ĐỀ 72

ĐỀ HSG TOÁN 9 PHÚ YÊN 2023-2024

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}+1\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-1\right)$$

a)Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

Câu 2. (3,0 điểm) Giải phương trình: $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\text{¿}1$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn x + y + z = 0. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(xy+2z^2\right)\left(yz+2x^2\right)\left(xz+2y^2\right)}{\left(2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz\right)^2}\text{¿}-1$$

Câu 4.(4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AC = 3AD; trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HA = 3HE. Gọi F là giao điểm của ED và BC.

a) Tính tỉ số $\frac{HF}{HC}$

b) Chứng minh rằng $\frac{DC}{DF}\text{¿}\sqrt{\frac{BC}{DF}}$

Câu 5. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn $\triangle$ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường kính AD cắt BC tại E. Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC thỏa mãn EM = EB, EN = EC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt EM, EN tương ứng tại P, Q

a) Chứng minh AP = AQ.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD. Chứng minh

MP.AK = NQ.AH

Câu 6. (3,0 điểm) Cho hai số dương x,y thỏa mãn x + y = 1

a) Chứng minh rằng $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = $\frac{x+2y}{\sqrt{1-x}}\ \frac{+y+2x}{\sqrt{1-y}}$

------HẾT------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}+1\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-1\right)$$

a)Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

Lời giải

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P

Điều kiện xác định: $\begin{cases}\sqrt{x}\ge 0\\ 1-x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$

$$P=\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}+1\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-1\right)$$

$$P=\left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})}\right]:\left[\frac{\sqrt{x}-(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\right]$$

$$P=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{x-\sqrt{x}+1}\right]:\left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]$$

$$P=\left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}\right].\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{(2\sqrt{x}-1)[x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x]}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}.\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}\Rightarrow\frac{1}{P}=x-\sqrt{x}+1$$

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

Ta có $\sqrt{\frac{1}{P}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\sqrt{x-\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow|\sqrt{x}-1|=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{x}-1=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9}{4}\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \text{(nhận)}$$

Vậy với $x=\frac{9}{4}, x=\frac{1}{4}$ thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

Câu 2. (3,0 điểm) Giải phương trình: $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}¿1$

ĐKXĐ: $x \geq \frac{-1}{4}$

Ta có $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}¿1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{\sqrt{x+\frac{1}{4}}+2.\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}¿1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}¿1$

$\Leftrightarrow x+\left|\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right|¿1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=1$ (Do $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$)

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=1$ (Do $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}¿\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}¿\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn x + y + z = 0. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(xy+2z^2\right)\left(yz+2x^2\right)\left(xz+2y^2\right)}{\left(2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz\right)^2} \text{¿} -1$$

Ta có: $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z,\ y+z=-x, x+z=-y$

Và có $x+y+z=0 \Rightarrow 3xyz = x^3+y^3+z^3$

Vì $x+y+z=0$ $\quad ..\Leftrightarrow\ x+y=-z$

$\Leftrightarrow\ (x+y)^3=(-z)^3 \quad \Leftrightarrow\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(-z)^3$

$\Leftrightarrow\ x^3+y^3+z^3=-3xy(-z) \Leftrightarrow\ x^3+y^3+z^3=3xyz$

Xét tử của biểu thức:

$\left(xy+2z^2\right)\left(yz+2x^2\right)\left(xz+2y^2\right)$

$\text{¿}\left(xy+z^2+z^2\right)\left(yz+x^2+x^2\right)\left(xz+y^2+y^2\right)$

$=\left(xy+z^2-z(x+y)\right).\left(yz+x^2-x(y+z)\right).\left(xz+y^2-y(x+z)\right)$

$=\left(xy+z^2-zx-zy\right).\left(yz+x^2-xy-xz\right).\left(xz+y^2-xy-yz\right)$

$=(x-z)(y-z).(x-y)(x-z).(x-y)(z-y)$

$=-\left[(x-z)(y-z)(x-y)\right]^2$

$=-\text{¿}\left(xyz-x^2y-xz^2+x^2z-y^2z+xy^2-xyz\right)^2$

$=-\left(-x^2y-xz^2+x^2z-y^2z+xy^2\right)^2$

$=-\left[x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)\right]^2$

Xét mẫu của biểu thức:

