

ĐỀ 13: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết

Câu 1. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 trường Liên Trường 2022 - 2023)

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2007 .

Câu 3. (HSG 7 TP Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên có dạng $20232023\dots2023$ chia hết cho 23 .

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nông Công 2022 - 2023)

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên các mặt đó chia hết cho 5.

Câu 5. (HSG 7 tp Vũng Tàu 2021 - 2022)

Chứng tỏ rằng tồn tại một số tự nhiên tận cùng là 2022 và chia hết cho 2021.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2022 - 2023)

Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

Câu 7. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45.

Câu 8.

Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Câu 9.

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2016 .

Câu 10.

Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kỳ trong chúng không chia hết cho hiệu của nó.

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Một cái hộp đựng 60 quả bóng giống nhau, gồm ba màu: màu đỏ, màu xanh và màu vàng. Trong đó có 18 quả bóng màu đỏ và 25 quả bóng màu vàng. Hỏi cần phải lấy ra ngẫu nhiên ít nhất bao nhiêu quả bóng để chắc chắn rằng lấy ra được 2 quả bóng xanh?

Câu 3. (HSG 7, Trường THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

* a_1 là số dương

* Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.

* Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Câu 6.

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng tất cả 100 số đó đều là số âm.

Dạng 3. Sử dụng trong một số bài toán thực tế

Câu 1.

Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Câu 2.

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau trong một giải, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Câu 3.

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 , chỉ có 2 học sinh được điểm 10 . Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Câu 4.

Một đồi thông có 800000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau trên cây.

Câu 5.

Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài. Vậy có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Dạng 4. Sử dụng trong một số bài toán về hình học**Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 – 2022; trường THCS Yên Phong 2022 - 2023)**

Trên một đường tròn có 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối với nhau bởi một đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Sông Lô, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho một hình vuông có cạnh bằng 5 đơn vị và cho 76 điểm nằm bên trong hình vuông đó.

Chứng tỏ rằng có một hình tròn với bán kính bằng $\frac{3}{4}$ đơn vị chứa trọn 4 trong 76 điểm đã cho.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20 , luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 4.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1 . Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong $\triangle ABC$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $0,5$.

Dạng 5. Bài liên quan đến bảng ô vuông**Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)**

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Câu 2.

Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64 , mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5 .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>