

## ĐỀ SỐ 2: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

### I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

**Câu 1.** Sau khi rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$  với  $x \neq 0$  và  $x \neq \pm 1$

là:

- A.  $P = \frac{x+1}{x}$       B.  $P = \frac{x+2016}{x}$       C.  $P = \frac{x+2018}{x}$       D.  $P = \frac{x+2017}{x}$

**Câu 2.** Hai số a và b lần lượt thỏa mãn hệ thức sau  $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$  và  $b^3 - 3b^2 + 5b - 11 = 0$ .

Giá trị  $2019 - (a+b)$  là:

- A. 2016      B. 2017      C. 2018      D. 2019

**Câu 3.** Cho  $a > b > 0$  thỏa mãn  $3a^2 + 3b^2 = 10ab$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{a-b}{a+b}$  là:

- A.  $P = -\frac{1}{2}$       B.  $P = \frac{3}{2}$       C.  $P = \frac{1}{2}$       D.  $P = -\frac{3}{2}$

**Câu 4.** Một hộp có 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 5 đến 14. Bạn Hoa lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Xác suất thực nghiệm của biến cố “Chọn ra thẻ ghi số chia hết cho 3” là bao nhiêu % ?

- A. 30%      B. 40%      C. 50%      D. 60%

**Câu 5.** Tập nghiệm của phương trình  $\left| 5x - 1 \right| - 2 = 4x - 3$  là:

- A.  $\left\{ -4; \frac{2}{3} \right\}$       B.  $\left\{ -4; \frac{3}{2} \right\}$       C.  $\{-4; 1\}$       D.  $\{-4; 2\}$

**Câu 6.** Đa thức bậc hai  $P(x)$ , biết:  $P(0) = 25, P(1) = 7, P(2) = -9$  là:

- A.  $x^2 + 19x + 25$       B.  $-x^2 - 19x + 25$       C.  $x^2 - 19x - 25$       D.  $x^2 - 19x + 25$

**Câu 7.** Đa thức  $f(x)$  nếu chia cho  $x - 1$  được số dư bằng 4, nếu chia cho  $x - 3$  được số dư bằng 14. Đa thức dư của phép chia  $f(x)$  cho  $(x - 1)(x - 3)$  là:

- A. 56      B.  $5x + 1$       C.  $-5x - 1$       D.  $5x - 1$

**Câu 8.** Cho đa thức  $F(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ . Biết  $F(1) = 2$ ;  $F(2) = 5$ ;  $F(3) = 10$ ;  $F(4) = 17$ ;  $F(5) = 26$ . Khi đó giá trị  $F(7)$  là:

- A. 50      B. 550      C. 770      D. 880

**Câu 9.** Cho hình thang vuông ABCD có  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AD = 12\text{cm}$ ;  $BC = 13\text{cm}$ . Độ dài CD là:

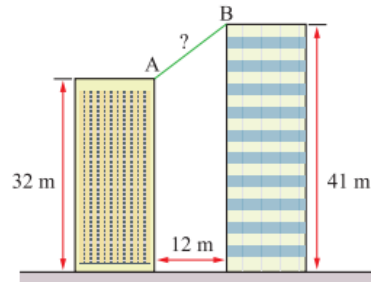
- A. 5cm      B. 8cm      C. 10cm      D. Một số khác

**Câu 10:** Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x + 5$  với trục hoành là:

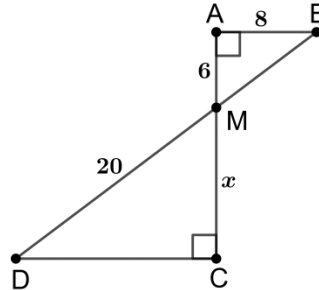
- A.  $(-5; 0)$       B.  $(5; 0)$       C.  $(0; 5)$       D.  $(0; -5)$