$\left(2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz\right)^2=\left(2xy^2+2yz^2+2zx^2+x^3+y^3+z^3\right)^2$

$=\left[x^2(2z+x)+y^2(2x+y)+z^2(2y+z)\right]^2$

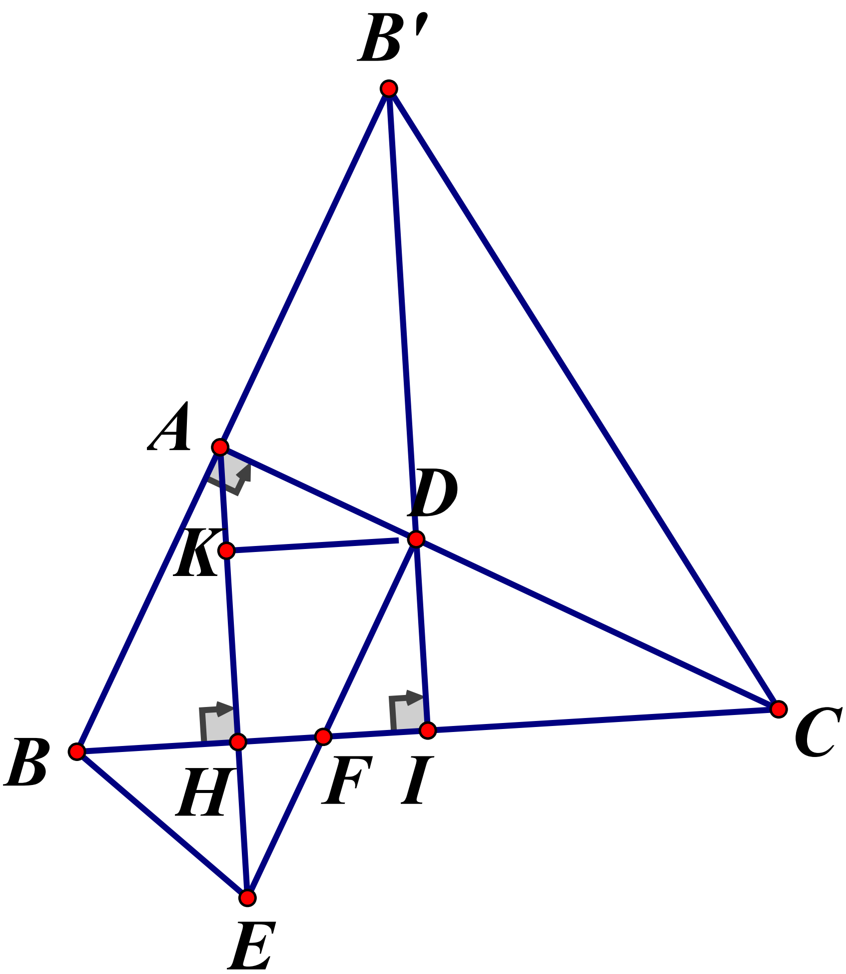
$=\left[x^2(z+z+x)+y^2(x+x+y)+z^2(y+y+z)\right]^2$

$=\left[x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-z)\right]^2$

Từ đó ta được

$$\frac{\left(xy+2z^2\right)\left(yz+2x^2\right)\left(xz+2y^2\right)}{\left(2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz\right)^2} \text{¿} \frac{-\left[x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)\right]^2}{\left[x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-z)\right]^2} \text{¿} -1$$

Câu 4.(4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AC = 3AD; trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HA = 3HE. Gọi F là giao điểm của ED và BC.



a) Tính tỉ số $\frac{HF}{HC}$

b) Chứng minh rằng $\frac{DC}{DF}$ ¿ $\sqrt{\frac{BC}{DF}}$

Lời giải

a)

Lấy điểm K trên AH sao cho AK = HE ⇒ HK = 2.AK = 2.HE;

