b^2)-84(a+b)=-48\Leftrightarrow(6a-7)^2+(6b-7)^2=50=5^2+5^2=1^2+7^2$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(6a-7)^2=25\\(6b-7)^2=25\end{cases}\\\begin{cases}(6a-7)^2=1\\(6b-7)^2=49\end{cases}\\\begin{cases}(6a-7)^2=49\\(6b-7)^2=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=-5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=-5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=7\\6b-7=1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=7\\6b-7=-1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=2(tm)\\a=\frac{1}{3},b=2(ktm)\\a=2,b=\frac{1}{3}(ktm)\\a=\frac{1}{3};b=\frac{1}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=\frac{7}{3}(ktm)\\a=1;b=\frac{7}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=0(ktm)\\a=1;b=0\\a=0;b=\frac{4}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=\frac{4}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=1(ktm)\\a=0,b=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\\a=b=2\\\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(a;b)=\{(0;1);(1;0);(2;2)\}$

Bài 64:

Ta có $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x\Leftrightarrow 4y^2+4y+1=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2y+1)^2=\left(2x^2+x\right)^2+(3x+1)(x+1)\\(2y+1)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2-x(x+1)\end{cases}$$

Ta thấy : nếu $x<-1$ hoặc $x>2$ thì $(3x+1)(x+1)>0$ và $x(x-2)>0$ nên từ (1) và (2) ta suy ra

$\left(2x^2+x+1\right)^2>(2y+1)^2>\left(2x^2+x\right)^2$ $(*)$ Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn.

Từ đó suy ra $-1\le x\le 2\Rightarrow x\in\{-1,0,1,2\}$

Xét $x=2\Rightarrow y^2+y=30\Rightarrow y=5, y=-6$

Xét $x=1\Rightarrow y^2+y=4$ loại

Xét $x=0\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y=0, y=-1$

Xét $x=-1\Rightarrow y^2+y=0\Rightarrow y=0, y=-1$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là $(0,5)(2\cdot -6)(0:0),(0;-1),(-1,0),(-1,-1)$

Bài 65:

Từ $x^2-xy-5x+5y=2$

$\Leftrightarrow x(x-y)-5(x-y)=2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-5)=2$

Vì $2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}x-y=1\\x-5=2\end{cases}\ \begin{cases}y=6\\x=7\end{cases}(TM)$

Trường hợp 2: $\begin{cases}x-y=2\\x-5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=6\end{cases}(TM)$

Trường hợp 3: $\begin{cases}x-y=-1\\x-5=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4\\x=3\end{cases}(TM)$

Trường hợp 4: $\begin{cases}x-y=-2\\x-5=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6\\x=4\end{cases}(TM)$

Vậy có 4 cặp (x,y) thỏa mãn là: $(7;\ 6);\ (6;\ 4);\ (3;\ 4);\ (4;\ 6)$.

Bài 66:

Ta có $xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0\Leftrightarrow(y+1)(xy+x-y-129)=-128=-2^7$

$\Rightarrow y+1\in\{2;4;8;16;32;64;128\}\Rightarrow y\in\{1;3;7;15;31;63;127\}\Rightarrow(x;y)\in\{(33;1),(25;3),(15;7)\}$.

Bài 67:

Xét phương trình: $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta\ge0\Rightarrow n^4-4n-4\ge0\Rightarrow n\notin\{0;1\}$ $\left(\text{do } n\in N\right)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta được: $\begin{cases}x_1+x_2=n^2\\x_1x_2=n+1\end{cases}$

$\Rightarrow x_1+x_2-x_1x_2=n^2-n-1$

$\Leftrightarrow x_1\left(1-x_2\right)-\left(1-x_2\right)=n^2-n-2$

$\Leftrightarrow\left(x_1-1\right)\left(1-x_2\right)=\left(n-2\right)\left(n+1\right)$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = (2 - n)(n + 1)$

Với $n \in N, n \notin \{0;1\}$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = n^2 \geq 4 \\ x_1x_2 = n + 1 \geq 3 \end{cases}$

Do đó $x_1 \geq 1; x_2 \geq 1 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \Rightarrow (2 - n)(n + 1) \geq 0$

$\Rightarrow 2 - n \geq 0$ $(\text{do } n + 1 > 0, \forall n \in N) \Rightarrow n \leq 2$

Mà $n \in N, n \notin \{0;1\} \Rightarrow n = 2$. Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ (t/m\ x \in Z) \\ x = 3 \ (t/m\ x \in Z) \end{array}\right.$$

Vậy với $n \in N$, để phương trình đã cho có các nghiệm là số nguyên thì $n = 2$.

Bài 68:

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y, x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$

=> $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = \dfrac{85}{13} \Leftrightarrow 85(x + y) = 13(x^2 + y^2) > 0$

=> $x + y > 0$.

Áp dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x + y)^2}{2} \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Ta có:

$$85(x + y) = 13(x^2 + y^2) \geq \frac{13}{2}(x + y)^2 \Rightarrow x + y \leq \frac{170}{13} \Rightarrow x + y \leq 13$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x + y \,\vdots\, 13 \end{cases} \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 = 85$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x \\ x^2 + (13 - x)^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases} (TM) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của PT là: (x; y) = (6; 7) ; (7; 6)

Bài 69:

Có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ suy ra $n^4 \le 2(n^3+2)$, hay $n^3(n-2)-4 \le 0$.

Nếu $n \ge 3$ thì $n^3(n-2)-4 \ge n^3-4>0$ (Loại). Do đó $n=0;\ 1;\ 2$.

