SỞ GD & ĐT BÌNH PHƯỚC	KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH NĂM HỌC 2023-2024 Môn thi: **TOÁN LỚP 9** Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (5.0 điểm):

1. Cho biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \dfrac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm các giá trị của x để biểu thức P < 0.

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện xyz = 4. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{15\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{xy}+2} + \frac{5\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+3} + \frac{10\sqrt{z}}{3\sqrt{xz}+2\sqrt{z}+2}$$

Bài 2. (5.0 điểm):

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a. $x^2+4x-3+2x\sqrt{x+7}+3\sqrt{x+7}=0$

b. $\begin{cases} x(3x+1)=y(-2y+7x+2) \\ x^2+3xy-4y+3=0 \end{cases}$

2. Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): y = x − 3. Tìm trên parabol (P) hai điểm A và B sao cho AB = $3\sqrt{2}$ và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng (d), biết rằng điểm A có hoành độ âm.

Bài 3. (5.0 điểm): Cho đường tròn (O; R), dây BC cố định và $BC=R\sqrt{3}$. Trên cung lớn BC của (O) lấy điểm A bất kỳ (A khác điểm chính giữa của cung lớn BC). Gọi I là trung điểm của BC, H là giao điểm của hai đường cao BD và CE trong tam giác ABC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K

a. CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

b. CM: HK ⊥ AI và tia KH là tia phân giác của góc BKE

c. CM: AD.HE + AE.HD có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.

Bài 4.(2.0 điểm): Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB, AC theo thứ tự lấy ba điểm M, N, P sao cho N khác A và B và $\widehat{MNP}=60^0$. CMR: $AB \geq 2\sqrt{AP.BM}$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Bài 5. (3.0 điểm):

1. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn : x + y + z =1. CMR:

$$\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{y+yz}} + \frac{z}{z+\sqrt{z+xy}} \leq 1$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$(x-2022)^2 = y^4-6y^3+11y^2-6y$$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (5.0 điểm):

1. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \frac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

   a. Rút gọn biểu thức P.

   b. Tìm các giá trị của x để biểu thức P < 0.

a. ĐK: $x \neq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có:

$$P = \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \frac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12-(5-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)-(1-2\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{12\sqrt{x}-2x+12-15-2\sqrt{x}+x+3-7\sqrt{x}+2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

b. Để P < 0 thì x thỏa mãn ĐK $x \neq 0; x \neq 9$ và

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$$

$$\Leftrightarrow x < 9$$

Vậy $0 \leq x < 9$ thì P < 0.

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện xyz = 4. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{15\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{xy}+2} + \frac{5\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+3} + \frac{10\sqrt{z}}{3\sqrt{xz}+2\sqrt{z}+2}$$

Với xyz = 4 $\Rightarrow \sqrt{xyz} = 2$

$$M = \frac{15\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{xy}+2} + \frac{5\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+3} + \frac{10\sqrt{z}}{3\sqrt{xz}+2\sqrt{z}+2}$$

$$= 5\left(\frac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{xy}+\sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+3} + \frac{\sqrt{xyz}\sqrt{z}}{3\sqrt{xz}+\sqrt{xyz}\sqrt{z}+\sqrt{xyz}}\right)$$

$$= 5\cdot\frac{3+\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+3} = 5$$

Bài 2. (5.0 điểm):

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a. $x^2+4x-3+2x\sqrt{x+7}+3\sqrt{x+7}=0$

b. $\begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) \\ x^2+3xy-4y+3=0 \end{cases}$

HD:

a. Đk: $x \ge -7$

$x^2 + 4x - 3 + 2x\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+7} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+7} + x + 7 + 3x + 3\sqrt{x+7} - 10 = 0.$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+7})^2 + 3(x + \sqrt{x+7}) - 10 = 0$

$\Rightarrow x + \sqrt{x+7} = 2; x + \sqrt{x+7} = -5$

TH1: $x + \sqrt{x+7} = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \ge 0 \\ x + 7 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le 2 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$

TH2: $x + \sqrt{x+7} = -5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x \ge 0 \\ x + 7 = 25 + 10x + x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le -5 \\ x^2 + 9x + 18 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = -6$