AK = $\frac{1}{3}$AH = $\frac{1}{3}$KE

Xét tam giác AHC có $\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}$ ¿ $\frac{1}{3}$ nên theo định lí Ta-lét đảo thì DK//HC

Xét tam giác DEK có HK//DK nên $\frac{HF}{DK}$ ¿ $\frac{HE}{EK}$ ¿ $\frac{1}{3}$ (hệ quả dịnh lí Ta-lét) (1)

Xét tam giác AHC có DK//HC nên $\frac{DK}{HC}$ ¿ $\frac{AK}{AH}$ ¿ $\frac{1}{3}$ (hệ quả dịnh lí Ta-lét) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{HF}{DK} \cdot \frac{DK}{HC}$ ¿ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HF}{HC}$ ¿ $\frac{1}{9}$

Vậy $\frac{HF}{HC}$ ¿ $\frac{1}{9}$

b)

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua A . Khi đó A là trung điểm của BB'

Tam giác BCB' có đường trung tuyến CA và AC = 3AD nên D là trọng tâm của tam giác BCB'

Do đó B'D đi qua trung điểm I cảu BC, suy ra CI = $\frac{1}{2}$ BC

Ta lại có HA = 3HE nên AE = $\frac{4}{3}$ AH

Mặt khác AB.AC = AH.BC nên AB.$\frac{2}{3}$ AC = $\frac{2}{3}$ AH.BC

$\Rightarrow$ AB.CD = $\frac{4}{3}$ AH . $\frac{2}{3}$ .BC = AE.CI

$\Rightarrow \frac{AB}{CI}$ ¿ $\frac{AE}{CD}$

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{DCI}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$)

$\Rightarrow$ △BAE đồng dạng với △ICD (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{IDC}$ (cặp góc tương ứng)

Ta lại có $\widehat{ADB} = \widehat{ADB'} = \widehat{IDC}$

Do đó $\widehat{BEA} = \widehat{ADB}$ nên tứ giác ABED nội tiếp đường tròn

$\widehat{BED} + \widehat{BAD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BED} = 90^0$ hay tam giác BEF vuông tại E

Xét tam giác ABC có AH ⊥ BC nên $AC^2 = BC.HC$ (hệ thức trong tam giác vuông) (3)

Xét tam giác BEF có EH ⊥ BF nên $EF^2 = BF.HF$ (hệ thức trong tam giác vuông) (4)

Từ (3), (4) suy ra $\frac{AC^2}{EF^2}$ ¿ $\frac{BC.HC}{BF.HF} \Rightarrow \sqrt{\frac{BC}{BF}}$ ¿ $\sqrt{\frac{AC^2}{EF^2}.\frac{HF}{HC}}$ ¿ $\frac{AC}{EF}.\frac{1}{3}$ (*)

Lại có $\frac{AC}{EF}$ ¿ $\frac{3}{2}$; $\frac{EF}{DF}$ ¿ $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{EF}$ ¿ $3.\frac{DC}{DF}$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $\frac{DC}{DF}$ ¿ $\sqrt{\frac{BC}{BF}}$

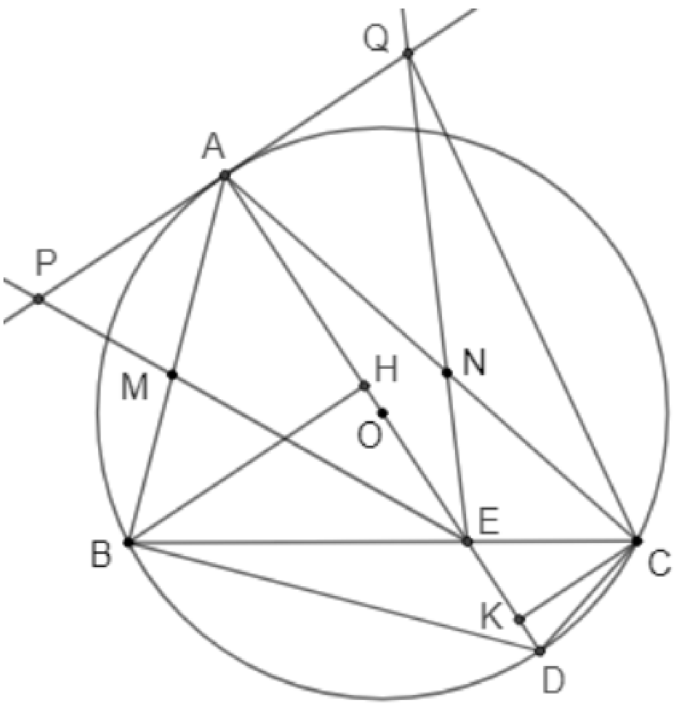
Vậy $\frac{DC}{DF}$ ¿ $\sqrt{\frac{BC}{BF}}$