Với $n=0;\ 1$ chỉ ra không tồn tại $a;b$ thỏa mãn đề bài.

Với $n=2$ chỉ ra $a=1;b=3$ hoặc $a=3;b=1$ thỏa mãn đề bài rồi kết luận.

Bài 70:

$$2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$$

$$\Leftrightarrow 2019(x-y)^2+x^2+y^2=2024 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 2019(x-y)^2 \le 2024 \Rightarrow (x-y)^2 \le \frac{2024}{2019} \Rightarrow 0 \le (x-y)^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le |x-y| \le 1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}|x-y|=0\\|x-y|=1\end{array}\right.$$

Nếu $|x-y|=0 \Rightarrow x=y$, từ (1) $\Rightarrow 2x^2=2024 \Rightarrow x^2=1012$ (vô nghiệm nguyên)

Nếu $|x-y|=1$ thì $\left[\begin{array}{l}x-y=1\\x-y=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x-1\\y=x+1\end{array}\right.$ và từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2=5$ (2)

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x-1)^2=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=-2\\y=1\end{array}\right.$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x;y)=(-1;2);(-2;1);(1;-2);(2;-1)$

Bài 71:

$2(2x^2y-x^2-3y-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2-3)(2y-1)=5$ (*)

Suy ra $2y-1 \in Ư(5)=\{\pm 1;\pm 5\}$ mà $2y-1>-1, \forall y>0$ nên $\left[\begin{array}{l}2y-1=1\\2y-1=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$.

Với $y=1$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2(n)\\x=-2(l)\end{array}\right.$

Với $y=3$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn là $x=2, y=1$.

Bài 72:

$\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x+y+3}+1=x+2\sqrt{xy}+y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Leftrightarrow x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=\dfrac{xy-x-y+1}{4}$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy=k^2 \Rightarrow \sqrt{xy}=k$

Ta có $x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=xy-2\sqrt{xy}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{xy}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}-1$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=k-1-\sqrt{x} \Leftrightarrow y=(k-1)^2-2(k-1)\sqrt{x}+x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{(k-1)^2+x-y}{2(k-1)}$ **vì** $(k>2)$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x=a^2; y=b^2$

Từ (*) $a+b=ab+1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$

Ta tìm được $(a;b)=(2;3);(3;2) \Leftrightarrow (x;y)=(4;9);(9;4)$

Bài 73:

ĐK: $199-x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 200 \Rightarrow x \in \{-15;-14;-13;...;12;13\}$ (Vì $x \in Z$)

Ta có: $4y^2 = 2+\sqrt{199-x^2-2x} = 2+\sqrt{200-(x+1)^2} \leq 2+10\sqrt{2} \Rightarrow 0 < y^2 \leq 4$, mà $y \in Z$

Suy ra: $y \in \{-2;-1;1;2\}$.

$y=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=13 \end{array}\right.$; $\quad y=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=13 \end{array}\right.$; $\quad y=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$;

$y=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đề bài là:

$S=\{(13;-1),(13;1),(-15;-1),(-15;1),(-3;2),(-3;-2)(1;2),(1;-2)\}$

Bài 74:

Vì x,y nguyên dương và $(x;y)=(1;1)$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2+y^2+1>3; xy+x+y>3$. Suy ra $xy+x+y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$

Nếu $xy+x+y=5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=6$ ta được các trường hợp

+) $\begin{cases} x+1=2 \\ y+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

+) $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

Nếu $xy+x+y=6 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=7$ không thỏa mãn

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;2),(2;1)$.

Bài 75:

Vì 65 lẻ nên $2x+5y+1$ lẻ và $2^{|x|-1}+y+x^2+x$ lẻ

Mà $2x+1$ lẻ nên $5y$ chẵn, suy ra y chẵn

Mặt khác $x^2+x=x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|-1}$ lẻ, suy ra $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với x = 1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Rightarrow y=2$

Với x = -1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Leftrightarrow 5y^2+4y-66=0$ Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy: $(x;y)=(1;2)$

Bài 76:

Ta có $2^m.m^2 = 9n^2 -12n +19 \Leftrightarrow 2^m.m^2 = (3n-2)^2 +15$

Nếu m lẻ $\Rightarrow$ m= 2k +1, $k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^m.m^2 = 2.4^k.m^2 = (3+1)^k 2m^2 \equiv 2m^2 \pmod 3$ mà $m^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ nên $2.4^k.m^2 \equiv 0;2 \pmod 3$.

Mặt khác $(3n-2)^2 +15 \equiv 1 \pmod 3$

Vậy trường hợp này không xảy ra

Nếu m chẵn $\Rightarrow$ m= 2k , $k \in \mathbb{N}^*$ thì ta có phương trình

$2^{2k}.m^2 - (3n-2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k.m +3n-2)(2^k.m -3n+2) = 15$ (*)

Vì $m,n \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k.m +3n-2 > 2^k.m -3n+2$ và

$2^k.m +3n-2 >0 \Rightarrow 2^k.m -3n+2 >0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=15 \\ 2^k.m-3n+2=1 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=5 \\ 2^k.m-3n+2=3 \end{array}\right.$

TH1: $\left[\begin{array}{l}2^k.m+3n-2=15\\2^k.m-3n+2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}2^k.2k=8\\n=3\end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2: $\left[\begin{array}{l}2^k.m+3n-2=5\\2^k.m-3n+2=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}2^k.2k=4\\n=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\n=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm m = 2, n = 1

Bài 77:

Từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ ta nhận thấy 3x-1 phải chia hết cho (x^2-x+1)

ta có (3x - 1)(3x - 2) = $9x^2$ - 9x + 2 = $9(x^2-x+1)$ - 7 cũng phải chia hết cho (x^2-x+1)

suy ra 7 chia hết cho (x^2-x+1)

(x^2-x+1) = 1 hoặc 7

Thay x = 0,1,3 và -2 lần lượt vào ta có y => (x,y) = (1,1),(1,-2) và (-2,1)

Bài 78:

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2+y^3-3y^2+4=3$

hay $(y-2)^2(x^2+y+1)=3$.