KL: Vậy nghiệm của PT là: $x = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$; x = -6.

b. $\begin{cases} x(3x+1) = y(-2y + 7x + 2)(1) \\ x^2 + 3xy - 4y + 3 = 0(2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 3x^2 + x + 2y^2 - 7xy - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)(3x - y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 3x + 1 \end{array}\right.$

TH1: Thay x = 2y vào (2) ta được: $10y^2 - 4y + 3 = 0$ (VN)

TH2: Thay y = 3x + 1 vào (2) ta được: $10x^2 - 9x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = \dfrac{7}{10} \end{array}\right.$$

Vậy HPT có nghiệm là: $(1;4);\left(\dfrac{-1}{10};\dfrac{7}{10}\right)$.

2. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): y = x − 3. Tìm trên parabol (P) hai điểm A và B sao cho AB = $3\sqrt{2}$ và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng (d), biết rằng điểm A có hoành độ âm.

Phương trình đường thẳng AB có dạng: y = -x + b

Hoành độ điểm A, B là nghiệm của phương trình: $x^2 + x - b = 0$ (1), do AB = $3\sqrt{2}$ nên A, B là hai điểm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4b > 0 \Leftrightarrow b < \dfrac{1}{4}$

Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = -1; x_1.x_2 = -b$

Khi đó điểm $A(x_1; -x_1 + b); B(x_2; -x_2 + b)$

$AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 18$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow 1 + 4b = 0$

$\Leftrightarrow b = 2(TM)$

Khi b = 2 PT (1) có nghiệm x = 1; x = -2

x = 1 suy ra y = 1

x = -2 suy ra y = 4

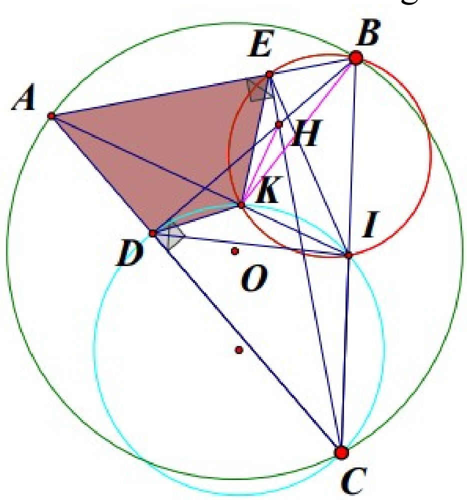
Vì điểm A có hoành độ âm nên A(-2; 4); B(1;1).

Bài 3. (5.0 điểm): Cho đường tròn (O; R), dây BC cố định và $BC = R\sqrt{3}$. Trên cung lớn BC của (O) lấy điểm A bất kỳ (A khác điểm chính giữa của cung lớn BC). Gọi I là trung điểm của BC, H là giao điểm của hai đường cao BD và CE trong tam giác ABC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K

a. CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

b. CM: HK ⊥ AI và tia KH là tia phân giác của góc BKE

c. CM: AD.HE + AE.HD có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.



HD:

a) CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

*) Ta có tứ giác BEKI và DKIC nội tiếp đường tròn nên:

$\widehat{AEK} = \widehat{BIK}; \widehat{ADK} = \widehat{CIK}$

$\Rightarrow \widehat{AEK} + \widehat{ADK} = \widehat{BIK} + \widehat{CIK} = 180^0$

Hay tứ giác AEKD nội tiếp đường tròn

*) Tứ giác AEKD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AKE}$ (Góc nt cùng chắn cung AE)

Tứ giác BEDC nội tiếp

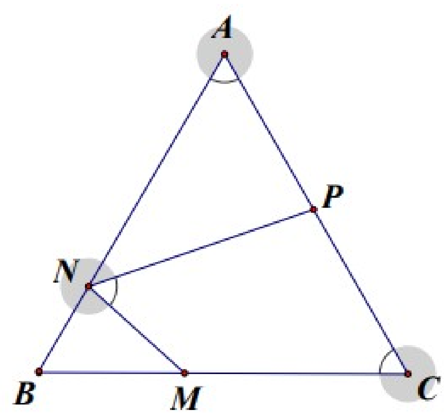
$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với góc EBC)

