# PHẦN A - ĐẶT VẤN ĐỀ

## Cơ sở lí luận

* Luật giáo dục 2005 (Điều 5) quy định: ‘‘Phương pháp giáo dục phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo của người học; bồi dưỡng cho nguời học năng lực tự học, khả năng thực hành, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên’’.
* Mục đích của việc đổi mới phương pháp dạy học ở trường phổ thông là thay đổi lối dạy học truyền thụ một chiều sang dạy học theo ‘‘Phương pháp dạy học tích cực’’ nhằm giúp học sinh :
	+ Phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo, rèn luyện thói quen và khả năng tự học, tinh thần hợp tác, kĩ năng vận dụng kiến thức vào trong thực tiễn;
	+ Tạo niềm tin, niềm vui, hứng thú trong học tập; làm cho ‘‘việc học’’ là quá trình kiến tạo, tìm tòi, khám phá, luyện tập, khai thác và xử lí thông tin... Học sinh tự hình thành hiểu biết, năng lực và phẩm chất.
	+ Tổ chức hoạt động nhận thức cho học sinh, dạy học sinh cách tìm ra chân lí. Chú trọng hình thành các năng lực (tự học, sáng tạo, hợp tác,...) dạy phương pháp và kĩ thuật lao động khoa học, dạy cách học.
* Làm thế nào để đạt được các mục đích trên?

Để trả lời được câu hỏi này, trước tiên người giáo viên cần phải không ngừng tìm tòi khám phá, khai thác, xây dựng hoạt động, vận dụng, sử dụng phối hợp các phương pháp dạy học trong các giờ học sao cho phù hợp với từng kiểu bài, từng đối tượng học sinh, xây dựng cho học sinh một hướng tư duy chủ động, sáng tạo.

## Cơ sở thựctế

* Trong các môn học trong trường THCS thì môn Toán là một trong những môn phục vụ cho các môn học khác nhưng có thể nói là khó nhất. Ở trường THCS, học sinh được học ba phân môn của toán học, đó là Số học, Đại số và Hình học. Trong ba phân môn đó thì học sinh thường gặp khó khăn trong việc giải các bài toán Hình học.
* Trong khi tìm phương pháp giải toán hình học, ta gặp một số bài toán mà nếu không vẽ thêm đường phụ thì có thể bế tắc. Nếu biết vẽ thêm đường phụ thích hợp tạo ra sự liên hệ giữa các yếu tố đã cho thì việc giải toán trở lên thuận lợi hơn, dễ dàng hơn. Tuy nhiên vẽ thêm yếu tố phụ như thế nào để có lợi cho việc giải toán là điều khó khăn và phức tạp.
* Kinh nghiệm thực tế cho thấy rằng, không có phương pháp chung nhất cho việc vẽ thêm các yếu tố phụ, mà là một sự sáng tạo trong khi giải toán, bởi vì việc vẽ thêm các yếu tố phụ cần đạt được mục đích là tạo điều kiện để giải được bài toán một cách ngắn gọn chứ không phải là một công việc tuỳ tiện. Hơn nữa, việc vẽ thêm các yếu tố phụ phải tuân theo các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản, nhiều khi người giáo viên đã tìm ra cách vẽ thêm yếu tố phụ nhưng không thể giải thích rõ cho học sinh hiểu được vì sao lại phải vẽ như vậy, khi học sinh hỏi giáo viên: Tại sao cô (thầy) lại nghĩ ra được cách vẽ đường phụ như vậy, ngoài cách vẽ này còn có cách nào khác không? hay: tại sao chỉ vẽ thêm như vậy mới giải được bài toán? Gặp phải tình huống như vậy, quả thật người giáo viên cũng phải rất vất vả để giải thích mà có khi hiệu quả cũng không cao, học sinh không nghĩ được cách làm khi gặp bài toán tương tự vì các em chưa biết các căn cứ cho việc vẽ thêm yếu tố phụ. Từ thực tế giảng dạy chúng tôi thấy rằng: để giải quyết vấn đề này một cách triệt để, mặt khác lại nâng cao năng lực giải toán và bồi dưỡng khả năng tư duy tổng quát cho học sinh, tốt nhất ta nên trang bị cho các em những cơ sở của việc vẽ thêm đường phụ và một số phương pháp thường dùng khi vẽ thêm yếu tố phụ, cách nhận biết một bài toán hình học cần phải vẽ thêm yếu tố phụ, từ đó khi các em tiếp xúc với một bài toán, các em có thể chủ động được cách giải, chủ động tư duy tìm hướng giải quyết cho bài toán, như vậy hiệu quả sẽ cao hơn. Vì vậy, chúng tôi viết chuyên đề **“Vẽ đường phụ để giải một số bài toán Hình học 7**” nhằm giải quyết các vấn đề đặt ra.