Suy ra $(y-2)^2=1$ và $x^2+y+1=3$. Giải ra, ta được $x=\pm1$ và $y=1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

Bài 79:

Điều kiện: $x\ge 0; y\ge; \sqrt{x}+y-2\ge 0$

Với điều kiều kiện trên bình phương 2 vế ta có

$2\left(\sqrt{x}+y-2\right)=\sqrt{x}.y \Leftrightarrow \sqrt{x}(2-y)-2(2-y)=0 \Leftrightarrow (2-y)\left(\sqrt{x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow y=2 \vee x=4$

Kết hợp với điều kiện ta có: $x\ge 0, y=2$ và $x=4, y\ge 0$

Bài 80:

Ta có $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

+ Nếu x + y = 0 $\Rightarrow$ xy(xy + 1) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}xy=0\\xy=-1\end{array}\right.$

Với xy = 0. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ x = y = 0

Với xy = -1. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

+ Nếu $x+y\neq 0 \Rightarrow (x+y)^2$ là số chính phương xy(xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là (x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)

Bài 81:

Ta có $x^5+y^2=xy^2+1\Leftrightarrow\left(x^5-1\right)-\left(xy^2-y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)-y^2(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1-y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^4+x^3+x^2+x+1=y^2\end{array}\right.$

*Nếu $x-1=0\Rightarrow x=1$ ta có $1+y^2=y^2+1$ đúng với mọi y nguyên

Vậy ngiệm của PT là $(1;y\in Z)$

*Nêu $x^4+x^3+x^2+x+1=y^2\Rightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2y)^2$

Ta có

$(2y)^2-\left(2x^2+x\right)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4-4x^4-4x^3-x^2$

$=3x^2+4x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$

Vậy ta có $(2x^2+x)^2<(2y)^2$ *

Ta có $\left(2x^2+x+2\right)^2-(2y)^2=5x^2\geq 0$, Vậy ta có $(2y)^2\geq\left(2x^2+x+2\right)^2$ **

Từ * và ** ta có

$(2x^2+x)^2<(2y)^2\leq\left(2x^2+x+2\right)^2\Rightarrow(2y)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2$;

$(2y)^2=\left(2x^2+x+2\right)^2$

Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+1)^2\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

+ nếu $x=-1\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm1$

+Nếu $x=3\Rightarrow y^2=121\Rightarrow y=\pm11$

-Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+2)^2\Leftrightarrow -5x^2=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm1$.

Kết luận (x, y) = (-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11); (0, 1); (0, -1); là $(1,y\in Z)$.

Bài 82:

Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2=54$ (1)

+) Lập luận để $z^2\,\vdots\,3\Rightarrow z\,\vdots\,3\Rightarrow z^2\,\vdots\,9\Rightarrow z^2\geq 9$ (*)

$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)=54 \quad (2)$

$(2) \Rightarrow 54=3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6) \geq 3(x-3)^2+2.9+3y^2.3$

$(x-3)^2+3y^2 \leq 12$

$\Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2=1; y^2=4$ vì y nguyên dương

Nếu $y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2+5z^2=72 \Rightarrow 5z^2 \leq 72 \Rightarrow z^2 \leq \dfrac{72}{5} \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$ (vì có(*))

Khi đó $3(x-3)^2=27 \Rightarrow (x-3)^2=9$, x nguyên dương nên tìm được x=6

Nếu $y^2=4 \Leftrightarrow y=2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2+14z^2=126 \Rightarrow 14z^2 \leq 126 \Rightarrow z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$ (vì z nguyên dương)

Suy ra $(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$ (vì x nguyên dương) . Đáp số $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

Bài 83:

Đặt $a=x+y, b=xy\,(a,b \in Z)$ và $a^2 \geq 4b$

Phương trình (1) trở thành: $b^2.a+a=2+b \Leftrightarrow a=\dfrac{2+b}{b^2+1}$

Do đó: $(2+b) \vdots (b^2+1) \Rightarrow a^2-4 \vdots b^2+1 \Rightarrow (a^2+1)-5 \vdots b^2+1 \Rightarrow 5 \vdots a^2+1$

$\Rightarrow a^2+1 \in \{1;5\} \Rightarrow a \in \{0,4\} \Rightarrow a \in \{0;-2;2\}$

Với $a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0;2),(2;0)\}$

Với $a=-2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn x, y nguyên)

Với $a=2 \Rightarrow b=\dfrac{4}{5}$ (loại vì b không nguyên)

Vậy nguyện (x, y) = (0, 2); (2, 0).

