

# BÀI 19. LOGARIT

## CHƯƠNG 6. LOGARIT

### PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

#### Dạng 1. Thực hiện các phép tính lôgarit

**Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính: a)  $\log_3 3\sqrt{3}$ ;      b)  $\log_{\frac{1}{2}} 32$ .

**Lời giải**

$$\text{a) } \log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{2}} 32 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -5.$$

**Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Rút gọn biểu thức:

$$A = \log_2 (x^3 - x) - \log_2 (x+1) - \log_2 (x-1) \quad (x > 1)$$

**Lời giải**

$$A = \log_2 \frac{x^3 - x}{(x+1)(x-1)} = \log_2 \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \log_2 x$$

**Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính  $\log_9 \frac{1}{27}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \log_9 \frac{1}{27} = \log_{3^2} 3^{-3} = \frac{-3}{2} \log_3 3 = -\frac{3}{2}.$$

**Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính:

$$\text{a) } \log_2 2^{-13};$$

$$\text{b) } \ln e^{\sqrt{2}};$$

$$\text{c) } \log_8 16 - \log_8 2;$$

$$\text{d) } \log_2 6 \cdot \log_6 8.$$

**Lời giải**

$$\text{a) } \log_2 2^{-13} = -13.$$

$$\text{b) } \ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{c) } \log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1.$$

$$\text{d) } \log_2 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 6 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 6} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

**Câu 5. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

$$\text{a) } A = \ln \left( \frac{x}{x-1} \right) + \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) - \ln(x^2 - 1);$$

$$b) B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3 (9x^2) - \log_3 9$$

**Lời giải**

$$a) A = \ln \left( \frac{x}{x-1} \right) + \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) - \ln (x^2 - 1) = \ln \frac{x(x+1)}{(x-1)x(x^2-1)} = \ln \frac{x(x+1)}{(x-1)x(x+1)(x-1)}$$

$$= \ln \frac{1}{(x-1)^2} = -\ln(x-1)^2$$

$$b) B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3 (9x^2) - \log_3 9 = \log_3 x^7 + \log_3 (9x^2) - \log_3 9 = \log_3 \frac{x^7 \cdot 9 \cdot x^2}{9}$$

$$= \log_3 x^9 = 9 \log_3 x$$

**Câu 6. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2 \log_9 25 - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$$

$$b) B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4$$

**Lời giải**

a)

$$A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2 \log_9 25 - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = \log_{3^{-1}} 5 + 2 \log_{3^2} 5^2 - \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-1}$$

$$= -\log_3 5 + 2 \log_3 5 + 2 \log_3 5 = 3 \log_3 5$$

$$b) B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4 = 2 \log_a M + \frac{1}{2} \cdot 4 \log_a M = 4 \log_a M$$

**Câu 7. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$$

$$b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n$$

**Lời giải**

a) Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có:

$$A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 7}$$

$$= \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = 3$$

$$b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

**Câu 8.** Cho  $a$  là một số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{5}} a^2 + \log_9 \frac{1}{a}$$

**Lời giải**

Áp dụng công thức đổi cơ số, ta đưa các biểu thức lôgarit về lôgarit cơ số 3 như sau:

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\log_3 a}{-1} = -\log_3 a;$$

$$\log_{\sqrt{3}} a^2 = 2 \log_{\sqrt{3}} a = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\frac{1}{2}} = 4 \log_3 a;$$

$$\log_9 \frac{1}{a} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 3^2} = -\frac{\log_3 a}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức  $A$ , ta được:

$$A = -\log_3 a - 4 \log_3 a - \frac{\log_3 a}{2} = -\frac{11}{2} \log_3 a.$$

Vậy  $A = -\frac{11}{2} \log_3 a$ .

**Câu 9.** Tính  $\log_{25} 32$  theo  $a = \log_2 5$ .

**Lời giải**

Ta thực hiện biến đổi như sau:

$$\log_{25} 32 = \log_{25} 2^5 = 5 \cdot \log_{25} 2 = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{\log_5 25} = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{2} = \frac{5}{2} \log_5 2$$

Mặt khác ta lại có:  $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$ , do đó  $\log_{25} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{5}{2a}$ .

Vậy  $\log_{25} 32 = \frac{5}{2a}$ .

**Câu 10.** Tính:

- a)  $\log_2 \frac{1}{64}$ ;      b)  $\log 1000$ ;      c)  $\log_5 1250 - \log_5 10$ ;      d)  $4^{\log_2 3}$ .

