PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 9 CẤP TỈNH

NĂM HỌC: 2023-2024

MÔN THI: TOÁN - LỚP 9 THCS

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi có 05 câu, gồm 01 trang)

Ngày khảo sát:...../11/2023

Số báo danh:

....

Câu I: (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}$$ Với $a>0, b>0, a\neq b$

2. Biết rằng $\sqrt{(3-a)(4-a)}+\sqrt{(4-a)(5-a)}+\sqrt{(5-a)(3-a)}=a.$

Tính giá trị biểu thức $B=\sqrt{3-a}+\sqrt{4-a}+\sqrt{5-a}$.

Câu II: (*4,0 điểm*).

1. Giải phương trình $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x\left(1+3x-3x^2\right)}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\(3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

Câu III: (*4,0 điểm*).

1Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.

2. Cho x là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n+(x+1)^2$ là số chính phương

Câu IV: (*6,0 điểm*).

Cho tam giác ABC có đường tròn (I; r) là đường tròn nội tiếp. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC lần lượt tại M và N.Gọi S, L, V lần lượt là giao điểm của AI, BI, CI với BC, CA vàAB. Chứng minh rằng:

1. $\dfrac{BM}{CN}=\dfrac{BI^2}{CI^2}$
2. $\dfrac{IA^2}{AB.AC}+\dfrac{IB^2}{BC.AB}+\dfrac{IC^2}{AC.BC}=1$
3. $\sqrt{\dfrac{SI}{AI}}+\sqrt{\dfrac{IL}{BI}}+\sqrt{\dfrac{IV}{CI}}>2$

Câu V: (*2,0 điểm*).

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn xyz =1. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

HẾT

Họ và tên: .... SBD: ....