Bài 84:

Ta có: $xy^2+2xy-243y+x=0 \Leftrightarrow x(y+1)^2=243y$

Vì $y+1 \neq 0$ nên ta có: $x=\dfrac{243y}{(y+1)^2}$

Do (y, y + 1) = 1 nên $(y+1)^2$ là ước của 243 . Mặt khác: $243 = 3^5$

Do đó: $(y+1)^2 = 3^2 \vee (y+1)^2 = 3^4$

Với: $(y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow y = 2, x = 54$

Với: $(y+1)^2 = 3^4 \Rightarrow y = 8, x = 24$

Vậy nghiệm dương của phương trình là: (x, y) = (54, 2); (24, 8)

Bài 84: Xét phương trình $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$ với $x, y \in Z^+$

Xét y = 0 thì $x^2 = 1$ do x nguyên dương nên x = 1

Xét $y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3.$ Ta có: $(x+y)^2(x-y)^2 = y+1 \Rightarrow (y+1) \vdots (x+y)$ (vô lý)

Do đó số nguyên không âm phải tìm là (x, y) = (1, 0).

Bài 85: Ta có $y^2 = 1 + \sqrt{13 - (x^2 + 4x + 4)} = 1 + \sqrt{13 - (x+2)^2} \leq 1 + \sqrt{13}$

Suy ra $1 \leq y^2 \leq 4$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow 13 = (x+2)^2$ không có nghiệm nguyên.

Với $y^2 = 4 \Rightarrow 3 = \sqrt{13 - (x+2)^2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (-2, 0); (-2, -4); (2, 0); (2; - 4).

Bài 86:

Ta có: $|4 - 3x| = 5 - a \quad (1)$

Xét $x \leq \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{a-1}{3}.$

Để x nguyên dương và thuộc khoảng đang xét ta giải hệ $\begin{cases} 0 < \frac{a-1}{3} \leq \frac{4}{3} \\ a - 1 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a = 4$

Khi đó x = 1.

Xét $x > \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{9-a}{3}.$

Giải hệ: $\begin{cases} \frac{9-a}{3} > \frac{4}{3} \\ 9 - a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5 \\ a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3k$ với $k \leq 1.$

Khi đó x = 3 – k

Vậy ta cần a = 4 hoặc a = 3k với k nguyên, $k \leq 1.$

Bài 87: Ta có:

$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$

$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2-4x+4+4y^2-8y+4-2x^2y-4xy^2+8xy=5$

$\Leftrightarrow \left(x^2y^2-4xy^2+4y^2\right)+\left(x^2-4x+4\right)+\left(-2x^2y+8xy-8y\right)=5-4$

$\Leftrightarrow y^2\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-4x+4\right)-2y\left(x^2-4x+4\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)\left(y^2+1-2y\right)=1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2=1$

$TH1:(x-2)=(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=2$

$TH2:(x-2)=(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=0$

$TH3:(x-2)=-(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=0$

$TH4:(x-2)=-(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=2$

Vậy phương trình có các cặp $(x;y)$ nguyên là: $(3;2);(1;0);(3;0);(1;2)$.

Bài 88:

Đặt $\sqrt{x}=a, a>0$, $y^2=b, b>0$.

$4y^4+6y^2-1=x$

$\Leftrightarrow 4b^2+6b-1=a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b-4=4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b+9-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a)=13$

Lập bảng

$4b+3-2a$	1	13
$4b+3+2a$	13	1
a	3	-3
b	1	1
	Nhận	Loại
x	9	
y	1	

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)$ là $(9;1)$.

Bài 89:

Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2(x+y+xy+1) \Leftrightarrow (x+y)^2-y^2(x+y-2)=2(x+y)+3$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-2)-y^2(x+y-2)=3 \Leftrightarrow (x+y-2)\left(x+y-y^2\right)=3$

Vì $x,\ y\in\mathbb{Z}$ nên $x+y-2;\ x+y-y^2$ là các ước của 3

+) $\begin{cases}x+y-2=1\\ x+y-y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=0\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}.$

+) $\begin{cases}x+y-2=-1\\ x+y-y^2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\end{array}\right..$ +) $\begin{cases}x+y-2=3\\ x+y-y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=7\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\end{array}\right..$

+) $\begin{cases}x+y-2=-3\\ x+y-y^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=0\\ x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}.$

Vậy các cặp số nguyên $(x;\ y)$ là $(3;0);\ (3;-2);\ (-1;2);\ (7;-2);\ (3;2);\ (-1;0)$.

Bài 89:

Ta có

$$(x-2018)^2+1=y^4+9y^2+1-6y^3-6y+2y^2=\left(y^2-3y+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-3y+1\right)^2-(x-2018)^2=1\Leftrightarrow\left(y^2-3y+1+x-2018\right)\left(y^2-3y+1-x+2018\right)=1$$

TH1 : $\begin{cases}\left(y^2-3y+1+x-2018\right)=-1\\ \left(y^2-3y+1-x+2018\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=2\end{array}\right.\end{cases}$

TH2 : $\begin{cases}\left(y^2-3y+1+x-2018\right)=1\\ \left(y^2-3y+1-x+2018\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=3\end{array}\right.\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(2018;0);(2018;1);(2018;2);(2018;3)\}$.

Bài 90:

Ta có (1) $\Leftrightarrow(y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow(y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow(x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8\Rightarrow(x;y)=(2;9)$.

+) $56=7.1.8\Rightarrow(x;y)=(8;3)$.

+) $56=(-8).1.(-7)\Rightarrow(x;y)=(-7;3)$.

+) $56=1.(-8).(-7)\Rightarrow(x;y)=(2;-6)$.

+) $56=(-8).7.(-1)\Rightarrow(x;y)=(-7;9)$.

+) $56=7.(-8).(-1)\Rightarrow(x;y)=(8;-6)$.

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

Bài 91:

Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$

Xét các trường hợp ta có $(x;y)=(3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4)$.

Bài 92:

Để phương trình có nghiệm thì $9x^2+16x+32$ phải là một số chính phương.