**Lời giải**

a)  $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6$

b)  $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

c)  $\log_5 1250 - \log_5 10 = \log_5 \frac{1250}{10} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

d)  $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

**Câu 11.** Chứng minh rằng:

a)  $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ ;

b)  $\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a [(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})] \\ &= \log_a 1 = 0 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \text{b) } \ln(1+e^{2x}) &= \ln[e^{2x}(1+e^{-2x})] = \ln e^{2x} + \ln(1+e^{-2x}) \\ &= 2x + \ln(1+e^{-2x}). \end{aligned}$$

**Câu 12.** Biết  $\log_2 3 \approx 1,585$ . Hãy tính:

a)  $\log_2 48$ ;

b)  $\log_4 27$ .

**Lời giải**

a)  $\log_2 48 = \log_2(3 \cdot 2^4) = \log_2 3 + \log_2 2^4 \approx 1,585 + 4 = 5,585$

b)  $\log_4 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} = \frac{3\log_2 3}{2} \approx \frac{3}{2} \cdot 1,585 = 2,3775$

**Câu 13.** Đặt  $a = \log_3 5, b = \log_4 5$ . Hãy biểu diễn  $\log_{15} 10$  theo  $a$  và  $b$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\log_{15} 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 15} = \frac{\log_5(2 \cdot 5)}{\log_5(3 \cdot 5)} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 3 + 1}$

Mà  $\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{a}$  và  $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{2b}$

nên  $\log_{15} 10 = \frac{\frac{1}{2b} + 1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{(1+2b)a}{2b(a+1)}$

**Câu 14.** Tìm  $\log_{49} 32$ , biết  $\log_2 14 = a$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\log_{49} 32 = \log_{49} 2^5 = 5\log_{49} 2 = \frac{5}{\log_2 49} = \frac{5}{\log_2 7^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 7}$

Do  $\log_2 14 = a$  nên  $a = \log_2(7 \cdot 2) = 1 + \log_2 7$ . Suy ra  $\log_{49} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a-1}$ .

**Câu 15.** So sánh các số sau:

a)  $\log_3 4$  và  $\log_4 \frac{1}{3}$ ;

b)  $2^{\log_6 3}$  và  $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$ .

**Lời giải**

a)  $\log_4 \frac{1}{3} < \log_3 4$       b)  $2^{\log_6 3} > 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$ .

**Câu 16.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\log_3 9^{\frac{1}{5}}$ ;

b)  $\log \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$

c)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$ .

**Lời giải**

a)  $\log_3 9^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$ ;

$$b) \log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3};$$

$$c) \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{1}{3}} = 5^{-2 \log_5 \frac{1}{3}} = \left(5^{\log_5 \frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

**Câu 17.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5};$$

$$b) \log_4 48 - \log_4 3;$$

$$c) \log_2 \frac{16}{3} + 2 \log_2 \sqrt{6}$$

$$d) \frac{1}{3} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7}$$

**Lời giải**

$$a) \log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5} = \log_3 \left(45 \cdot \frac{1}{5}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2;$$

$$b) \log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \frac{48}{3} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2;$$

$$c) \log_2 \frac{16}{3} + 2 \log_2 \sqrt{6} = \log_2 \frac{16}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{16}{3} \cdot 6\right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5;$$

$$d) \frac{1}{3} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} (\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \log_3 3^2 - \frac{1}{3} \log_3 7 + \frac{1}{3} \log_3 7 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}.$$

**Câu 18.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \log_9 \frac{1}{27};$$

$$b) \log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16};$$

$$c) \log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8$$

**Lời giải**

$$a) \log_9 \frac{1}{27} = \frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = -\frac{3}{2};$$

$$b) \log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16} = \frac{\log_2 9}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 27} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} \cdot \frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 3^3}$$

$$= \frac{2 \log_2 3}{3 \log_2 2} \cdot \frac{-4 \log_2 2}{3 \log_2 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{3} = -\frac{8}{9}$$

b)

$$\begin{aligned} \log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8 &= \frac{\log_2 27}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} \\ c) &= \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} \\ &= \frac{3\log_2 3}{2\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 19.** Biết rằng  $2\log 2 = a, \log 3 = b$ . Biểu thị các biểu thức sau theo  $a$  và  $b$ .

- a)  $\log 18$ ;  
 b)  $\log_2 12$ ;  
 c)  $\log 75$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có  $\log 2 = \frac{a}{2}$ .

a)  $\log 18 = \log(2 \cdot 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = \frac{a}{2} + 2b$

b)  $\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{\log(2^2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{a + b}{\frac{a}{2}} = \frac{2(a + b)}{a}$

c) Ta có  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{a}{2}$ .