# PHẦN B – GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

## THỰC TRẠNG

* + Trong quá trình dạy học sinh giải một bài toán Hình học lớp 7, chúng tôi thấy học sinh thường gặp một số khó khăn sau đây:
		- Vẽ hình không biết bắt đầu từ đâu và làm gì.
		- Khó khăn hơn trong việc giải bài tập đòi hỏi phải vẽ thêm đườngphụ.
		- Chưa biết suy luận để thấy được sự cần thiết phải vẽ thêm đườngphụ.
		- Vẽ đường phụ còn tuỳ tiện làm hình vẽ trở nên rối, gây khó khăn cho việc giải

bài toán.

* + - Sau khi đã vẽ đường phụ, học sinh thường quan tâm đến việc tìm lời giải của bài

toán mà không tìm hiểu xem tại sao người ta lại kẻ thêm đường phụ như vậy.

* Ta đã biết nếu hai tam giác bằng nhau thì suy ra được các cặp cạnh tương ứng bằng nhau, các cặp góc tương ứng bằng nhau. Đó chính là lợi ích của việc chứng minh hai tam giác bằng nhau. Vì vậy muốn chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau (hay hai góc bằng nhau) ta thường làm theo một cách gồm các bước sau:
	+ Bước1: Xét xem hai đoạn thẳng (hay hai góc) đó là hai cạnh (hay hai góc)

thuộc hai tam giác nào?

* + Bước 2: Chứng minh hai tam giác đó bằngnhau.
	+ Bước 3: Từ hai tam giác bằng nhau, suy ra cặp cạnh (hay cặp góc) tương ứng

bằng nhau.

Tuy nhiên trong thực tế giải toán thì không phải lúc nào hai tam giác cần có cũng được cho ngay ở đề bài mà nhiều khi phải tạo thêm các yếu tố phụ mới xuất hiện được các tam giác cần thiết và có lợi cho việc giải toán. Vì vậy yêu cầu đặt ra là làm thế nào học sinh có thể nhận biết cách vẽ thêm được các yếu tố phụ để giải toán hình học nói chung và toán hình học 7 nói riêng. Qua thực tế giảng dạy chúng tôi đã tích luỹ được một số cách vẽ yếu tố phụ đơn giản và thiết thực, khi hướng dẫn học sinh thực hiện giải toán rất hiệu quả.

## MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐƯỜNGPHỤ

## Kẻ thêm đoạnthẳng

###  Mục đích

Kẻ thêm đoạn thẳng nhằm làm xuất hiện hai tam giác bằng nhau, tam giác cân, tam giác đều.

###  Một số cách kẻ thêm đoạn thẳng

1. *Kẻ thêm đoạn thẳng bằng cách nối hai điểm đã có trong hình vẽ*

**Ví dụ 1.** Cho hình vẽ 1, trong đó AB // CD, AD // BC. Chứng minh rằng : AB = CD,

AD = BC.

### Phân tích :

- Để chứng minh AB= CD,

AD=BC ta cần tìm ra hai tam giác chứa các cạnh này bằng nhau. Nhưng *D* trên hình vẽ lại không có hai tam giác

(H.1a). Như vậy, ta cần tạo ra hai tam

giác chứa các cặp cạnh trên.

