|  |  |
| --- | --- |
|  | **đề THI HSG LỚP 12 TỈNH LÀO CAI****NĂm 2018 – 2019** **MÔN TOÁN****Time: 180 Phút** |

**Câu 1 (5.0 điểm).**

**a)** Giải hệ phương trình .

**b)** Cho  là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

.

**Câu 2 (4.0 điểm).**

**a)** Cho hàm số  có đạo hàm . Tìm tất cả các giá trị thực của  để hàm số  có đúng  điểm cực trị sao cho , trong đó , ,  là hoành độ của ba cực trị đó.

**b)** Cho dãy số  xác định như sau 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó

**Câu 3 (3.0 điểm).**

**a)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ cho hình thang vuông  vuông tại  và , có . Gọi  là điểm thuộc cạnh  sao cho . Điểm  thuộc cạnh  sao cho tam giác  cân tại . Phương trình đường thẳng  là . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang  biết  thuộc đường thẳng  và điểm  thuộc đường thẳng 

**b)** Cho hình chóp  có đáy là hình vuông cạnh bằng . Biết hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng là điểm  thỏa mãn  . Trên cạnh  lấy các điểm ,  sao cho và  vuông góc với . Biết góc giữa  và bằng 60°. Tính thể tích khối chóp  và khoảng cách từ  đến mặt phẳng .

**Câu 4****(3.0 điểm).** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Câu 5 (3.0 điểm).** Tính tổng  .

|  |  |
| --- | --- |
|  | **GIẢI CHI TIẾT đề THI HSG LỚP 12 TỈNH LÀO CAI****NĂm 2018 – 2019** **MÔN TOÁN****Time: 180 Phút** |

**Câu 1 (5.0 điểm).**

**a)** Giải hệ phương trình .

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Ngọc Tâm; Fb:Nguyễn Ngọc Tâm***

Điều kiện:.

Đặt ; , phương trình  trở thành: 

Xét hàm số  trên .

Ta có  nên hàm số  đồng biến trên .

Vì thế với  thì .

Suy ra .

Thay  vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình: .

Điều kiện .

Khi đó phương trình 

#

Phương trình  tương đương với .

Đặt .

Ta có .

Suy ra hàm số  nghịch biến trên 

Vì thế phương trình  có nhiều nhất một nghiệm trên .

Ta lại có  là nghiệm của phương trình  nên đây là nghiệm duy nhất.

Với  thì .

Với  thì .

So sánh điều kiện , hệ đã cho có hai nghiệm  là ; .

**b)** Cho  là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

.

**Lời giải**

Ta có 

Tương tự ta có: ; 



ÁP dụng bất đẳng thức AM-GM





 



Đặt .

Ta có 

Vậy giá trị nhỏ nhất của  là  khi.

**Câu 2 (4.0 điểm).**

**a)** Cho hàm số  có đạo hàm . Tìm tất cả các giá trị thực của  để hàm số  có đúng  điểm cực trị sao cho , trong đó , ,  là hoành độ của ba cực trị đó.

**Lời giải**

**Cách 1.**

Ta có . Trong đó,  là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm  có . Khi đó,

.

Ta xét hàm . Hàm số này có bảng biến thiên như sau

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | – |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Nếu  thì các phương trình , ,  đều vô nghiệm. Do đó, hàm số  chỉ có một cực trị.

Nếu  thì phương trình  có  nghiệm bội chẵn hoặc nghiệm kép, phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, phương trình  vô nghiệm. Do đó, hàm số  chỉ có một cực trị.

Nếu  thì phương trình  có  nghiệm bội chẵn, phương trình  có  nghiệm bội lẻ, phương trình  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Do đó, hàm số  có ba cực trị. Khi đó, giả sử  thì ,  là hai nghiệm của phương trình  thỏa mãn điều kiện .

Kết hợp với định lý Vi-et ta có  (thỏa điều kiện ).

Nếu  thì phương trình  có  nghiệm bội chẵn, phương trình  có  nghiệm đơn, phương trình  có  nghiệm đơn. Do đó, hàm số  không thỏa mãn có ba cực trị.

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Cách 2.**

Xét hàm  có



.

Dấu của  cùng dấu với .