Suy ra  $\log 75 = \log(3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2\log 5 = b + 2\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 2 - a + b$

**Câu 20.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $\log_9 \frac{1}{81}$ ;  
 b)  $\log 10000$ ;  
 c)  $\log 0,001$ ;  
 d)  $\log_{0,7} 1$ ;  
 e)  $\log_5 \sqrt[4]{5}$ ;  
 g)  $\log_{0,5} 0,125$ .

**Lời giải**

a)  $\log_9 \frac{1}{81} = \log_9 9^{-2} = -2$ ;

b)  $\log 10000 = \log 10^4 = 4$ ;

c)  $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$ ;

d)  $\log_{0,7} 1 = 0$ ;

e)  $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

g)  $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} 0,5^3 = 3$ .

**Câu 21.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $3^{\log_3 5}$ ;

- b)  $e^{\ln 3}$  ;  
 c)  $7^{2\log_7 8}$  ;  
 d)  $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$  ;  
 e)  $4^{\log_2 \frac{1}{5}}$  ;  
 g)  $0,001^{\log 2}$  .

**Lời giải**

- a) 5 ;  
 b) 3 ;  
 c)  $7^{2\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$   
 d)  $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$  ;  
 e)  $4^{\log_2 \frac{1}{5}} = 2^{2\log_2 \frac{1}{5}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$   
 g)  $0,001^{\log 2} = (10^{-3})^{\log 2} = (10^{\log 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$  .

**Câu 22.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$  ;  
 b)  $\log_5 75 - \log_5 3$  ;  
 c)  $\log_3 \frac{5}{9} - 2 \log_3 \sqrt{5}$  ;  
 d)  $4 \log_{12} 2 + 2 \log_{12} 3$  ;  
 e)  $2 \log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$  ;  
 g)  $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2 \log_3 \sqrt[4]{27}$

**Lời giải**

- a)  $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30 = \log_3 \left(\frac{9}{10} \cdot 30\right) = \log_3 3^3 = 3$  ;  
 b)  $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$  ;  
 c)  $\log_3 \frac{5}{9} - 2 \log_3 \sqrt{5} = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 (\sqrt{5})^2 = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = \log_3 \left(\frac{5}{9} : 5\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$  ;  
 d)  $4 \log_{12} 2 + 2 \log_{12} 3 = \log_{12} 2^4 + \log_{12} 3^2 = \log_{12} (2^4 \cdot 3^2) = \log_{12} (4 \cdot 3)^2 = \log_{12} 12^2 = 2$   
 e)  $2 \log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 2^2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$   
 $= \log_5 4 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2} = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$  ;  
 g)  $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2 \log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} - \log_3 3^{\frac{2}{3}} + 2 \log_3 3^{\frac{3}{4}}$   
 $= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$  .

**Câu 23.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $\log_8 \frac{1}{32}$  ;

- b)  $\log_5 3 \cdot \log_3 5$ ;  
 c)  $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$ ;  
 d)  $\log_{27} 25 \cdot \log_5 81$ .

**Lời giải**

- a)  $\log_8 \frac{1}{32} = \frac{\log_2 \frac{1}{32}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{-5}}{\log_2 2^3} = -\frac{5}{3}$ ;  
 b)  $\log_5 3 \cdot \log_3 5 = \log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 1$ ;  
 c)  $2^{\frac{1}{\log_5 2}} = 2^{\log_2 5} = 5$   
 d)  $\log_{27} 25 \cdot \log_5 81 = \frac{\log_3 25}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 3^3} \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 5} = \frac{2 \log_3 5}{3} \cdot \frac{4}{\log_3 5} = \frac{8}{3}$ .

**Câu 24.** Tính:

- a)  $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$ ;  
 b)  $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27}$ .

**Lời giải**

- a)  $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 3^2 = 2$ ;  
 b)  $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27} = \log_2 5^{-2} \cdot \log_3 2^{-5} \cdot \log_5 3^{-3}$   
 $= (-2) \log_2 5 \cdot (-5) \log_3 2 \cdot (-3) \log_5 3$   
 $= -30 \log_2 5 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 3$   
 $= -30 \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = -30$

**Câu 25.** Sử dụng máy tính cầm tay, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

- a)  $\log_7 21$ ;  
 b)  $\log 2,25$ ;  
 c)  $\ln \sqrt{14}$   
 d)  $\log_{0,5} 3 + \log_5 0,3$ .