**Câu 11:** Cho hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  bằng:

- A.  $15m$
- B.  $9m$
- C.  $12m$
- D.  $21m$



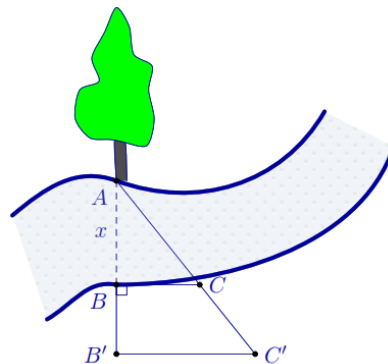
**Câu 12:** Cho hình vẽ:



Độ dài  $x$  là:

- A. 3
- B. 12
- C. 24
- D. 15

**Câu 13:** Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia sông (như hình vẽ). Biết  $BB' = 20m$ ,  $BC = 30m$  và  $B'C' = 40m$ .



Khi đó, độ rộng  $x$  của khúc sông là:

- A.  $26,7m$
- B.  $15m$ .
- C.  $80m$
- D.  $60m$

**Câu 14:** Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 3$  với hai trục  $Ox; Oy$ ;  $C, D$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 2$  với hai trục  $Oy; Ox$ . Khi đó tứ giác  $ABCD$  là hình gì? (chọn câu trả lời đúng nhất)

- A. Hình thang cân
- B. Hình thang
- C. Hình bình hành
- D. Tam giác cân

**Câu 15.** Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và CD. Ta có:

- A.  $NH \parallel AD$       B. Tam giác ABH cân      C.  $MN \parallel BC$       D.  $MN \perp MB$

**Câu 16.** Một người mang cam đi đổi lấy táo và lê. Cứ 9 quả cam thì đổi được 2 quả táo và 1 quả lê, 5 quả táo thì đổi được 2 quả lê. Nếu người đó đổi hết số cam mang đi thì được 17 quả táo và 13 quả lê. Số cam người đó mang đi lúc đầu là:

- A. 100      B. 99      C. 98      D. 97

## II. Phần tự luận (12,0 điểm)

**Câu 1(3,0 điểm):** a. Chứng minh rằng  $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$  chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n.

b. Tìm n để  $n + 5$  và  $n + 30$  đều là các số chính phương ( $n \in \mathbb{Z}$ )

**Câu 2 (3,5 điểm):** 1. Khi chia đa thức  $P(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + 2x + 1$  cho  $(x - 1)$  được số dư là 5 và khi chia P(x) cho  $(x - 2)$  được số dư là -4

Hãy tìm các số thực A, B biết đa thức  $Q(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + Ax + B$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 3x + 2$

2. Cho biết  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  và  $x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = 9^{1009}$ . Tính giá trị

của biểu thức  $P = \left( \frac{2017x + 2018y - 4034z}{3} \right)^{2017} + 2023$ .

**Câu 3 (4,5 điểm):** Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì? Hãy chứng minh điều đó?

b) Chứng minh rằng:  $CH \cdot CD = CB \cdot CK$

c) Chứng minh rằng:  $AB \cdot AH + AD \cdot AK = AC^2$ .

**Câu 4 (1,0 điểm):** Khi trên bảng ghi 2024 số tự nhiên  $1, 2, 3, \dots, 2024$ , cần xóa đi ít nhất bao nhiêu số để các số còn lại trên bảng có tính chất không có 3 số nào mà một trong 3 số đó bằng tích của 2 số còn lại.

---Hết---

## ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

### I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

<b>Câu</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Đáp án</b>	D	B	C	A	A	D	D	C	C	A
<b>Câu</b>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<b>Đáp án</b>	A	B	D	A	D	B				

### HƯỚNG DẪN CHẤM

**Câu 1:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$  với  $x \neq 0$  và  $x \neq \pm 1$

Rút gọn biểu thức P.