Khi đó $9x^2+16x+32=t^2\left(t\in\mathbb{N}\right)$. Phương trình trên tương đương với

$$81x^2+144x+288=9t^2 \Leftrightarrow 81x^2+2.9.8+64+224=9t^2$$

$$\Leftrightarrow (9x+8-3t)(9x+8+3t)=-224=-2^4.14=-2^3.28=-2^2.56=-2.112$$

$$=2^4.(-14)=2^3.(-28)=2^2.(-56)=2.(-112)$$

Ta có $x\in Z; t\in N$ nên $9x+8+3t>9x+8-3t$ $9x+8-3t; 9x+8+3t$ cùng tính chẵn lẻ.

Lại thấy $9x+8+3t$ và $9x+8-3t$ đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.

$$\begin{cases}9x+8+3t=14\\9x+8-3t=-16\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=56\\9x+8-3t=-4\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=8\\9x+8-3t=-28\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=2\\9x+8-3t=-112\end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $x\in\{-7;-2;-1;2\}$

+ Với $x=-1 \Rightarrow -27-16y=5 \Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn).

+ Với $x=-2 \Rightarrow -30-16y=6 \Rightarrow y=-\frac{9}{4}$ (loại).

+ Với $x=2 \Rightarrow -18-16y=10 \Rightarrow y=\frac{7}{4}$ (loại)

+ Với $x=-7 \Rightarrow -45-16y=19 \Rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(-1;-2),(-7;-4)$.

Bài 93:

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0$. nhận thấy đây là phương trình có bậc là hai nên ta sẽ sử dụng delta để giải phương trình nghiệm nguyên này.

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

Xem phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x ta được

$$\Delta=(3y-1)^2-4(2y^2-5)=y^2-6y+21=(y-3)^2+12$$

Để phương trình trên có nghiệm là nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta=(y-3)^2+12=a^2 \Leftrightarrow (a-y+3)(a+y-3)=12$ với a là số nguyên.

Vì $a-y+3$ và $a+y-3$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có bảng sau

$a-y+3$	2	6	-2	-6
$a+y-3$	6	2	-6	-2
a	4	4	-4	-4
y	5 (TM)	1 (TM)	1 (TM)	5 (TM)

Thay $y=5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2+14x+45=0 \Leftrightarrow x \in \{-9;-5\}$

Bài 94:

Ta có $x\left(x^2+x+1\right)=4^y-1 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+1\right)=4^y$

Do $x,y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x,y \geq 0$

- Nếu $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $x>0 \Rightarrow y>0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x=2k+1\,(k \geq 0)$

Khi đó $(k+1)\left(2k^2+2k+1\right)=4^{y-1}$

Do $2k^2+2k+1$ là số lẻ nên suy ra $k=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (x;y)=(1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0);(1;1)$

Bài 95:

Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2}+19)=y^2$ $(x\geq 2)$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=(3^{2k+1}+1)+18=4.B+18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x-2=2k$ là số chẵn

Ta có $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow \left(z-3^k\right)\left(z+3^k\right)=19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k<z+3^k$ nên

$$\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$$

Vậy $x=6$ và $y=30$.

Bài 96:

Nếu $x=0 \Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Nếu $y=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3\left(54x^3+1\right)=4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow \left(4.27x^3+1\right)^2=(6xy)^3+1$$

Đặt $4.27x^3=a; 6xy=b$ ta được phương trình

$$(a+1)^2=(b+1)\left(b^2-b+1\right) \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1>0$. Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \,\vdots\, d \\ b^2-b+1 \,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1=b(b+1)-2(b+1)+3 \,\vdots\, d \Rightarrow 3 \,\vdots\, d$$

Mặt khác $(a+1)^2=\left(4.27x^3+1\right)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow \left(b+1;b^2-b+1\right)=1$

Từ $(*)$ nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases}$ $(m;n\in\mathbb{N}^*;m\geq 2;m^2\geq 4)$

Ta có $n^2=(m^2-1)^2-(m^2-1)+1$

$\Leftrightarrow n^2=(m^2-1)^2-(m^2-2)$ (1); $n^2=(m^2-2)^2+(m^2-1)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m^2-2)^2<n^2<(m^2-1)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 97:

Ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ (1)

$\Rightarrow 7(x+2y)\vdots 5 \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$. Đặt $x+2y=5t$ (2) $(t\in Z)$ thì

(1) trở thành $x^2+xy+y^2=7t$ (3).

Từ (2)$\Rightarrow x=5t-2y$ thay vào (3) ta được $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*), coi đây là PT bậc hai đối với y có: $\Delta=84t-75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\geq 0$ $\Leftrightarrow 0\leq t\leq \dfrac{28}{25}$

Vì $t\in Z\Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$. Thay vào (*) :

+ Với $t=0\Rightarrow y_1=0\Rightarrow x_1=0$

+ Với $t=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=3\Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2\Rightarrow x_3=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0), (-1; 3) và (1; 2)

Bài 98:

Ta có $x(1+x+x^2)=4y(y-1)\Leftrightarrow (x^3+x^2)+x+1=4y^2-4y+1$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=(2y-1)^2$ (1)

Vì $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow (2y-1)^2>0$ nên từ (1) suy ra $x\geq 0$ và x chẵn.

Giả dử $(x+1;x^2+1)=d\Rightarrow d$ lẻ và $\begin{cases} x^2-1\vdots d \\ x^2+1\vdots d \end{cases}\Rightarrow 2\vdots d\Rightarrow d=1$

Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương mà $(x+1;x^2+1)=1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.