**Lời giải**

- a) 1,5646 ;  
 b) 0,3522 ;  
 c) 1,3195 ;  
 d) -2,3333 .

**Câu 26.** Đặt  $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$ . Hãy biểu thị các biểu thức sau theo  $a$  và  $b$ .

- a)  $\log_2 45$ ;  
 b)  $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$

c)  $\log_3 20$ .

**Lời giải**

a)  $\log_2 45 = \log_2 3^2 \cdot 5 = 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b$ ;

b)  $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6} = \log_2 \sqrt{15} - \log_2 6 = \frac{1}{2}\log_2 15 - \log_2 (2 \cdot 3)$   
 $= \frac{1}{2}\log_2 (3 \cdot 5) - (\log_2 2 + \log_2 3) = \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 5) - (1 + \log_2 3)$   
 $= \frac{1}{2}(a + b) - (1 + a) = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1$

c)  $\log_3 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 5)}{\log_2 3} = \frac{2\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2 + b}{a}$ .

**Câu 27.** Đặt  $\log x = a, \log y = b, \log z = c (x, y, z > 0)$ . Biểu thị các biểu thức sau theo  $a, b, c$ .

a)  $\log(xyz)$ ;

b)  $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$

c)  $\log_z (xy^2) (z \neq 1)$ .

**Lời giải**

a)  $\log(xyz) = \log x + \log y + \log z = a + b + c$ ;

b)  $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}} = \log(x^3 \sqrt[3]{y}) - \log(100\sqrt{z}) = \log\left(x^3 y^{\frac{1}{3}}\right) - \log\left(10^2 z^{\frac{1}{2}}\right)$   
 $= 3\log x + \frac{1}{3}\log y - 2 - \frac{1}{2}\log z = 3a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c - 2$ ;

c)  $\log_z (xy^2) = \frac{\log(xy^2)}{\log z} = \frac{\log x + 2\log y}{\log z} = \frac{a + 2b}{c}$ .

**Câu 28.** Đặt  $\log_2 3 = a, \log_3 15 = b$ . Biểu thị  $\log_{30} 18$  theo  $a$  và  $b$ .

**Lời giải**

$$a = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$$

$$\Rightarrow \log_3 5 = b - 1.$$

$$\log_{30} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (2 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 2}{\log_3 2 + 1 + \log_3 5} = \frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + 1 + b - 1} = \frac{2a + 1}{ab + 1}$$

**Câu 29.** Tính:

a)  $\log_{0,5} 0,25$ ;

b)  $8^{\log_2 5}$ ;

c)  $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$  ;

d)  $5^{\log_{25} 16}$  .

**Lời giải**

a)  $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$

b)  $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5^3}) = 5^3 = 125$

c)  $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81} = (10^{-1})^{\log 81} = (10^{\log 81})^{-1} = 81^{-1} = \frac{1}{81}$

d)  $5^{\log_{25} 16} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 16} = (25^{\log_{25} 16})^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

**Câu 30.** Cho  $\log_a b = 2$  . Tính:

a)  $\log_a (a^2 b^3)$  ;

b)  $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt[3]{b}}$  ;

c)  $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$

**Lời giải**

a)  $\log_a (a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b = 2 + 3 \cdot 2 = 8$

b)  $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt[3]{b}} = \log_a a^{\frac{3}{2}} - \log_a b^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \log_a b = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \cdot 2 = -\frac{7}{6}$

c)  $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a b^2 - \log_a 2 = 3 \log_a b = 3 \cdot 2 = 6$

**Câu 31.** Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

a)  $\log_{\sqrt{2}} 8$  ;

b)  $\log_3 \sqrt[3]{9}$  ;

c)  $9^{\log_3 12}$  ;

d)  $2^{\log_4 9}$  .

**Lời giải**

a) 6 .

b)  $\frac{2}{3}$  .

c) 144 .

d) 3 .