**Giải**

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \frac{(x+1+x-1)(x+1-x+1) + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \frac{4x + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2017}{x} = \frac{x+2017}{x} \end{aligned}$$

**Câu 2:** Hai số a và b lần lượt thỏa mãn hệ thức sau

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0 \text{ và } b^3 - 3b^2 + 5b - 11 = 0. \text{ Hãy tính } 2019 - (a+b)$$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } &(a^3 - 3a^2 + 5a - 17) + (b^3 - 3b^2 + 5b + 11) = 0 \Rightarrow \\ &(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + (b^3 - 3b^2 + 3b - 1) + 2(a-1) + 2(b-1) = 0 \\ \Rightarrow &(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a+b-2) = 0 \\ \Rightarrow &(a+b-2) \cdot (\dots) = 0. \text{ Vậy } a+b=2 \end{aligned}$$

**Câu 3.** Cho  $a > b > 0$  thỏa mãn  $3a^2 + 3b^2 = 10ab$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{a-b}{a+b}$

**HD:** Tính  $P^2 = \dots = \frac{1}{4}$  mà  $P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$  (Vì  $a > b > 0$ )

**Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình sau :

$$\frac{1-2x}{4} - 2 \leq \frac{1-5x}{8}$$

**Giải**

$$a; \frac{1-2x}{4} - 2 \leq \frac{1-5x}{8} \Leftrightarrow \frac{2-4x-16}{8} \leq \frac{1-5x}{8} \Leftrightarrow 2-4x-16 \leq 1-5x$$

$$\Leftrightarrow -4x+5x \leq 14+1 \Leftrightarrow x \leq 15$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :  $S = \{x / x \leq 15\}$

**Câu 5.** Tập nghiệm của phương trình  $\left| |5x - 1| - 2 = 4x - 3 \right|$  là:

*Giải:*

Ta có:

$$\left| |5x - 1| - 2 \right| = |4x - 3|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |5x - 1| - 2 = 4x - 3 \\ |5x - 1| - 2 = 3 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5x - 1| = 4x - 1 & (3) \\ |5x - 1| = 5 - 4x & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 5x - 1 = 4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 5x - 1 = 1 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x \geq 0 \\ 5x - 1 = 5 - 4x \\ 5x - 1 = 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{4} \\ x = \frac{2}{3} \\ x \leq \frac{5}{4} \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{2}{3}$  và  $x = -4$ .

**Câu 6:** Tìm đa thức bậc hai  $P(x)$ , biết:  $P(0) = 25, P(1) = 7, P(2) = -9$ .

*Giải*

Đặt  $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x-1)$  (1)

$$b_0 = 25$$

Thay  $x$  lần lượt bằng 0; 1; 2 vào (1) ta được:  $7 = 25 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -18$

$$-9 = 25 - 18 \cdot 2 + b_2 \cdot 2 \cdot 1 \Leftrightarrow b_2 = 1$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$P(x) = 25 - 18x + x(x-1) \Leftrightarrow P(x) = x^2 - 19x + 25.$$

**Câu 7.** Đa thức  $f(x)$  nếu chia cho  $x - 1$  được số dư bằng 4, nếu chia cho  $x - 3$  được số dư bằng 14. Tìm đa thức dư của phép chia  $f(x)$  cho  $(x - 1)(x - 3)$

**Giải:**

**Cách 1:** Gọi thương của phép chia  $f(x)$  cho  $x - 1$  và cho  $x - 3$  theo thứ tự là  $A(x)$  và  $B(x)$

Ta có:

$$f(x) = (x - 1).A(x) + 4 \text{ với mọi } x \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 3).B(x) + 14 \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Gọi thương của phép chia  $f(x)$  cho  $(x - 1)(x - 3)$  là  $C(x)$  và dư là  $R(x)$ . Vì bậc của  $R(x)$  nhỏ hơn bậc của số chia nên bậc của nó nhỏ hơn bậc 2 nên  $R(x)$  có dạng  $ax + b$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x - 1)(x - 3).C(x) + ax + b \text{ với mọi } x \quad (3)$$

Thay  $x = 1$  vào (1) và (3) ta được :  $f(1) = a + b$

Thay  $x = 3$  vào (2) và (3) ta được :  $f(3) = 14$ ;  $f(3) = 3a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư của phép chia  $f(x)$  cho  $(x - 1)(x - 3)$  là  $5x - 1$

**Câu 8.** Cho đa thức  $F(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết  $F(1) = 2$  ;  $F(2) = 5$  ;  $F(3) = 10$  ;  $F(4) = 17$  ;  $F(5) = 26$

Hãy tính  $F(7)$  ;  $F(8)$  ;  $F(9)$  ;  $F(10)$  .