*A B*

*D*

**2 1**

**1 2**

***a)***

*C*

**Hình 1**

*A B*

1. *C*

- Đường phụ cần vẽ là đoạn thẳng nối A với C hoặc nối B với D (H.1b).

1. *Kẻ thêm đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác*

Chúng ta thường dùng một trong các cách như sau :

* Lấy trung điểm của một đoạn thẳng;
* Dựng một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã có trên hìnhvẽ.

**Ví dụ 2.** Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Gọi C là một điểm thuộc tia Ax. Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D. Chứng minh rằng CD = AC + BD

***Giải :*** (H.2)

Trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho BE = AC.

Xét ∆OAC và ∆OBE có : OA = OB (gt)

*A*

*E*

**Hình 2**

*y*

 $\hat{OAC}= \hat{OBD}$ = 900

*D*

*x*

AC = BE (cáchdựng)

*C*

Nên ∆OAC = ∆OBE (c.g.c), suy ra OC = OE và $\hat{O\_{1}}= \hat{O\_{2}}$

*1*

Ta có $\hat{COE}= \hat{O\_{2}}$+$\hat{BOC}= \hat{O\_{1}}$+$\hat{BOC}$ = $\hat{AOB}$ = 1800

*O*

*2*

*B*

$⇒\hat{DOE}= \hat{COE}$ - $\hat{COD}$ = 1800 – 900 = 900

Xét ∆OCD và ∆OED có : OC = OE (chứng minh trên)

$\hat{DOE}= \hat{DOC}$ = 900

OD là cạnh chung

Nên ∆OCD = ∆OED (c.g.c), suy ra CD = DE. Mà DE = BD + BE và BE = AC.

Vậy CD = AC + BD.

**Ví dụ 3:** Chứng minh định lí: Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền ( Bài 25/ 67- SGK toán 7 tập 2)

B

A

C

M

D

1

1

2

**Phân tích:**

Ta cần tạo ra đoạn thẳng bằng 2AM rồi tìm cách chứng

minh BC bằng đoạn thẳng đó. Như vậy dễ nhận ra rằng, yếu tố phụ

cần vẽ thêm là điểm D sao cho M là trung điểm của AD.

## Vẽ thêm đường phângiác

###  Mục đích

*Kẻ thêm đường phân giác nhằm làm xuất hiện hai góc bằng nhau, hai tam giác bằng*

*nhau, tam giác cân, tam giác đều, …*

###  Sử dụng khinào?

Ta thường dùng cách vẽ này khi muốn gắn hai đối tượng liên quan (đoạn thẳng, … ) vào hai tam giác có mối liên hệ về góc, về cạnh.

**Ví dụ 4.** Cho ∆ABC có

### Phân tích :

$\hat{B} = \hat{C}$. Chứng minh AB=AC.

*A A*

**1 2**

B

* Để chứng minh AB = AC, ta phải chứng minh hai tam giác chứa cặp cạnh này bằng nhau. Nhưng trên hình vẽ không có hai tam giác bằng nhau (H.4a). Như vậy, ta có thể nghĩ đến việc tạo ra hai tam giác có

C

M

C

**b)**)

**a**)

**Hình 4**

chứa hai cạnh AB và AC bằng nhau. *B*

* Đường phụ cần vẽ là tia phân giác

của góc A (H.4b).

### Nhận xét :

* Vẽ tia phân giác AM là ta đã tạo ra một cặp góc bằng nhau ($\hat{A\_{1}}= \hat{A\_{2}}$) và một cạnh chung (AM) của hai tam giác (∆AMB và ∆AMC). Kết hợp với giả thiết ta dễ dàng tìm ra lời giải của bài toán.
* Có hai cách vẽ khác : dựng AM $⊥$ BC hoặc dựng M là trung điểm của BC.