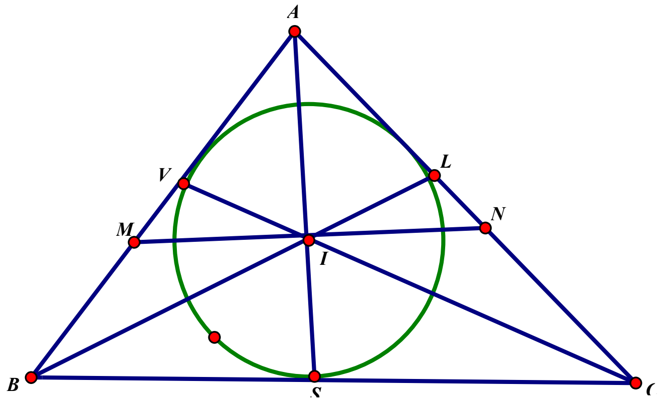
<table>
<tr><td colspan="3">HƯỚNG DẪN CHẤM</td></tr>
<tr><td>Câu</td><td>NỘI DUNG</td><td>Điểm</td></tr>
<tr><td rowspan="7">I
4,0
điểm</td><td>1. Rút gọn biểu thức:
$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}$ Với $a>0, b>0, a\neq b$</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>Với $a>0, b>0, a\neq b$, ta có:
$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{b}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{a}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$
$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left[\frac{a+b+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right]-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$
$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{a+b+\sqrt{ab}+b+a-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{2(a+b)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$
$P=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{2(a+b)}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\frac{\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}{2}$
Nếu $a>b$ thì $P=0$
Nếu $a<b$ thì $P=\sqrt{a}-\sqrt{b}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2. Biết rằng $\sqrt{(3-a)(4-a)}+\sqrt{(4-a)(5-a)}+\sqrt{(5-a)(3-a)}=a.$
Tính giá trị biểu thức $B=\sqrt{3-a}+\sqrt{4-a}+\sqrt{5-a}$.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>ĐKXĐ: $a\leq 3.$
Đặt: $x=\sqrt{3-a}; y=\sqrt{4-a}; z=\sqrt{5-a}.$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Ta có: $\begin{cases} a = xy + yz + zx \\ x^2 + a = 3 \\ y^2 + a = 4 \\ z^2 + a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = xy + yz + zx \\ x^2 + xy + yz + zx = 3 \\ y^2 + xy + yz + zx = 4 \\ z^2 + xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = xy + yz + zx & (1) \\ (x+y)(x+z) = 3 & (2) \\ (y+z)(y+x) = 4 & (3) \\ (z+x)(z+y) = 5 & (4) \end{cases}$	
	Nhân theo vế các phương trình (2), (3), (4) ta được: $\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2 = 60 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 2\sqrt{15}$ (vì x, y, z không âm) (5)	0,5
	Kết hợp (2), (3), (4), (5) ta được: $y + z = \frac{2\sqrt{15}}{3}; z + x = \frac{\sqrt{15}}{2}; x + y = \frac{2\sqrt{15}}{5}$	0,5
	$B = \dfrac{\frac{2\sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{2\sqrt{15}}{5}}{2} = \dfrac{47\sqrt{15}}{60}$.	0,5
II **4,0** **điểm**	**1. Giải phương trình:** $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x\left(1 + 3x - 3x^2\right)}$	**2,0**
	ĐKXĐ : $x \in R$ a. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình: Chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được: $\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}$.	0,5
	Đặt $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}$ ta thu được hệ sau: $\begin{cases} \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2y \\ \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 = y^3 \end{cases}$. Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta có: $\frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{10}{x} - 3 = y^3 + 2y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{2}{x} - 1\right) = y^3 + 2y$ (*)	0,5
	Đặt $z = \frac{2}{x} - 1$ ta thu được: $z^3 + 2z = y^3 + 2y \Rightarrow (z - y)\left(z^2 + yz + y^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow z = y$	0,5
	$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{4}{x} - 2 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} - \frac{13}{x^2} + \frac{3}{x} + 2 = 0$. Suy ra $x = 1, x = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1, x = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x + 1} + \sqrt{2y + 1} = \frac{(x - y)^2}{2} \\ (3x + 2y)(y + 1) = 4 - x^2 \end{cases}$	**2,0**
	ĐKXĐ: $x, y \geq -\frac{1}{2}$ Ta có $(3x + 2y)(y + 1) = 4 – x^2 \Leftrightarrow 3xy + 3x + 2y^2 + 2y + x^2 – 4 = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow x(x+y-1)+2y(x+y-1)+4(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (x+2y+4)(x+y-1)=0$ Vì $x, y \ge -\dfrac{1}{2}$ nên $x+2y+4>0$. Do đó $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$.	
	Thay vào phương trình $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}$ được $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{4x^2-4x+1}{2}$. Với ĐKXĐ $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=t>0 \Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$ $\Rightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=\dfrac{t^2-4}{2} \Rightarrow -4x^2+4x-1=\left(\dfrac{t^2-4}{2}\right)^2-4$ $\Rightarrow \dfrac{4x^2-4x+1}{2}=-\dfrac{t^4-8t^2}{8}$	0,5
	Do đó ta có phương trình $t=-\dfrac{t^4-8t^2}{8} \Leftrightarrow t(t^2-8t+8)=0$ $\Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t-4)=0$ Vì $t>0$ nên $t=2$ hoặc $t=\sqrt{5}-1$	0,5
	* Xét $t=2$ ta có $\sqrt{-4x^2+4x+3}=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1)=0$ + Với $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ + Với $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$ * Xét $t=\sqrt{5}-1 \Rightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2-4}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=1-\sqrt{5}<0$ (vô lý) Đối chiếu điều kiện đề bài thì hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\right\}$	0,5
III 4,0 điểm	**1. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.**	**2,0**
	Ta có $(a+b^2) \vdots (a^2b-1)$ suy ra: $a+b^2=k(a^2b-1)$, với $k\in\mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow a+k=b(ka^2-b)$ hay $mb=a+k$ (1) với $m=ka^2-b\in\mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow m+b=ka^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $mb-m-b+1=a+k-ka^2+1$ $\Leftrightarrow (m-1)(b-1)=(a+1)(k+1-ka)$ (3) Do $m, b\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (m-1)(b-1)\ge 0$	0,5