Ta có .

Ta xét hàm . Hàm số này có bảng biến thiên như sau

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | – |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi . Khi đó, giả sử  thì ,  là hai nghiệm của phương trình  thỏa mãn điều kiện

.

Kết hợp với định lý Vi-et ta có  (thỏa điều kiện ).

Vậy  là giá trị cần tìm.

**b)** Cho dãy số  xác định như sau 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó

**Lời giải**

***Tác giả: Lê Thị Nguyệt ; Fb: Nguyetle***

Từ  được  và .

Suy ra .

 Đặt  ta có  nên .

Đặt  ta được .

Phương trình đặc trưng  có nghiệm 

Vậy .

Từ .

Vì  nên 

Suy ra . Vậy dãy  có giới hạn là 1.

**Câu 3 (3.0 điểm).**

**a)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ cho hình thang vuông  vuông tại  và , có . Gọi  là điểm thuộc cạnh  sao cho . Điểm  thuộc cạnh  sao cho tam giác  cân tại . Phương trình đường thẳng  là . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang  biết  thuộc đường thẳng  và điểm  thuộc đường thẳng 

**Lời giải**



+) Đặt .

Xét  có 



Gọi  là chân đường vuông góc hạ từ , kẻ  vuông góc với . Ta có 

.

Nhận thấy . Suy ra  vuông tại .

+) Vì  thuộc đường thẳng  nên .

Phương trình đường thẳng  có véc tơ chỉ phương 

+) Điểm  thuộc đường thẳng  nên 



\*) Trường hợp 1: 

Giả sử  ta có 

Vì 

Giả sử  ta có 

Vì 

\*) Trường hợp 2: 

Giả sử  ta có 

Vì 

Giả sử  ta có 

Vì 

**b)** Cho hình chóp  có đáy là hình vuông cạnh bằng . Biết hình chiếu vuông góc của  trên mặt phẳng là điểm  thỏa mãn  . Trên cạnh  lấy các điểm ,  sao cho và  vuông góc với . Biết góc giữa  và bằng 60°. Tính thể tích khối chóp  và khoảng cách từ  đến mặt phẳng .

**Lời giải**

\*) Tính thể tích khối chóp :

Ta có :



Khi đó : 

\*) Tính khoảng cách từ  đến mặt phẳng 

Ta có : 

Đặt .

Áp dụng định lý cosin ta có 

Gọi .Ta có 



Suy ra : 

Kẻ  vuông góc với ,  vuông góc với . Suy ra : 

Ta có : 

**Câu 4 (3.0 điểm).** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình 

**Lời giải**

***Người Word hóa: Phạm Văn Chuyền ; Fb: Good Hope***

Theo yêu cầu bài toán thì 

Khi đó vế phải của phương trình đã cho chia hết cho 16. Do đóphải là số lẻ.

Từ đó ta được:

 . Vì vậy ta cũng suy ra được là số lẻ.

Ta lại lập luận tiếp để kết luận phải là số chẵn bằng phản chứng như sau:

Nếu  là số lẻ thì  và  không thể chia 3 dư 2 nên ta có mâu thuẫn. Vì khi đó  không thể chia hết cho 3 .

Vậy tới đây ta tiếp tục tìm nghiệm của phương trình đã cho với giả thiết là  đều lẻ, còn là số chẵn.

Ta có  với  là số nguyên thỏa mãn 

Ta nhận xét rằng

. Do đó  và  không thể cùng chia hết cho 3 hoặc 5.

Vì vậy 

Nếu  .

Nếu  thì từ . Ta có  ; 

Khi đó , ta kết luận  vô nghiệm.

Tương tự như thế, nếu  thì từ .

Ta có . Khi đó , ta kết luận  vô nghiệm.

Vậy các nghiệm nguyên dương là và .

**Câu 5 (3.0 điểm).** Tính tổng  .

**Lời giải**

***Tác giả:Mai Ngọc Thi ; Fb: Mai Ngọc Thi***

Xét số hạng tổng quát :

  , 

Suy ra 

Xét



Hệ số của  trong khai triển  là :

 

Xét khai triển : 

Hệ số của  trong khai triển  là  

Từ  và  ta có .