**Ví dụ 5.** Cho ∆ABC có $\hat{A}=$600.Tia phân giác của góc B cắt AC ở D, tia phân giác của góc

 C cắt AB ở E. Chứng minh rằng BC = BE + CD.

### Phân tích :

* Gọi I là giao điểm của BD và CE (H. 5a), ta dễ dàng tính được:

$\hat{BIC}=$1200 ; $\hat{BIE}= \hat{CID}$ = 600

* Để chứng minh BC = BE + CD ta thấy có ít nhất hai hướng giải quyết như sau:

 + Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BE = BM (H. 5b). Từ đó cần chứng minh

CD = CM

+ Vì $\hat{BIC}=$1200 ; $\hat{BIE}= \hat{CID}$ = 600 nên nếu gọi M là giao điểm của tia phân giác của $\hat{BIC}$ với cạnh BC (H.5c) thì $\hat{BIM}= \hat{CIM}$ = 600, suy ra $\hat{BIE}= \hat{BIM}$; $\hat{CIM}= \hat{CID}$. Từ đó ta dễ dàng tìm ra lời giải.

Ở đây chúng tôi chỉ trình bày cách thứ hai

### Nhận xét :

Vì$\hat{BIC}=$1200 ; $\hat{BIE}= \hat{CID}$ = 600 nên việc kẻ tia phân giác của góc BIC ta thấy xuất

hiện các cặp góc bằng nhau. Từ đó xuất hiện các tam giác bằng nhau.

*A A A*

*E*

*D*

*I*

**1**

**4**

**2 3**

**1**

**2**

**1**

**2**

*M*

***c)***

*B C B*

*E*

*D*

*I*

***a)***

*C B C*

**Hình 5**

*E*

*D*

*I*

**1**

**4**

**2 3**

**1**

**2**

**1**

**2**

*M****b)***

## Kẻ thêm đường thẳng songsong

###  Mục đích

Kẻ thêm đường song song nhằm làm xuất hiện hai góc so le trong bằng nhau, hai góc đồng vị bằng nhau, hai góc trong cùng phía bù nhau và đặc biệt là hai tam giác bằng nhau.

###  Sử dụng khinào?

Ta thường dùng cách này khi đã có các đường thẳng song song trong hình vẽ.

**Ví dụ 6.** Cho hình 6a, trong đó

### Phân tích :

$\hat{ACB}=\hat{A}+\hat{B }$.Chứng minh rằng Ax//By.

* Để chứng minh Ax // By, ta phải tìm ra một cặp góc so le trong, một cặp góc đồng vị bằng nhau hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau. Nhưng trên hình vẽ ta thấy không có các cặp góc như vậy (H. 6a). Ta có thể nghĩ đến việc kẻ thêm đườngphụ.

- Từ giả thiết $\hat{ACB}=\hat{A}+\hat{B }$, ta có thể kẻCz//Ax(H.6b).Từ đó tìm ra lời giải của bài toán

*C z*

*A x A*

*C*

*z* **1**

**2**

*C*

*x A x*

*A x*

*C z*

*B* ***a)*** *y B*

*y B y B*

***b) c)***

**Hình 6**

***d)*** *Dy*

### Nhận xét :

* Việc kẻ tia Cz // Ax, ta đã làm xuất hiện các cặp góc so le trong bằng nhau.
* Ta có thể kẻ tia Cz cùng hướng với tia Ax (và By) (H.6c),nhưng lời giải phức tạp
* Ta cũng có thể kéo dài AC cắt tia By tại D (H.6d) rồi áp dụng định lí tổng ba góc và góc ngoài của tam giác.

**Ví dụ 7.** Cho ∆ABC. Gọi D là trung điểm của AB. Kẻ DE // BC (E $\in $AC). Chứng minh rằng EA =EC.

### Phân tích :

- Để chứng minh EA = EC, ta phải tìm ra hai tam giác có chứa hai cạnh đó bằng nhau. Nhìn trên hình vẽ ta thấy không thể tìm ra hai tam giác như vậy (H.7a). Ta có thể nghĩ đến việc kẻ thêm đường phụ. Nhưng kẻ thêm đường như thế nào cho hợp lí?