	Vì thế từ (3) suy ra: (a + 1)(k + 1 – ka) ≥ 0.	
	Lại do a > 0 nên suy ra: k + 1 – ka ≥ 0 ⇒ 1 ≥ k(a – 1) Vì a – 1 ≥ 0, k > 0 nên $1 \ge k(a-1) \ge 0$ vµ $k(a-1) \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ k=1 \end{cases} \end{array}\right.$	0,5
	Với a = 1. Thay vào (3) ta được: (m – 1)(b – 1) = 2. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1=1 \\ b-1=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow k.a^2=5 \Rightarrow a=1 \\ b=3 \Rightarrow k.a^2=5 \Rightarrow a=1 \end{array}\right.$ Vậy, trường hợp này ta được hai cặp a = 1; b = 2 và a = 1; b = 3.	0,5
	Với a = 2 và k = 1. Thay vào (3) ta có: (m – 1)(b – 1) = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} b=1 \\ m=1 \end{array}\right.$. Khi b = 1, ta được: a = 2, b = 1. Khi m = 1: từ (1) suy ra a + k = b ⇒ b = 3. Khi đó: a = 2, b = 3. Vậy có 4 cặp số (a; b) thỏa mãn là: (1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1).	0,5
	2. Cho x là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương n để $4x^n+(x+1)^2$ là số chính phương	**2,0**
	Ta có $4x^n+(x+1)^2=y^2 \Leftrightarrow (y-x-1)(y+x+1)=4x^n$ (*) Nhận thấy $(y-x-1)+(y+x+1)=2y$ suy ra $(y-x-1),(y+x+1)$ cùng tính chẵn lẻ Hơn nữa $(y-x-1),(y+x+1) \mid 4x^n$. Suy ra $(y-x-1),(y+x+1)$ cùng chẵn	0,5
	Đặt $y-x-1=2a \Rightarrow y+x+1=2(a+x+1)$, thay vào (*) ta có : $a(a+x+1)=x^n$ Giả sử d là một ước nguyên tố chung của a và $a+x+1$. Khi đó ta có : $\begin{cases} a \vdots d \\ a+x+1 \vdots d \end{cases}$ Từ đó $x^n \vdots d$ dẫn tới $1 \vdots d$ (vô lý). Vậy $(a, a+x+1)=1$	0,5
	Suy ra $a=u^n, a+x+1=v^n$ với $x=uv$ và do đó $uv+1=v^n-u^n$ Dễ thấy với $n=1$ thì $(u-1)(v-1)>0 \Rightarrow uv+1>v-u$ nên không có x thỏa mãn	0,5
	Với $n \ge 3$ thì $v^n-u^n=(v-u)(v^{n-1}+v^{n-2}u+.....+u^{n-1}) \ge uv+2$, suy ra n chỉ có thể bằng 2 Khi $n=2$ ta có : $4x^2+(x+1)^2=y^2$ (*), dễ thấy $x=2, y=5$ thỏa mãn	0,5

Chú ý:

IV **4,0 điểm**	**Cho tam giác ABC có đường tròn (I; r) là đường tròn nội tiếp. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi** S, L, V **lần lượt là giao điểm của** AI, BI, CI **với** BC, CA **và** AB**.**  	
	1. Chứng minh rằng: $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BI^2}{CI^2}$	2,0
	Vì (I; r) nội tiếp ΔABC nên AI là tia phân giác góc A mà $MN \perp AI$ nên ΔAMN cân tại A suy ra $AM = AN$ và $\widehat{AMI} = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{C}}{2}$	0,5
	Lại có: $\widehat{AMI} = \dfrac{\hat{B}}{2} + \widehat{MIB}$. Do đó: $\widehat{MIB} = \dfrac{\hat{C}}{2} = \widehat{ICB}$ Ta được $\Delta MIB \sim \Delta ICB\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{BM}{BI} = \dfrac{BI}{BC} \Rightarrow BI^2 = BM.BC \quad (1)$	0,5
	Tương tự, ta được: $CI^2 = CN \cdot CB \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BI^2}{CI^2}$	0,5
	2. Chứng minh rằng: $\dfrac{IA^2}{AB.AC} + \dfrac{IB^2}{BC.AB} + \dfrac{IC^2}{AC.BC} = 1$	**2,0**
	$\Delta BMI \sim \Delta INC \Rightarrow \dfrac{BM}{IN} = \dfrac{MI}{NC} \Rightarrow BM.CN = MI.NI$ ΔAMN cân tại A, do đó: $IM = IN \Rightarrow BM.CN = IM^2$	0,5
	$\dfrac{IA^2}{AB.AC} = \dfrac{AM^2 - MI^2}{AB.AC} = \dfrac{AM.AN - BM.CM}{AB.AC}$ $= \dfrac{(AB - BM).(AC - CN) - BM.CN}{AB.AC}$ $= \dfrac{AB.AC - AB.CN - BM.AC + BM.CN - BM.CN}{AB.AC} \quad (1)$	0,75

