

Bài 1. (3 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12}$$

a) Tìm tập xác định và rút gọn biểu thức A

$$x = \frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A với

Bài 2, (2 điểm) Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192

Bài 3. (3 điểm)

a) Chứng minh bất đẳng thức : $x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1$

b) Cho: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 = 2$$

Bài 4. (4 điểm) Một xe máy khởi hành từ Đầm Hà đi Hạ Long với vận tốc 50 km/h . Sau đó 42 phút, trên cùng tuyến đường đó, một ô tô xuất phát từ Hạ Long ra Đầm Hà với vận tốc 70 km/h . Biết quãng đường Đầm Hà – Hạ Long dài 120 km. Hỏi sau bao lâu, kể từ khi xe máy khởi hành, hai xe gặp nhau ?

Bài 5. (6 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P , gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AD, AB . Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P .

Bài 6. (2 điểm) Tìm số dư của phép chia đa thức $x^{1998} + x^{998} + x^{199} + x^{19} + x + 3$ chia cho đa thức $x^2 - 1$.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) TXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 6$

$$A = \left[\frac{6x+1}{x(x-6)} + \frac{6x-1}{x(x+6)} \right] \cdot \frac{(x+6)(x-6)}{12(x^2+1)}$$
$$= \frac{6x^2 + 36x + x + 6 + 6x^2 - 36x - x + 6}{x} \cdot \frac{1}{12(x^2+1)}$$

$$= \frac{12(x^2+1)}{x} \cdot \frac{1}{12(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

$$A = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

b)

Bài 2.

Vì a, b là hai số chính phương liên tiếp nên giả sử $a < b$, ta có:

$$a = (2k-1)^2; b = (2k+1)^2 \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

$$ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1)$$

Vì $k(k+1)(k-1)$ luôn chia hết cho 3, với mọi $k \in \mathbb{Z}$

Và $k^2(k+1)(k-1)$ luôn chia hết cho 4, với mọi $k \in \mathbb{Z}$

Kết hợp với $(3,4) = 1$

Nên $ab - a - b + 1$ chia hết cho $16 \cdot 12 = 192$ (dfcm)

Bài 3.

a)

$$x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức luôn luôn đúng

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1$$

b) Ta có:

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + 2 \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + 2 \frac{ca}{(a-b)(b-c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \frac{abc}{(b-c)(c-a)(a-b)} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \frac{abc}{(b-c)(c-a)(a-b)} \cdot \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{abc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \frac{abc}{(b-c)(c-a)(a-b)} \cdot \frac{a(a-b)(b-c) - c(b-c)(a-b)}{abc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \cdot \frac{abc}{(b-c)(c-a)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c-a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 = 2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 4.

Gọi thời gian từ khi xe máy khởi hành đến khi gặp ô tô là $x(h)$, đk: $x > \frac{7}{10}$

Thời gian ô tô đi đến lúc gặp xe máy là $x - \frac{7}{10} (h)$

Quãng đường xe máy đi được là $50x (km)$

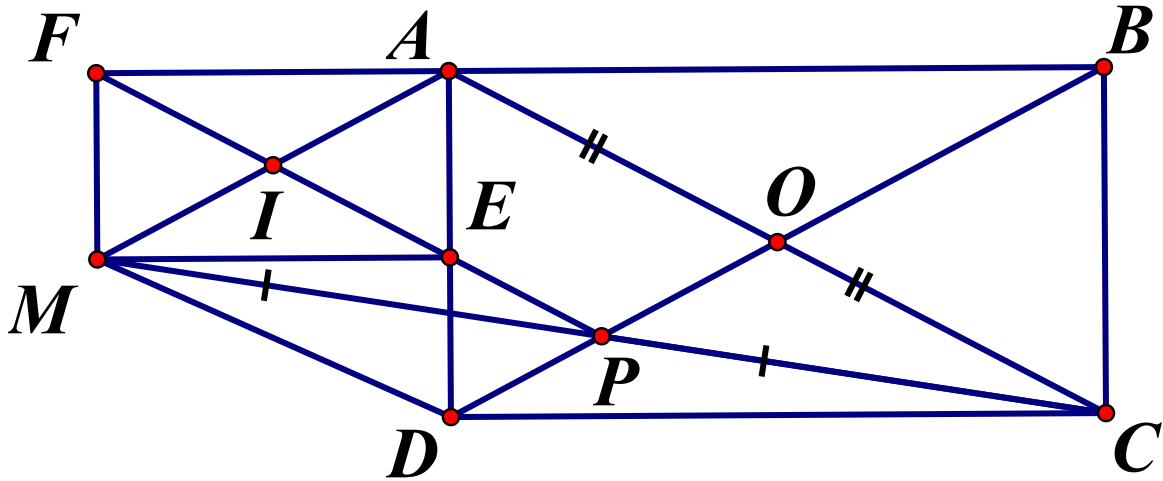
Quãng đường ô tô đi được là $70 \cdot \left(x - \frac{7}{10} \right) (km)$

Theo bài ta có phương trình: $50x + 70 \cdot \left(x - \frac{7}{10} \right) = 120$

Giải phương trình ta có: $x = \frac{169}{120} (tm)$

Vậy sau thời gian $x = \frac{169}{120}(h)$ khi xe máy khởi hành thì hai xe gặp nhau.

Bài 5.



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có O là trung điểm của AC

P là trung điểm của MC

Hay PO là đường trung bình của $\triangle ACM$ hay $AM \parallel PO$

Vậy $BD \parallel AM$ hay tứ giác $AMDB$ là hình thang.

b) Do $AM \parallel BD$ hay $\angle OBA = \angle MAE$ (đồng vị)

Xét $\triangle OAB$ cân ta có: $\angle OBA = \angle OAB$

Gọi I là giao điểm của MA và EF , ta thấy $\triangle AEI$ cân ở I hay $\angle PAE = \angle FEA$

Suy ra $\angle FEA = \angle OAB$ hay $EF \parallel AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của $\triangle MAC$ suy ra $IP \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: E, F, P thẳng hàng

c) Do $\triangle MAF \sim \triangle DBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ không đổi

Bài 6.

Đặt $f(x) = x^{1998} + x^{998} + x^{199} + x^{19} + x + 3$. Đa thức dư là $mx + n$

Ta có: $f(x) = q(x) \cdot (x^2 - 1) + mx + n$

Ta có: $f(1) = m + n = 8$ $f(-1) = -m + n = 2$

Ta giải được $n = 5, m = 3$

Vậy đa thức dư là: $3x + 5$