Câu 5. (4,0 điểm) Cho tam giá c nhọn △ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường kính AD cắt BC tại E. Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC thỏa mãn EM = EB, EN = EC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt EM, EN tương ứng tại P, Q

a) Chứng minh AP = AQ.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD. Chứng minh MP.AK = NQ.AH

Lời giải



a)

Ta có EM = EB nên tam giác BEM cân tại E $\Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{EMB}$

Mà $\widehat{EMB}$ = $\widehat{AMP}$ (đối đỉnh), $\widehat{EBM}$ = $\widehat{QAC}$(góc nội tiếp và góc tạo với tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC) ⇒ $\widehat{AMP}$ = $\widehat{QAN}$ (1)

Tương tự: $\widehat{ANQ}$ = $\widehat{PAM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANQ}$ + $\widehat{QAN}$ = $\widehat{PAM}$ + $\widehat{AMP}$

Áp dụng định lý tổng ba góc trong tam giác và ta suy ra $\widehat{AQN}$ = $\widehat{APM}$

Do đó tam giác EPQ cân tại E mà EA ⊥ PQ (AD là tiếp tuyến) nên EA là trung tuyến, suy ra AP = AQ

Vậy AP = AQ

b)

Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra tam giác ADC vuông tại C có CK ⊥ AD nên $AC^2 = AK.AD$

Tương tự $AB^2 = AH.AD$

Do đó $\frac{AK}{AH}$ ¿ $\frac{AC^2}{AB^2}$ (*)

Xét tam giác APM và CAB có $\widehat{ANQ}$ = $\widehat{PAM}$, $\widehat{AMP}$ = $\widehat{QAN}$, suy ra tam giác APM đồng dạng với tam giác CAB (g.g) ⇒ $\frac{AC}{AB}$ ¿ $\frac{AP}{PM}$

Tương tự $\frac{AC}{AB}$ ¿ $\frac{NQ}{AQ}$

Do đó $\frac{AC^2}{AB^2}$ ¿ $\frac{NQ}{MP}$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $\frac{AK}{AH}$ ¿ $\frac{NQ}{MP}$ hay MP.AK = NQ.AH

Câu 6. (3,0 điểm) Cho hai số dương x,y thỏa mãn x + y = 1

a) Chứng minh rằng $\sqrt{x}+\sqrt{y} \le \sqrt{2}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = $\frac{x+2y}{\sqrt{1-x}}\ \frac{+y+2x}{\sqrt{1-y}}$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{x}+\sqrt{y} \le \sqrt{2}$

⇔ $x+y+2\sqrt{xy} \le 2$

Mà $x+y=1$ nên $1+2\sqrt{xy} \le 2$

⇔ $2\sqrt{xy} \le 1$

⇔ $2\sqrt{xy} \le x+y$

$\Leftrightarrow\ x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$

$\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}$

b) Ta có Q = $\frac{x+y+y}{\sqrt{1-x}}\ \frac{+y+x+x}{\sqrt{1-y}}$ mà $x+y=1$ nên Q = $\frac{1+y}{\sqrt{y}}\ \frac{+1+x}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow$ Q = $\frac{1}{\sqrt{y}}\ \frac{+1}{\sqrt{x}}$ + $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Rightarrow$ Q ≥ $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ + $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (BĐT Svac-vơ)

$\Rightarrow$ Q ≥ $\left(\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$\Rightarrow$ Q $\geq 2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$ (BĐT Cô-si và phần a))