**GIẢI :** Phân tích dãy số 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ta thấy rằng :

$$2 = 1^2 + 1 ; 5 = 2^2 + 1 ; 10 = 3^2 + 1 ; 17 = 4^2 + 1 ; 26 = 5^2 + 1$$

$\Rightarrow 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26$  là các giá trị của đa thức  $H(x) = x^2 + 1$  khi  $x = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$

Vậy ta có  $F(1) = H(1)$  ;  $F(2) = H(2)$  ;  $F(3) = H(3)$  ;  $F(4) = H(4)$  ;  $F(5) = H(5)$

Chứng tỏ tồn tại đa thức bậc 5  $G(x) = F(x) - H(x)$  (1)

Có 5 nghiệm là 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Vì hệ số cao nhất của  $F(x)$  và  $H(x)$  đều bằng 1 nên ta có

$$G(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow F(x) = G(x) + H(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2 + 1$

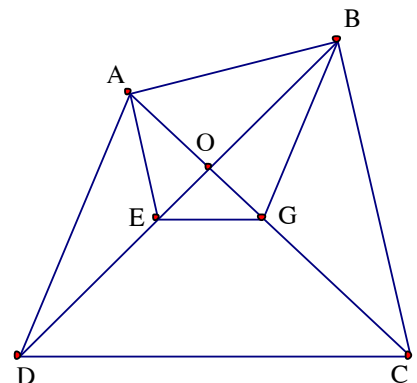
Từ đó ta tính được  $F(7) = 770$  ;  $F(8) = 2585$  ;  $F(9) = 6802$  ;  $F(10) = 15221$

**Câu 9.** Cho hình thang vuông ABCD có  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AD = 12\text{cm}$ ;  $BC = 13\text{cm}$  . Độ dài CD là: 10cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 118)

**Câu 10.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A.  $Bc = 2\text{cm}$ . Vẽ tam giác ACE vuông cân tại E (E và B nằm khác phía đối với AC) . Tính  $\angle$  của tứ giác AECB là:  $AE = EC = 1\text{cm}$ ;  $Ab = \sqrt{2}\text{cm}$ ;  $\angle B = 45^\circ$  ;  $\angle BAE = 135^\circ$  ;  $\angle E = \angle C = 90^\circ$  (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 118)

**Câu 11.** Một hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên . Diện tích của hình thang khi biết đáy nhỏ 14cm và đáy lớn 50cm là:  $768\text{cm}^2$  ; (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 128)

**Câu 12.** Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G và  $AB \parallel CD$  Ta có:



a) chứng minh:  $EG \parallel CD$

b) Giả sử  $AB \parallel CD$ , chứng minh rằng  $AB^2 = CD \cdot EG$

**Giải**

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{a) Vì } AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$$

$$BG \parallel AC \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có:  $\frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC} \Rightarrow EG \parallel CD$

b) Khi  $AB \parallel CD$  thì  $EG \parallel AB \parallel CD$ ,  $BG \parallel AD$  nên

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EG$$

**Câu 13.** Cho hình bình hành ABCD, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC theo thứ tự tại E, K, G. Chứng minh rằng:

a)  $AE^2 = EK \cdot EG$

$$\text{b) } \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích  $BK \cdot DG$  có giá trị không đổi