Do $x\geq 0\Rightarrow x^2<x^2+1\leq (x+1)^2\Rightarrow x^2+1=(x+1)^2\Rightarrow x=0$

Khi $x=0\Rightarrow 4y(y-1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$

Vậy hai cặp số nguyên $(x;y)=(0;0);(0;1)$

Bài 99:

Ta có $x^2 = 2x + \overline{yzz4} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \overline{yzz5}$; x, y, $z \in \mathbb{Z}^+$ và $y, z \in \{1; 2; ...; 9\}$

Suy ra $x - 1$ có dạng $\overline{a5}$

Do đó $\overline{yzz5} = \overline{a5}^2 = (10a+5)^2 = 100a(a+1) + 25$

Suy ra $z = 2 \Rightarrow y + z + z + 5 = y + 9$

Vì $(x-1)^2 = \overline{yzz5}$ là số chính phương và có tổng các chữ số bằng $y + 9$ nên $\overline{yzz5}$ chia cho 9 dư 0, 1, 4, 7. Do đó $y \in \{1; 4; 7\}$

Khi đó tìm được $(x, y, z) \in \{(36; 1; 2); (66; 4; 2); (86; 7; 2)\}$.

Bài 100:

Ta có $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x - y - z) + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2 + 4\sqrt{3}(x-y-z) + 12 = 4yz$ (1)

TH1. Nếu $x - y - z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3} = \dfrac{4yz - (x-y-z)^2 - 12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x, y, z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x - y - z = 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ yz = 3 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ thử lại thỏa mãn

Bài 101:

$2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - x(2y^2 - y + 1) + 2y^2 - y - 1 = 0$ (1)

Đặt $2y^2 - y + 1 = a$, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2 - ax + a - 2 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Δ là số chính phương

Đặt $(a-2)^2 + 4 = k^2$ $(k \in N)$ $\Leftrightarrow k^2 - (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (k + a - 2)(k - a + 2) = 4$

Vì $(k + a - 2) + (k - a + 2) = 2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k + a - 2)$ và $(k - a + 2)$ là số chẵn.

Do đó $\begin{cases} k + a - 2 = 2 \\ k - a + 2 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k + a - 2 = -2 \\ k - a + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ a = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k = -2 \\ a = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a + \sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \\ x = \dfrac{a - \sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0 \end{array}\right.$

Ta có $2y^2 - y - 1 = a = 2 \Leftrightarrow\ 2y^2 - y - 1 = 0 \ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta chọn $y = 1$ (vì y $\in$ Z)

Vậy nghiệm nguyên $(x\ ;\ y)$ của phương trình là $(2\ ;\ 1)$ và $(0\ ;\ 1)$

Bài 102:

Xét $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Xét $x \ge 2$ thì $4^x \vdots 8$. Nếu y chẵn, đặt $y = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1 + 3^y = 1 + 9^k \equiv 2 \left(\bmod 8\right)$, vô lí

Nếu y lẻ $y = 2k + 1\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1 + 3^y = 1 + 9^k.3 \equiv 4\left(\bmod 8\right)$, vô lí.

Vậy $x = y = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 103.

Nhận thấy x, y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320} = 2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỷ.

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$$(x+y)^2 + 4xy - 3361 = 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} \qquad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là của vế trái và vế phải của (1) đều bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + 4xy - 3361 \\ 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} = 0 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y, P = xy$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} S^2 + 4P - 3361 \ \ (2) \\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} \ \ \ (3) \end{cases}$

Từ (3) rút ra được: $P = \dfrac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) thu gọn ta được:

$$S^4 - 3361.S^2 + 4.82.105 = 0 \Leftrightarrow S^2 = 1681 \vee S^2 = 1680 = 41^2$$

Do đó: $S = 41, P = 420$.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 42t + 420 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 20 \\ t = 21 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm (20 ; 21) và (21 ; 20).

Bài 104.

Ta thấy (x, y) = (0 , 0) không là nghiệm của phương trình.

Với x, y khác 0: $(1) \Leftrightarrow |4x-6y|+|9x-6y| = \sqrt{313(x^2+y^2)}$

Ta dễ dàng chứng minh được: $|A|+|B| = \begin{cases} |A+B| & (A.B \ge 0) \\ |A-B| & (A.B<0) \end{cases}$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y) \ge 0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |13x-12y| = \sqrt{313(x^2+y^2)} \Leftrightarrow 144x^2+2.13.12xy+169y^2=0 \Leftrightarrow 12x+13y=0$

Vì (13,12) = 1 nên $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \ne 0$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y)<0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |5x| = \sqrt{313(x^2+y^2)} \Leftrightarrow 288x^2+313y^2=0$ (VN)

vậy phương trình có nghiệm $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \ne 0$

Bài 105.

Phương trình đã cho được viết dưới dạng: $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2x+1)} \Leftrightarrow 4y = 2x+1+\frac{3}{2x+1}$

Vì $x, y \in Z \Rightarrow 2x+1$ là ước của 3 $\Rightarrow 2x+1 \in \{1;-1;3;-3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;1),(-1;-1),(1;1)(-2;-1)$

Bài 106.

Nếu $\left(A+B\sqrt{3}\right)^2 = C+D\sqrt{3}$ thì $C = A^2+3B^2, D = 2AB \Rightarrow \left(A-B\sqrt{3}\right)^2 = C-D\sqrt{3}$

Do đó nếu $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2 = 444444+303030\sqrt{3}$

Thì ta cũng có: $\left(x-y\sqrt{3}\right)^2 = 444444-303030\sqrt{3}$ (vô lý)

Do $444444-303030\sqrt{3}<0$.