$\Rightarrow$ Q $\geq 3\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của Q là $3\sqrt{2}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

------HẾT------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) Cho biểu thức $x = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(1-7x^{2019}+x^{2021}\right)^{2023}$$

b) Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn *x* + *y*+ *z* = *xyz*. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz}\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}+\frac{1}{zx}\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}}+\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+y^2}}$$

Lời giải

a) Ta có $x = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{3}.\sqrt{7}}+\sqrt{10-2\sqrt{3}.\sqrt{7}}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow x^2=7$

Khi đó $P = \left(x^{2021}-7x^{2019}+1\right)^{2023}=\left[x^{2019}\left(x^2-7\right)+1\right]^{2023}$

$= \left(0+1\right)^{2023}=1$

Vậy P = 1

b) Từ giả thiết *x* + *y*+ *z* = *xyz* $\Rightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx} = 1$

Ta có $1+x^2=x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$

$¿x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$

$=x^2\frac{(x+y)(x+z)}{x^2yz}=\frac{(x+y)(x+z)}{yz}$

Do đó $1+x^2=\frac{(x+y)(x+z)}{yz}$

Hoàn toàn tương tự $1+y^2=\frac{(y+x)(y+z)}{xz}$; $1+z^2=\frac{(z+x)(z+y)}{xy}$

Ta có: $\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}=\frac{(y+x)(y+z)}{xz}\cdot\frac{(z+x)(z+y)}{xy}:\frac{(x+y)(x+z)}{yz}$

$=\frac{(x+y)^2}{z^2}$

$\Rightarrow$ Q = $\frac{1}{yz}\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+\frac{1}{zx}\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+y^2}}$

$=\frac{1}{yz}\cdot\frac{z+y}{x}+\frac{1}{zx}\cdot\frac{x+z}{y}+\frac{1}{xy}\cdot\frac{x+y}{z}$ (Do x, y, z > 0)

$=\frac{2(x+z+y)}{xyz}=2$

Vậy Q = 2

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A(6;0), B(0;−3) và đường thẳng (d) có phương trình $y=-(m+2)x+2m+2$ (m là tham số, m $\neq -2$, $m\neq-\frac{5}{2}$

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng d chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ)

Lời giải

a) Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$

Vì đường thẳng AB đi qua A(6;0), B(0;−3) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}6a+b=0\\0a+b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-3\end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=\frac{1}{2}x-3$

Hoàng dộ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB là nghiệm của phương trình

$-(m+2)x+2m+1=\frac{1}{2}x-3$

$\Leftrightarrow (2m-5)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (do $m\neq-\frac{5}{2}$)

$\Leftrightarrow x=2$

Thay $x=2$ vào phương trình $y=\frac{1}{2}x-3$ ta được y = -2

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và (AB) là M(2; -2)

b) Ta có đường thẳng (d) giao với tam giác OAB tại cạnh OA hoặc OB

$S_{OAB}=\frac{1}{2}$.OA.OB = $\frac{1}{2}$.6.3 = 9 và $S_{OAM}=\frac{1}{2}$.2.6 = 6 > $\frac{1}{2}S_{OAB}$

Do $S_{OAM}>\ S_{OAB}$ nên đường thẳng (d) chia tam giác OAB thành 2 phần có diện tích bằng nhau khi (d) cắt cạnh OA tại C$\left(\frac{2m+2}{m+2};0\right)$

Khi đó ta có $S_{AMC}=\frac{1}{2}.S_{OAB}=\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$.2.AC = $\frac{9}{2}$ $\Leftrightarrow$ AC = $\frac{9}{2}$ $\Leftrightarrow$ $6\ \frac{-2m+2}{m+2}=\frac{9}{2}$ $\Leftrightarrow$ m = 2 (tm)

Vậy m = 2

Câu 3. Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC với đường tròn (O), (MN là các tiếp điểm và AB < AC < 3R). Gọi I là trung điểm của BC, T là giao điểm của NI và đường tròn (O) (T khác N).