**Giải**

a) Vì ABCD là hình bình hành và  $K \in BC$  nên

$AD \parallel BK$ , theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK \cdot EG$$

b) Ta có:  $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$ ;  $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$  nên

$$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow AE \left( \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \quad (\text{đpcm})$$

c) Ta có:  $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG} \quad (1)$ ;  $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow \frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG} \quad (2)$

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có:  $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK \cdot DG = ab$  không đổi (Vì  $a = AB$ ;  $b =$

$AD$  là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)

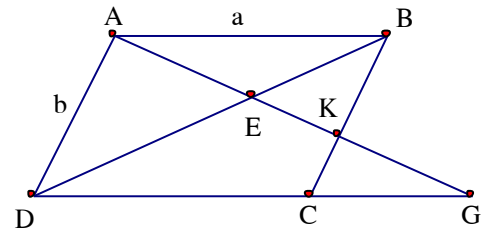
**Câu 14.** Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

Tứ giác AMDB là hình gì? Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật ABCD.

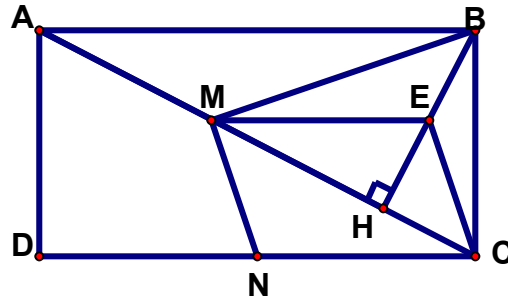
$\Rightarrow PO$  là đường trung bình của tam giác CAM.

$\Rightarrow AM \parallel PO$

$\Rightarrow$  tứ giác AMDB là hình thang.



**Câu 15.** Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh :  $MN \perp MB$ .



Gọi E là trung điểm BH  $\Rightarrow$  ME là đường trung bình của tam giác AHB

$$\Rightarrow ME \parallel AB \text{ và } AE = \frac{AB}{2}$$

$$\text{Mà : } AB = CD; AB \parallel CD; AB \perp BC \text{ và } NC = \frac{CD}{2}$$

Suy ra :  $ME \parallel NC$ ,  $ME = NC$  và  $ME \perp BC$

$\Rightarrow$  MECN là hình bình hành  $\Rightarrow NM \parallel CE$  (1)

Trong tam giác MBC, có: ME và BH là các đường cao cắt nhau tại E

Nên E là trực tâm của tam giác BMC  $\Rightarrow CE \perp MB$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra :  $MN \perp MB$ .

**Câu 16:** Một người mang cam đi đổi lấy táo và lê. Cứ 9 quả cam thì đổi được 2 quả táo và 1 quả lê, 5 quả táo thì đổi được 2 quả lê. Nếu người đó đổi hết số cam mang đi thì được 17 quả táo và 13 quả lê. Hỏi người đó mang đi bao nhiêu quả cam?

**Bài giải:**

9 quả cam đổi được 2 quả táo và 1 quả lê nên 18 quả cam đổi được 4 quả táo và 2 quả lê. Vì 5 quả táo đổi được 2 quả lê nên 18 quả cam đổi được:  $4 + 5 = 9$  (quả táo).

Do đó 2 quả cam đổi được 1 quả táo. Cứ 5 quả táo đổi được 2 quả lê nên 10 quả cam đổi được 2 quả lê.

Vậy 5 quả cam đổi được 1 quả lê. Số cam người đó mang đi để đổi được 17 quả táo và 13 quả lê là:  $2 \times 17 + 5 \times 13 = 99$  (quả).