Chú ý:

	$\frac{IB^2}{AB.BC}+\frac{IC^2}{AC.BC}=\frac{BM.BC}{AB.BC}+\frac{CN.BC}{AC.BC}=\frac{BM}{AB}+\frac{CN}{AC}=\frac{BM.AC+CN.AB}{AB.AC}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) ta được $\frac{IA^2}{AB.AC}+\frac{IB^2}{BC.AB}+\frac{IC^2}{AC.BC}=1$	0,25
	3. **Chứng minh rằng:** $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}>2$	**2,0**
	Vì BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}\Rightarrow\frac{BS}{AB}=\frac{SI}{AI}$ và CI là tia phân giác của $\widehat{SCA}$ nên $\frac{CS}{AC}=\frac{SI}{AI}$. Từ đó suy ra $\frac{SI}{AI}=\frac{BS}{AB}=\frac{CS}{AC}=\frac{BC}{AB+AC}$	0,5
	Đặt BC = a, AC = b, AB = c.Ta có $\frac{SI}{AI}=\frac{a}{b+c}\Rightarrow\sqrt{\frac{SI}{AI}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương ta có: $\sqrt{a(b+c)}\le\frac{a+b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{SI}{AI}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$ (1)	0,5
	Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{\frac{LI}{BI}}\ge\frac{2b}{a+b+c}$ (2) , $\sqrt{\frac{IV}{CI}}\ge\frac{2c}{a+b+c}$ (3) Cộng các BĐT (1), (2), (3) ta được: $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}\ge\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+c\\b=c+a\\c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$. Mà a, b, c là độ dài của các cạnh của tam giác ABC nên a, b, c khác 0. Do đó dấu "=" không xảy ra. Vậy: $\sqrt{\frac{SI}{AI}}+\sqrt{\frac{IL}{BI}}+\sqrt{\frac{IV}{CI}}>2\Rightarrow$ đpcm.	0,5
V **2,0 điểm**	**Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn xyz =1. Tìm GTNN của biểu thức:** $A=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$	**2,0**
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $y+z\ge2\sqrt{yz};x+y\ge2\sqrt{yz};x+z\ge2\sqrt{yz}$. Suy ra :	0,5

Chú ý:

	$A \geq \frac{x^2.2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2.2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2.2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$ $A \geq \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}\sqrt{yzx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}\sqrt{zxy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$ $A \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$	
	Đặt: $\begin{cases} a = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a+4b+c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(a-2b+4c) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(4a+b-2c) \end{cases}$	0,5
	Khi đó $A \geq \frac{2}{9}\left(\frac{-2a+4b+c}{a}+\frac{a-2b+4c}{b}+\frac{4a+b-2c}{c}\right)$ $A \geq \frac{2}{9}\left[-6+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$	0,5
	$A \geq \frac{2}{9}\left(-6+4.3.\sqrt[3]{\frac{b}{a}.\frac{a}{c}.\frac{c}{b}}+3.\sqrt[3]{\frac{c}{a}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}\right) = \frac{2}{9}(-6+12+3) = 2$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow$ x=y=z =1 Vậy GTNN của *A* là 2 khi x=y=z =1.	0,5

<u>Chú ý:</u>

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Đối với câu 4 (Hình học): *Không vẽ hình, hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm.*
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.