a) Chứng minh tam giác đều

b) Chứng minh rằng đường thẳng MT song song với đường thẳng AC

c) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng

Lời giải

a) Ta có AM = AN (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) ⇒ △AMN cân tại A

mà sin $\widehat{MAO}=\frac{OM}{OA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MAO}=30^0\Rightarrow\widehat{MAN}=60^0$

Suy ra AMN là tam giác đều

b) I là trung điểm của BC ⇒ OI ⊥ BC

Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^0$ ⇒ 5 điểm A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO

⇒ tứ giác AION nội tiếp ⇒ $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$ mà $\widehat{MTN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{AON}$

⇒ $\widehat{AIN} = \widehat{MTN}$ ⇒ MT//AC

c) Ta có OI ⊥ BC và OK ⊥ BC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) ⇒ O, I, K thẳng hàng

Gọi H là giao điểm của MN và OA ⇒ OA ⊥ MN tại H (1)

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông OAN và OCK ta có

$\begin{cases} OH.OA = ON^2 = R^2 \\ OI.OK = OC^2 = R^2 \end{cases}$ ⇒ OH.OA = OI.OK ⇒ $\frac{OH}{OI} = \frac{OK}{OA}$

Kết hợp với góc O chung ⇒ △OHK △OIA (c-g-c)

⇒ $\widehat{OHK} = \widehat{OIA} = 90^0$

Suy ra KH ⊥ OA tại H (2)

Từ (1) và (2) suy ra K, M, N thẳng hàng (đpcm)

Câu 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq 2022$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P = $\frac{\sqrt{y^2+3x^2}}{xy} + \frac{\sqrt{z^2+3y^2}}{yz} + \frac{\sqrt{x^2+3z^2}}{zx}$

Lời giải

Nhận xét: Với m, n > 0 thì $\frac{1}{m+n} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$

Áp dụng nhận xét ta có

$2022 \leq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$

⇒ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4044$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a Côp-ski ta có

$\frac{\sqrt{y^2+3x^2}}{xy}$ ¿ $\frac{\sqrt{(y^2+3x^2)(1+3)}}{2xy} \geq \frac{y+3x}{2xy}$ ¿ $\frac{1}{2x}\ \frac{+3}{2y}$ (1)

Tương tự: $\frac{\sqrt{z^2+3y^2}}{yz} \geq \frac{1}{2y}\ \frac{+3}{2z}$ (2)

$\frac{\sqrt{x^2+3z^2}}{zx} \geq \frac{1}{2z}\ \frac{+3}{2x}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) ⇒ P ≥ $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ≥ 8088

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = $\frac{1}{1348}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 8088 khi x = y = z = $\frac{1}{1348}$

Câu 5. a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương tình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$$

b) Cho 2022 điểm phân biệt $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên đường tròn có bán kính R = 1 bất kì đều tồn tại điểm M sao cho $MA_1+MA_2+\ldots+MA_{2022} \geq 2022$

Lời giải

a) Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2xy+2(x+y)+2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)-y^2(x+y-2) = 3$

$\Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2)=3$

Do x, y nguyên nên dẫn đến các trường hợp sau

TH1) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

TH2) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; y=2 \\ x=7; y=-2 \end{array}\right.$

TH3) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=2 \\ x=3; y=-2 \end{array}\right.$

TH4) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn bài toán là (3; 0), (3;2), (7, −2), $(-1;2)$, $(3;-2)$, $(-1;0)$

b) Gọi M_1M_2 là đường kính của đường tròn bất kỳ có bán kính R = 1 $\Rightarrow M_1M_2$ = 2

Ta có: $M_1A_1 + M_2A_1 \geq M_1M_2 = 2$

$M_1A_2 + M_2A_2 \geq M_1M_2 = 2$

…

$M_1A_{2022} + M_2A_{2022} \geq M_1M_2 = 2$

Suy ra

$\left(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2022}\right) + \left(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2022}\right) \geq 4044$

Suy ra trong 2 tổng $M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2022}$ và $M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2022}$ có ít nhất 1 tổng ≥ $\frac{4044}{2} = 2022$

Khi đó ta chọn $M \equiv M_1$ hoặc $M \equiv M_2$

suy ra $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2022} \geq 2022$

Bài toán được chứng minh

------HẾT------