Bài 107.

Đặt s = x + y, p = x. y khi đó $s, p \in N^*$. Lúc đó phương trình trở thành:

$3s^2 = 4p+664$ (1)

Nếu p =1 thì $s \notin N^*$ (mâu thuẫn)

Vì vậy $p \ge 2$ và $3s^2 \ge 672 \Rightarrow s^2 \ge 224$ (2)

Mặt khác từ điều kiện: $s^2 \ge 4p$, ta có $3s^2-664 \le s^2$. Vì vậy: $s^2 \le 332$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $s^2 \in \{256;324\}$

a) $s^2 = 256 \Rightarrow s = 16, p = 26 \Rightarrow x \notin N^*$.

b) $s^2 = 324 \Rightarrow s = 18, p = 77 \Rightarrow (x,y) = (11,7);(7,11)$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (11, 7); (7,11).

Bài 108.

Ta có:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8\left(x^2 + xy + y^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 + y^2\right) + y\left(x^2 + y^2\right) = 8\left(x^2 + y^2\right) + 8xy + 8$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y - 8\right) = 8xy + 8 \quad (1)$$

Suy ra: x, y chung tính chăn lẻ và (x + y – 8) là số chẵn.

Nếu $x + y - 8 \geq 6$ thì $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \geq \dfrac{14^2}{2} > 4$

Suy ra: $\left(x^2 + y^2\right)\left(x + y - 8\right) \geq 6\left(x^2 + y^2\right) \geq 2\left(x^2 + y^2\right) + 8xy > 8 + 8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x + y - 8 \leq -4$ thì $\left(x^2 + y^2\right)\left(x + y - 8\right) \leq -4\left(x^2 + y^2\right) \leq 8xy < 8 + 8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x + y - 8 = 2$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4xy + 4$. Khi đó: $x + y = 10, xy = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Nếu $x + y - 8 = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 8xy + 8 = 0 \Leftrightarrow xy + 1 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên vì $x + y = 8$

Nếu $x + y - 8 = -2$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy + 4 = 0$. Khi đó: $x + y = 6, xy = -20$ không có nghiệm nguyên.

Kết luận: Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 8) ; (8, 2).

Bài 109.

Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + 17\left[y^2 + 2xy + 3(x + y)\right] = 1740$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng như sau:

$x = 17k \pm r$ với $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $k \in Z$

Từ đó suy ra: $x^2 \in \{17k, 17k+1, 17k+4, 17k+9, 17k+8, 17k+16, 17k+2, 17k+15, 17k+13\}$.

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Tron khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 110.

Ta có:

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 27-3=3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=8 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} x+y=a\in Z \\ y+z=b\in Z \\ z+x=c\in Z\end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6\Rightarrow a\ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1\end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=-1\end{cases}\Leftrightarrow x-5;y=4;z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 111.

Ta có:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-6x+9)+6x^2+2z^2+3y^2z^2=33$$
$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2+(3y^2+2)(z^2+2)=37$$

Dễ dàng thấy: $3(x-3)^2\le 33\Leftrightarrow(x-3)^2\le 11$

Suy ra: $(x-3)^2\in\{0,1,4,9\}$

+ Với $(x-3)^2=0\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=37$

Nhận xét: $3y^2+2\ge 2$ và $z^2+2\ge 2$ (*)

Vậy trương trường hợp này phương trình vô nghiệm

+ Với $(x-3)^2=1\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=34$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=17 \\ z^2+2=2\end{cases}\vee\begin{cases} 3y^2+2=2 \\ z^2+2=17\end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=4\Rightarrow(3y^2+2)(z^2+2)=25$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=5 \\ z^2+2=5\end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=9$:

$$\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=10 \Leftrightarrow \begin{cases}3y^2+2=2\\ z^2+2=5\end{cases} \vee \begin{cases}3y^2+2=5\\ z^2+2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ z=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-1\\ z=0\end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên:

$(x,y)=(6,1,0);(6,-1,0);(0,1,0);(0,-1,0)$

Bài 112.

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) *thỏa mãn đẳng thức:*

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a^3+3a^2+3a+1)-(b^3+3b^2+3b+1)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a+1)^3-(b+1)^3=(a+1)(b+1)+25$ (*)

Đặt $x=a+1, y=b+1 (x,y\in Z; x,y\ge 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3-y^3=xy+25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=xy+25$ (**)

+ Từ (**) suy ra $x>y\Rightarrow x-y\ge 1$, mà $x^2+xy+y^2>0$ nên:

$x^2+xy+y^2\le xy+25\Rightarrow x^2+y^2\le 25\Rightarrow x\le 4$ (1).

+ Hơn nữa: $x>y$ và $x,y\ge 2$ nên $xy\ge 6$.

Suy ra $x^3-y^3=xy+25\ge 31\Rightarrow x^3>31\Rightarrow x>3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x=4$. Do $x>y$ và $y\ge 2$ nên $y\in\{2;3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ là cặp số cần tìm.

Bài 113.

$$PT \Leftrightarrow \left[x^2+4(y^2+7)\right]=17\left[x^4+(y^2+7)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2(y^2+7)+(y^2+7)^2=0\Leftrightarrow\left[4x^2-(y^2+7)\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0\Leftrightarrow (2x+y)(2x-y)=7$$

Do x,y nguyên dương nên $2x+y\ge 2x-y$ và $2x+y>0$

Vậy $\begin{cases}2x+y=7\\ 2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow (x;y)=(2;3)$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3)$

Bài 114.