## II. Phần tự luận (12,0 điểm)

**Câu 1(3,0 điểm):** a. Chứng minh rằng  $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$  chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n  
Giải:

Ta có  $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n \cdot [n^2(n^2 - 7)^2 - 36] = n \cdot [n \cdot (n^2 - 7) - 6] \cdot [n \cdot (n^2 - 7) + 6]$$

$$= n \cdot (n^3 - 7n - 6) \cdot (n^3 - 7n + 6)$$

$$\text{Ta lại có } n^3 - 7n - 6 = n^3 + n^2 - n^2 - n - 6n - 6 = n^2 \cdot (n+1) - n(n+1) - 6(n+1)$$

$$= (n+1)(n^2 - n - 6) = (n+1)(n+2)(n-3)$$

$$\text{Tương tự : } n^3 - 7n + 6 = (n-1)(n-2)(n+3) \text{ d}$$

$$\text{Do đó } A = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Ta thấy : A là tích của 7 số nguyên liên tiếp mà trong 7 số nguyên liên tiếp:

- Tồn tại một bội số của 5 (nên  $A : 5$ )
- Tồn tại một bội của 7 (nên  $A : 7$ )
- Tồn tại hai bội của 3 (nên  $A : 9$ )
- Tồn tại 3 bội của 2 trong đó có bội của 4 (nên  $A : 16$ )

Vậy A chia hết cho 5, 7, 9, 16 đôi một nguyên tố cùng nhau  $\Rightarrow A : 5.7.9.16 = 5040$

b. Tìm  $n$  để  $n + 5$  và  $n + 30$  đều là các số chính phương ( $n \in \mathbb{Z}$ )

### Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} n + 5 = a^2 \\ n + 30 = b^2 \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 25$$

Ta có nhận xét sau:  $b - a \in \mathbb{Z}; b - a < b + a; (b - a)/25 \Rightarrow \begin{cases} b - a \in \{1; 5\} \\ b + a \in \{25; 5\} \end{cases}$

$$+) \begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 13 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} b - a = 5 \\ b + a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy  $n = -5; 139$

**Câu 2 (3,5 điểm):** 1. Khi chia đa thức  $P(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + 2x + 1$  cho  $(x - 1)$  được số dư là 5 và khi chia  $P(x)$  cho  $(x - 2)$  được số dư là  $-4$

Hãy tìm các số thực  $A, B$  biết đa thức  $Q(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + Ax + B$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 3x + 2$

2. Cho biết  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  và  $x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = 9^{1009}$ . Tính giá trị

của biểu thức  $P = \left( \frac{2017x + 2018y - 4034z}{3} \right)^{2017} + 2023$ .

#### 1. Tóm tắt cách giải

a)  $P(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + 2x + 1$  cho  $(x - 1)$  được số dư là 5

$$\Rightarrow P(1) = 1 + a + b + c + 2.1 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1$$

+ khi chia  $P(x)$  cho  $(x - 2)$  được số dư là  $-4$

$$\Rightarrow P(2) = 2^{81} + a2^{57} + b2^{41} + c2^{19} + 2.2 + 1 = -4$$

$$\Rightarrow 2^{81} + a2^{57} + b2^{41} + c2^{19} = -9$$

+ Có  $Q(x) = x^{81} + ax^{57} + bx^{41} + cx^{19} + Ax + B$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$$\Rightarrow Q(1) = 0 = 1 + a + b + c + A + B \Rightarrow A + B = -2 \quad (1)$$

$$Q(2) = 0 = 2^{81} + a2^{41} + b2^{19} + c2^{19} + 2A + B \Rightarrow 2A + B = 9 \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ phương trình (1) và (2)} \Rightarrow A = 11; B = -13$$

b)

$$(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - 27x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -18x^3 + 33x^2 + 57x + 18 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 - 19x - 6 = 0 \quad (2)$$

Ta thấy Pt có một nghiệm  $x = 3$ , nên vế trái có nhân tử  $x - 3$ :

$$(2) \Leftrightarrow (6x^3 - 18x^2) + (7x^2 - 21x) + (2x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2(x - 3) + 7x(x - 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(6x^2 + 7x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)[(6x^2 + 3x) + (4x + 2)] = 0 \Leftrightarrow (x - 3)[3x(2x + 1) + 2(2x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(2x + 1)(3x + 2) \dots$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-1/2; 3; -2/3\}$