**Câu 32.** Tính:

a)  $A = \frac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$

$$B = \frac{36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_2} - 3^{\log_9 36}}{\log_2 (\log_2 \sqrt[4]{2})}$$

b)

$$C = \log_1 (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$$

c)

$$\frac{1}{4};$$

d)

$$D = \log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6.$$

**Lời giải**

a) 9.

b) -8.

c)  $-\frac{1}{2}$ .

d)  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 33.** Cho  $\log_a b = 4$ . Tính:

a)  $\log_a \left( a^{\frac{1}{2}} b^5 \right);$

b)  $\log_a \left( \frac{a\sqrt{b}}{b^3\sqrt{a}} \right);$

c)  $\log_{a^3 b^2} (a^2 b^3);$

d)  $\log_{a\sqrt{b}} (\sqrt[4]{a\sqrt{b}}).$

**Lời giải**

a)  $\frac{41}{2}$ .

b)  $-\frac{4}{3}$ .

c)  $\log_{a^3 b^2} (a^2 b^3) = \frac{\log_a (a^2 b^3)}{\log_a (a^3 b^2)} = \frac{2 + 3 \log_a b}{3 + 2 \log_a b} = \frac{2 + 3 \cdot 4}{3 + 2 \cdot 4} = \frac{14}{11}$

d)  $\frac{9}{28}$ .

**Câu 34.** a) Cho  $\log_2 3 = a$ . Tính  $\log_{18} 72$  theo  $a$ .

b\*) Cho  $\log 2 = a$ . Tính  $\log_{20} 50$  theo  $a$ .

**Lời giải**

a)  $\log_{18} 72 = \frac{2a + 3}{2a + 1}$ .

b\*) Ta có:  $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$  nên  $\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a$ .

Khi đó:

$$\log_{20} 50 = \frac{\log 50}{\log 20} = \frac{1 + \log 5}{1 + \log 2} = \frac{2 - a}{a + 1}.$$

**Câu 35.** Cho  $x > 0, y > 0$  thoả mãn:  $x^2 + 4y^2 = 6xy$ . Chứng minh rằng:

$$2 \log(x + 2y) = 1 + \log x + \log y.$$

**Lời giải**

Ta có:  $x^2 + 4y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x + 2y)^2 = 10xy$ .

Suy ra  $2 \log(x + 2y) = \log(x + 2y)^2 = \log(10xy) = 1 + \log x + \log y$ .

**Câu 36.** Cho  $a, b, c, x, y, z$  là các số thực dương khác 1 và  $\log_x a, \log_y b, \log_z c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\log_b y = \frac{2 \log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z}$$

### Lời giải

Vì  $\log_x a, \log_y b, \log_z c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$2 \log_y b = \log_x a + \log_z c \Leftrightarrow 2 \log_y b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z}$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_y b = \frac{\log_a x + \log_c z}{\log_a x \cdot \log_c z} \Leftrightarrow \log_b y = \frac{2 \log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z}.$$

## Dạng 2. Ứng dụng

**Câu 37. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thể thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

### Lời giải

a) Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng là  $100 \cdot (1 + 6\%) = 106$  (triệu đồng).

Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép

kì hạn 1 tháng là  $100 \left(1 + \frac{6\%}{12}\right)^{12} \approx 106,17$  (triệu đồng).

Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép liên tục là  $100 \cdot e^{6\% \cdot 1} \approx 106,18$  (triệu đồng).

b) Số tiền (cả vốn lẫn lãi) cô Hương có được sau  $n$  năm gửi ngân hàng theo hình thức lãi kép liên tục là  $100 \cdot e^{6\% n}$ .

Ta có:  $150 = 100 \cdot e^{0,06n}$ .

Suy ra  $0,06n = \ln 1,5$  hay  $n \approx 6,76$  năm

Vậy cô Hương phải gửi ngân hàng ít nhất 7 năm thì số tiền cô Hương thu được là 150 triệu đồng.

**Câu 38. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là  $a = 15500(5 - \log p)$  trong đó  $a$  là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và  $p$  là áp suất không khí (tính bằng pascal).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao khoảng 8850 m so với mực nước biển.

### Lời giải

Ta có:  $15500(5 - \log p) = 8850 \Leftrightarrow \log p \approx 4,43$ .

Áp suất không khí ở đỉnh Everest là  $p \approx 10^{4,43} \approx 26915,35(Pa)$ .

**Câu 39. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Mức cường độ âm  $L$  đo bằng deciben ( $dB$ ) của âm thanh có cường độ  $I$  (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là  $W/m^2$ ) được định nghĩa như sau:

$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$  trong đó  $I_0 = 10^{-12} W/m^2$  là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ  $I = 10^{-7} W/m^2$ .
- Giao thông thành phố đông đúc có cường độ  $I = 10^{-3} W/m^2$ .