*A A*

*D*

*E*

*D***1** *E*

**3 2**

**1 2**

**1 2**

*B* ***a)*** *C*

*B*

**Hình 7**

*F****b)*** C

* Căn cứ vào giả thiết, DE//BC, DA=DB, ta kẻ thêm DF//AC (F$\in $BC) (H.7b).

Dễ chứng minh ∆ADE = ∆DBF (g.c.g) $⟹$ AE = DF.

* Ta cần chứng minh DF=CE. Theo giả thiết và theo cách dựng ta có DE//FC, DF//EC. Do đó DF = EC (xem **Ví dụ 1**). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

## Kẻ thêm đường vuông góc

###  Mục đích

Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra tam giác vuông hoặc tạo ra hai tam giác vuông bằng nhau

###  Sử dụng khi nào?

Ta thường vẽ đường vuông góc khi hình vẽ có các góc với số đo cụ thể (chẳng hạn góc

300, 600, 450, …), hoặc có đường phân giác, …

**Ví dụ 8.** Cho ∆ABC có $\hat{A}=$ 1200, AB = 10 cm, AC = 15 cm. Tính BC.

***Phân tích:*** *B B*

**10**

***1200***

**10**

***1200***

* Dễ thấy:

$\hat{BAx}=$ 1800 – 1200 = 600

(H. 8a) nên ta nghĩ đến việc kẻ

đường vuông góc với AC nhằm tạo ra “nửa tam giác đều”.

* Kẻ BH $⊥$ Ax (H.8b),

*x A* **15**

***a)***

*C H*

**Hình 8**

*A* ***b)* 15** *C*

∆ABH vuông tại H có $\hat{BAx}$ =600 nên AH=AB:2=5(cm). Từ đó ta dễ dàng tìm ra lời giải.

**Ví dụ 9:** Tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến AM chia góc A thành ba góc bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông và ΔABM là tam giác đều?

**Phân tích:**

I

A

B

C

H

M

1

2

3

2

1

Muốn chứng minh tam giác ABC vuông tại A ta cần

kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh

đường thẳng đó song song với AB, từ đó suy ra

AB ⊥ AC và suy ra $\hat{A }$ = 900.

**Ví dụ 10.** Cho ∆ABC có AB = 16$\sqrt{2}$cm, BC=20cm, $\hat{B }$=450. Tính AC.

***450***

HBAx) ̂

ABAx) ̂

BBAx) ̂

CBAx) ̂

**Phân tích:**

- Theo giả thiết AB = 16$\sqrt{2}$ cm, $\hat{B}$= 450 nên ta có thể

nghĩ đến việc tạo ra tam giác vuông cân có AB là cạnh huyền.

- Kẻ AH ⊥ BC, ta thấy ∆AHB vuông cân tại H. Từ đó ta dễ dàng tìm ra lời giải.

C

C

**Ví dụ 11.** Cho hình 11a. Biết AB = 5

cm, AD = 8 cm, CD = 11 cm. Tính BC.

***Phântích:*** *B B H*

11

* Rõ ràng theo hình 11a không thể tính

được BC nếu ta không vẽ đường phụ. Nhưng **5**

vẽ như thế nào và xuất phát từ đâu? *A*

D

A

D

**8**

* Căn cứ vào giả thiết, thì

**a**

**b**

**b**

**a**

**Hình 11**

$\hat{A}$ = $\hat{D}$ = 900, từ đó ta kẻ đường vuông góc từ B (hoặc C)

là hợp lý nhất.

**Ví dụ 12.** Cho tam giác ABC. Dựng điểm D nằm khác phía với điểm C đối với AB sao cho AD  AB, AD = AB; dựng điểm E nằm khác phía với điểm B đối với AC sao cho AE  AC, AE = AC. Kẻ đường thẳng d đi qua A, vuông góc với DE tại H và cắt BC tại I. Chứng minh rằng I là trung điểm củaBC.