2. Cho biết  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  và  $x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = 9^{1009}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left( \frac{2017x + 2018y - 4034z}{3} \right)^{2017} + 2023$$

Giải:

Ta

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = 9^{1009} \Leftrightarrow 3 \cdot x^{2017} = (3^2)^{1009} \Leftrightarrow 3 \cdot x^{2017} = 3^{2019} \Leftrightarrow x = 3 = y = z$$

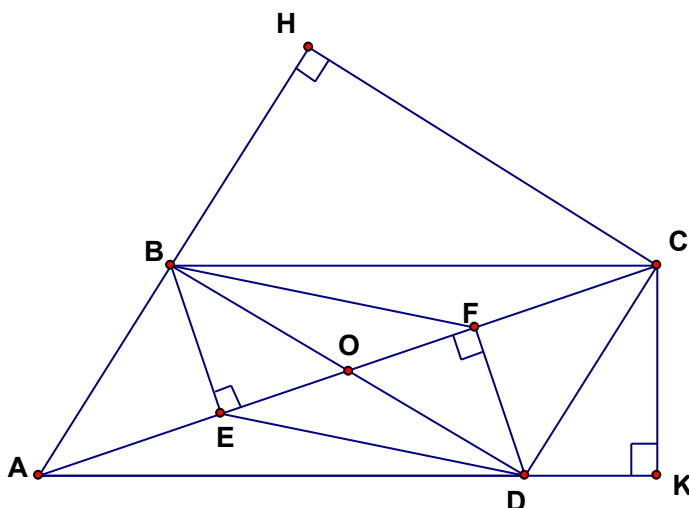
$$\text{Khi đó } P = \left( \frac{2017x + 2018y - 4034z}{3} \right)^{2017} + 2023 = \left( \frac{z}{3} \right)^{2017} + 2023 = 2024.$$

**Câu 3 (4,5 điểm):** Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a. Tứ giác BEDF là hình gì ? Hãy chứng minh điều đó ?

b. Chứng minh rằng : CH.CD = CB.CK

c. Chứng minh rằng : AB.AH + AD.AK = AC<sup>2</sup>.



a) Ta có :  $BE \perp AC$  (gt);  $DF \perp AC$  (gt)  $\Rightarrow BE \parallel DF$

Chứng minh :  $\triangle BEO = \triangle DFO$  (g - c - g)

$\Rightarrow BE = DF$

Suy ra : Tứ giác : BEDF là hình bình hành.

b) Ta có :  $\angle ABC = \angle ADC \Rightarrow \angle HBC = \angle KDC$

Chứng minh :  $\triangle CBH \sim \triangle CDK$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH \cdot CD = CK \cdot CB$$

c) Chứng minh :  $\triangle AFD \sim \triangle AKC$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD \cdot AK = AF \cdot AC$$

Chứng minh :  $\triangle CFD \sim \triangle AHC$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$$

$$\text{Mà : } CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB \cdot AH = CF \cdot AC$$

$$\text{Suy ra : } AB \cdot AH + AB \cdot AH = CF \cdot AC + AF \cdot AC = (CF + AF)AC = AC^2 \text{ (đpcm).}$$

**Câu 4 (1,0 điểm):**

<b>Khi trên bảng ghi 2024 số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 2024, cần xóa đi ít nhất bao nhiêu số để các số còn lại trên bảng có tính chất không có 3 số nào mà một trong 3 số đó bằng tích của 2 số còn lại.</b>	<b>1,0</b>
Nếu xóa 43 số 2, 3, 4, ..., 44 thì các số còn lại là 1, 45, 46, 47, ..., 2024 vì xét 1 số bằng tích của 2 số khác nên ta không cần xét số 1	0,5
khi đó tích của 2 số khác 1 trong phần còn lại nhỏ nhất = $45 \cdot 46 = 2070$ nên chắc chắn không có số nào bằng tích của 2 số khác.	0,5

**Hết**