**Lời giải**

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện có cường độ  $I = 10^{-7} W/m^2$  là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^5 = 50(dB).$$

b) Mức cường độ âm của giao thông thành phố có cường độ  $I = 10^{-3} W/m^2$  là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9 = 90(dB)$$

**Câu 40.** Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức  $pH = -\log [H^+]$ , trong đó  $[H^+]$  là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu  $pH < 7$  thì dung dịch có tính acid, nếu  $pH > 7$  thì dung dịch có tính base và nếu  $pH = 7$  thì dung dịch là trung tính.

- Tính độ  $pH$  của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng  $0,001 mol/l$ .
- Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 8.
- Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

**Lời giải**

a) Thay  $[H^+] = 0,001$  vào công thức, ta được  $pH = -\log [H^+] = -\log 0,001 = 3$ .

Vậy độ  $pH$  của dung dịch bằng 3.

b) Thay  $pH = 8$  vào công thức, ta được  $8 = -\log [H^+]$ , do đó  $[H^+] = 10^{-8} mol/l$ .

Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là  $[H^+] = 10^{-8}$ .

c) Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen giảm đi 10 lần.

**Câu 41.** Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương  $N$  viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức  $[\log N] + 1$ , ở đó  $[\log N]$  là phần nguyên của số thực dương  $\log N$ . Tìm số các chữ số của  $2^{2023}$  khi viết trong hệ thập phân.

**Lời giải**

Số chữ số của  $2^{2023}$  là:  $[\log 2^{2023}] + 1 = [2023 \cdot \log 2] + 1 = 609$ .

**Câu 42.** Khi gửi tiết kiệm  $P$  (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là  $r$  ( $r$  cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền  $A$  (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau  $t$  kì gửi là  $A = P(1+r)^t$  (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

**Lời giải**

Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì  $A = 2P$ .

Thay  $A = 2P$  vào công thức lãi kép ta có:

$2P = P(1+r)^t$ , suy ra  $(1+r)^t = 2$ , là  $t = \log_{1+r} 2$  (năm)

**Câu 43.** Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

#### Lời giải

Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là  $r = 4\% = 0,04$ .

Thay  $P = 100; r = 0,04$  và  $A = 120$  vào công thức  $A = P(1+r)^t$ , ta được:

$120 = 100(1+0,04)^t$ . Suy ra  $1,2 = 1,04^t$ , hay  $t = \log_{1,04} 1,2 \approx 4,65$ .

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức là sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

**Câu 44.** Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay  $0,2mg/ml$ , nghĩa là có  $0,02g$  cồn trong  $100ml$  máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hoá bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó  $x(^{\circ}\%)$  là nồng độ cồn trong máu và  $k$  là một hằng số.

a) Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số  $k$  trong phương trình.

b) Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17% ?

c) Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.

d) Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

#### Lời giải

a) Thay  $R = 1,4$  và  $x = 0,02\%$  vào công thức, ta được:  $1,4 = e^{k \frac{0,02}{100}}$ .  
Suy ra  $k \approx 1682,36$ .

b)  $R = e^{1682,36 \cdot \frac{0,17}{100}} \approx 17,46$ .

c) Thay  $R = 100$  vào công thức, ta được:  $100 = e^{1682,36x}$ . Suy ra  $x \approx 0,27\%$ .

d) Với  $R \geq 5$  thì  $x \geq 0,096\%$ , tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng 0,096% trở lên thì không được lái xe.

**Câu 45.** Trong nuôi trồng thủy sản, độ  $pH$  của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ  $pH$  thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ  $[H^+]$  (mol/L - 1) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được  $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$  (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ  $pH$  của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết  $pH = -\log[H^+]$ .

#### Lời giải

Độ  $pH$  của đầm đó là:  $pH = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,097$ .

Do  $7,097 < 7,2$  nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

**Câu 46.** Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của  $^{14}_6C$  có trong mẫu vật tại thời điểm  $t$  (năm) (so với thời điểm ban đầu  $t=0$ ), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ  $H = H_0 e^{-\lambda t}$  (đơn vị là Becquerel, kí hiệu  $Bq$ ) với  $H_0$  là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm  $t=0$ );  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$  là hằng số phóng xạ,  $T = 5730$  (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là  $0,215 Bq$ . Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là  $0,250 Bq$ . Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

### Lời giải

Gọi  $t$  là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có:  $H = H_0 e^{-\lambda t}$  với  $H = 0,215; H_0 = 0,250; \lambda = \frac{\ln 2}{5730}$ .

Từ đó,  $\lambda t = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \frac{0,250}{0,215} \approx 0,1508$ . Vậy  $t \approx \frac{0,1508}{\lambda} \approx 1247$ .

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.