***Phân tích:***(H.12a) *E E*

A

D

B

D

I

B

C

I

C

G

F

A

- Ta nhận thấy trên

hình vẽ có các cặp góc bằng *H H*

nhau :

 $\hat{HDA}$ = $\hat{BAI}$ (cùng phụ với $\hat{HAD}$)

$\hat{ HEA}$ = $\hat{CAI}$ (cùng phụ với $\hat{EAH}$)

Hơn nữa, lại có

AD=AB(gt), AE=AC(gt)

**Hình 12**

Điều ta nghĩ đến ở đây là làm sao tạo ra các tam giác vuông bằng với các tam giác

vuông AHD và AHE? Kết hợp với kết quả ở trên, ta thấy từ B và C kẻ đường vuông góc đến đường thẳng AI là hợp lí nhất.

**Ví dụ 13.** Trên đường Nguyễn Văn Thoại hãy tìm vị trí đặt đại lý sao tiết kiệm tối đa thời gian và nhiên liệu nhất khi vận chuyển xăng từ nhà máy sản xuất xăng đến trạm xăng.

**Cách xác định vị trí đại lý:**

A

B

C

D

d

Đặt A: Trạm xăng

 C: Nhà máy sản xuất xăng

 D: Vị trí đặt đại lý

 d: đường Nguyễn Văn Thoại

B1: Xác định B sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

B2: Tìm giao điểm D của BC và đường thẳng d.

## Phương pháp tam giácđều

###  Mục đích

Đây là một phương pháp rất đặc biệt, đó là tạo thêm được vào trong hình vẽ các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau giúp cho việc giải toán được thuận lợi. Để tạo thêm được vào trong hình vẽ các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau ta có thể vẽ tam giác cân, và đặc biệt là tam giác đều.

###  Sử dụng khinào?

Chúng ta thường sử dụng phương pháp tam giác đều khi hình vẽ đã có một tam giác cân với một góc có số đo cho trước

Đối với các bài tập về tính số đo góc, trước tiên ta cần chú ý đến những tam giác chứa

góc có số đo xác định như :

* Tam giác cân có một góc xác định.
* Tam giác đều.
* Tam giác vuông cân.
* Tam giác vuông có một góc nhọn đã biết hay cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền...

**PHẦN C – KẾT LUẬN**

Trên đây chỉ mới là một số bài toán minh hoạ ở một số dạng thường gặp khi vẽ hình phụ, tuy chưa được đầy đủ và phong phú nhưng đó là những ví dụ tiêu biểu thể hiện cách dẫn dắt hướng dẫn học sinh vẽ hình phụ trong chứng minh hình học.

Với kinh nghiệm nhỏ bé đó trong quá trình dạy toán nói chung, dạy môn hình học nói riêng việc hướng cho học sinh tới việc tự tìm tòi nghiên cứu, sáng tạo, tư duy lôgíc tìm ra hướng đi đúng đắn trong việc chứng minh một bài hình. Từ đó học sinh có thể tự mình giải quyết được nhiều bài toán khó. Từ đó học sinh sẽ ham mê thích thú với môn hình học đòi hỏi đầy tính sáng tạo, tính kiên trì.

Ở phạm vi đề tài này rất rộng, rất đa dạng và phong phú. Kinh nghiệm hướng dẫn học sinh về vẽ đường phụ trong chứng minh hình học THCS chỉ là một phần nhỏ không thể lại không thiếu sót và chắn chắn còn nhiều hạn chế. Để kinh nghiệm thêm phong phú và để phục vụ tốt công tác giảng dạy sau này, kính mong được sự đóng góp ý kiến của thầy cô, đồng nghiệp.

 *Sơn Trà, ngày 20 tháng 02 năm 2018*

## Tổ Toán – Tin

## Trường THCS Phan Bội Châu