

CHỦ ĐỀ 6

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA BIỂU THỨC

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

- A. 20 và 18. B. 20 và 15. C. 18 và 15. D. 15 và 13.

Câu 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

- A. $M = \frac{25}{2}; m = \frac{191}{16}$. B. $M = 12; m = \frac{191}{16}$.
C. $M = \frac{25}{2}; m = 12$. D. $M = \frac{25}{2}; m = 0$.

Câu 3. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$ là:

- A. $m = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$. B. $m = 16$. C. $m = 398$. D. $m = 0$.

Câu 4. Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn

nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

- A. $M = 0$. B. $M = 0$. C. $M = 1$. D. $M = 16$.

Câu 5. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất

m của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ là:

- A. $m = -10$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = -\frac{23}{4}$. D. $m = 0$.

Câu 6. Cho hai số thực dương thỏa mãn $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$.

Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức: $P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$

- A. $m = 0$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = -10$. D. $m = \frac{7}{8}$.

Câu 7. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$

A. 42 B. 41 C. 43 D. 44

Câu 8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x^2 + y^2$.

A. $\frac{153}{100}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{2313}{1156}$ D. $\frac{25}{16}$

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1, x + y + z = 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 5 B. 43 C. 9 D. 6

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$ B. $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$ C. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ D. $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$

Câu 11. Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Câu 12. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng:

A. $-4 - 3\sqrt{2}$ B. $-4 - 5\sqrt{2}$ C. $-4 - 4\sqrt{2}$ D. $-4 - 2\sqrt{2}$

Câu 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ bằng

A. $-\frac{9476}{243}$ B. -76 C. $\frac{193}{3}$ D. $\frac{148}{3}$

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A. $\sqrt{2} - 1$ B. $2\sqrt{2} + 1$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $2\sqrt{2} - 1$

Câu 15. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

A. $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$. B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$.

Câu 16. Cho $x, y > 0$ và $x + y = \frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$. B. $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$. C. $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$. D. $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$.

Câu 17. Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy + 1)(\sqrt{xy + 1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x - 2y}{6(x + y)}$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$. B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$. D. $\frac{\sqrt{5} + 7}{30}$.

Câu 18. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$ và $xy + yz + zx = 5$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $(x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ bằng:

A. 20 . B. 25 . C. 15 . D. 35 .

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$. B. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$. C. $M = 1, m = 0$. D. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 20. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x - 3} + \sqrt{y + 3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

A. $\min P = -80$. B. $\min P = -91$. C. $\min P = -83$. D. $\min P = -63$.

Câu 21. Biết rằng bất phương trình $m(|x| + \sqrt{1 - x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2 - x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b$.

A. $T = 3$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = 1$.

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = 4 \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \right) - 9 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right)$.

A. $-\frac{25}{4}$. B. 5 . C. $-\frac{23}{4}$. D. -13 .

Câu 23. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$.

- A. $P_{\min} = \frac{34}{5}$. B. $P_{\min} = \frac{65}{4}$. C. $P_{\min}$ không tồn tại. D. $P_{\min} = 5$.

Câu 24. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

- A. $P = 10$ B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

Câu 25. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$.

- A. 8. B. 0. C. 12. D. 4.