$x^2(y-1)-xy=x-y+1 \Rightarrow y(x^2-x+1)=5x^2+x+1 \Rightarrow y=\dfrac{5x^2+x+1}{x^2-x-1}=5+\dfrac{6x-4}{x^2-x+1}\quad (1)$

Do $x^2-x+1=(x-1)^2+\dfrac{3}{4}>0$ và $x^2-x+1=x(x-1)+1$ là số lẻ

Mặt khác y là số nguyên nên phải có $(3x-2)\vdots(x^2-x+1)$ hay $(3x^2-2x)\vdots(x^2-x+1)$

Lại có: $3(x^2-x+1)\vdots(x^2-x+1)$. Suy ra: $(x-3)\vdots(x^2-x+1) \Rightarrow (3x-9)\vdots(x^2-x+1)$

Ta có: $\begin{cases}(3x-9)\vdots(x^2-x+1)\\(3x-2)\vdots(x^2-x+1)\end{cases} \Rightarrow 7\vdots(x^2-x+1)$

Nếu $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. ta được nghiệm (0, 1); (1, 7)

Nếu $x^2-x+1=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$

Với x = -2 thì y không nguyên

Với x = 3 thì y = 7.

Vậy phương trình cso 3 nghiệm (x, y) = (0, 1); (1, 7); (3, 7).

Bài 115.

Ta có: $25=(ac-3bd)^2+(ad+bc)^2=8(bd)^2+(ac-bd)^2+(ad-bc)^2 \le 8(bd)^2$.

Suy ra $(bd)^2 \le \dfrac{25}{8}<4$ mà bd nguyên nên $|bd|<1$

Với bd = 0 thì ta tìm được các bộ số (a, b, c, d) như sau

$(1,0,4,3),(-1,0,-4,-3),(4,3,1,0),(-4,-3,-1,0)$

Bài 116.

Ta có: $2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0$.

$\Leftrightarrow (x-y+z)^2+(x-y)^2+(y+z)^2=20$.

Ta thấy 20 chỉ có một dạng phân tích thành tổng bình phương 3 số đó là: $20=0^2+2^2+4^2$ Do $x-y+z>0, y+z>0 \Rightarrow x-y=0$

Từ đây ta giải ra được nghiệm x = y = z = 2 tức là tâm giác đều

Bài 117.

Giả sử phương trình có nghiệm dương (x, y)

Với các số dương a, b kí hiệu (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b.

Đặt $(x,y)=d$ ta có $x=dx_1, y=dy_1$ với $x_1, y_1 \in N^*$ và $(x_1,y_1)=1$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow d(x_1^3+y_1^3)=(x_1+y_1)^2+(x_1y_1)^2 \qquad (2)$

Với lưu ý rằng $(x_1y_1)^2 \vdots (x_1+y_1)$ (3)

Từ $(x_1, y_1) = 1$ suy ra $(x_1y_1, x_1+y_1) = 1$. Kết hợp với (3) ta được $x_1y_1 \vdots (x_1+y_1)$ và đó đó $x_1+y_1=1$, mâu thuẫn với $x_1, y_1 \in N^*$

Vậy phương trình đã cho không cso nghiệm nguyên dương.

Bài 118.

Xét phương trình:

$$\begin{aligned}&x^2y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0\\&\Leftrightarrow x^2\left(xy^3+1\right)-4\left(xy^3+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=0\\&\Leftrightarrow \left(xy^3+1\right)\left(x^2-4\right)+\left(y-1\right)^2=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Ta thấy với x, y là số tự nhiên thì :

$$xy^2+1>0, \quad (y-1)^2 \ge 0$$

Do đó $x^2-4 \le 0$. Nghĩa là x chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 2

Với x = 0 thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y - 3 = 0$ hay y = -1 (loại) hoặc y = 3.

Với x = 1 thì $3y^3 + 3 - (y-1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Với x = 2 thì y = 1

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2, 1) (0, 3).

Bài 119.

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 <=> (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$$\begin{aligned}&<=> 2(x^2-xy+y^2-x-y)=0\\&<=> (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2\end{aligned}$$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x-y=0\\(x-1)^2=1 <=> x=y=2, z=4\\(y-1)^2=1\end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x-1=0\\(x-y)^2=1 <=> x=1, y=2, z=3\\(y-1)^2=1\end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}y-1=0\\(x-y)^2=1 <=> x=2, y=1, z=3\\(x-1)^2=1\end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 120.

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$

$\frac{x-y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(x-y) = 3(x^2-xy+y^2) \Leftrightarrow 7(x-y) = \frac{9}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2$

Đặt $p = x+y, q = x-y$

Khi đó ta có: $28p = 3(p^2+3q^2)$ (2) , từ đó suy ra $28p \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3$. Đặt $p = 3k$ $(k \in Z)$

Thay giá trị của p vào (2) ta có: $28k = 3(3k^2+q^2)$ (3)

Suy ra $k \vdots 3 \Rightarrow k = 3m (m \in Z)$.

Thay k = 3m vào (3) ta được:

$28m = 27m^2 + q^2 \Rightarrow m(27m-28) = -q^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le m \le \frac{28}{27} \Rightarrow m = 0 \vee m = 1$

Với m = 0 thì q = p = 0 suy ra x = 0, y = 0 (loại)

Với m = 1 thì p = 9 và q = 1 hoặc q = - 1.

Từ đó suy ra x = 5, y = 4 hoặc x = 4, y = 5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (5, 4); (4, 5).