$\Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AKE} + \widehat{EKI} = \widehat{ABC} + \widehat{EKI} = 180^0$

Hay 3 điểm A, K, I thẳng hàng

b. CM: HK ⊥ AI và tia KH là tia phân giác của góc BKE
Ta có tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH
Suy ra 5 điểm A, E, H, K, D cùn thuộc đường tròn đường kính AH
Hay $\widehat{AKH} = 90^0$
Suy ra $HK \perp AI$
$\widehat{BKI} = \widehat{BEI}$
$\widehat{BEI} = \widehat{EBI}$
$\Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{BKI}$
Mà $HK \perp AI$
Suy ra tia KH là tia phân giác của góc BKE.
c. CM: AD.HE + AE.HD có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.
Kẻ đường kính AJ của (O), đường cao AF của tam giác ABC.
Ta có :
$$BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BI = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$$
$$+)\cos\widehat{BOI} = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$
Suy ra
$\widehat{HBE} = 30^0 \Rightarrow BH = 2HE$
+) BH // CJ, CH // BH
Nên tứ giác BHCJ là hình bình hành
Suy ra: I là trung điểm của HJ ⇒ AH = 2OI = R
Mặt khác: $\Delta AHD \sim \Delta BHF \Rightarrow \frac{AD}{BF} = \frac{AH}{BH} = \frac{R}{2HE} \Rightarrow AD.HE = \frac{R}{2}.BF$
Tương tự: $AE.HD = \frac{R}{2}.CF$
Suy ra: $AD.HE + AE.HD = \frac{R}{2}(BF + CF) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ không đổi
Bài 4.(2.0 điểm): Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB, AC theo thứ tự lấy ba điểm M, N, P sao cho N khác A và B và $\widehat{MNP} = 60^0$. CMR: $AB \geq 2\sqrt{AP.BM}$.
Dấu "=" xảy ra khi nào?



Tam giác BMN có:
$\widehat{BMN} = 180^0 - \widehat{B} - \widehat{BNM} = 120^0 - \widehat{BNM}$
Mà:
$\widehat{ANP} = 180^\circ - \widehat{MNP} - \widehat{BNM} = 120^\circ - \widehat{BNM}$
$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{ANP}$
$\Rightarrow \Delta ANP \sim \Delta BMN(gg)$

$\Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AP}{BN} \Rightarrow AN.BN = AP.BM$

Mà: $AN.BN \le \left(\frac{AN+BN}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow AB \ge 2\sqrt{AP.BM}$

Dấu "=" xảy ra khi N là trung điểm của AB.

Bài 5. (3.0 điểm):

1. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn : x + y + z =1. CMR:

$$\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{y+yz}} + \frac{z}{z+\sqrt{z+xy}} \le 1$$

HD:

Với x, y, z dương ta có:

$$\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} = \frac{x(\sqrt{x+yz}-x)}{x+yz-x^2} = \frac{x(\sqrt{x(x+y+z)+yz}-x)}{x(x+y+z)+yz-x^2} = \frac{x(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x)}{xy+xz+yz}$$

$$\le \frac{x\left(\frac{x+y+x+z}{2}-x\right)}{xy+xz+yz} = \frac{1}{2}\frac{xy+xz}{xy+xz+yz}$$

Tương tự ta có:

$$VT \le \frac{1}{2}\left(\frac{xy+xz}{xy+xz+yz} + \frac{yz+yx}{xy+xz+yz} + \frac{zx+zy}{xy+xz+yz}\right) = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$(x-2022)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$$

Giải:

$(x-2022)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

$\Leftrightarrow (x-2022)^2 = y(y-1)(y-2)(y-3)$

Ta có $y(y-1)(y-2)(y-3)+1 = (y^2-3y+1)^2$ (Áp dụng kết quả lớp 8 tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là 1 số chính phương)

Khi đó phương trình trở thành:

$A^2 - (x-2022)^2 = 1 \Rightarrow A = 1; x = 2022$

Hay $y(y-1)(y-2)(y-3) = 0 \Rightarrow y = 1$ hoặc y = 2 hoặc y = 3 (do y nguyên dương)

Vậy các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình là (2022;1); (2022;2); (2022;3).