

ĐỀ CHÍNH THỨC**KIỂM TRA CUỐI KỲ – HỌC KỲ II – LỚP 12****Bài thi môn: TOÁN***(Đề gồm có 4 trang)**Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề*

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C$.

B. $3x^2 + C$.

C. $x^4 + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 3. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $F(1) = -2$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. -5 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 5 .

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x) + 3x^2)dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. 2 .

B. -2 .

C. 18 .

D. -18 .

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S .

A. $S = 4$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2025 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_3 = (2; 3; 1)$.

B. $\vec{n}_1 = (2; -1; -3)$.

C. $\vec{n}_4 = (2; 1; 3)$.

D. $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 3)$ là

A. $2x - y + 3z + 9 = 0$.

B. $2x - y + 3z - 4 = 0$.

C. $x - 2y - 4 = 0$.

D. $2x - y + 3z + 4 = 0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_2 = (3; 4; -1)$. B. $\vec{u}_1 = (2; -5; 2)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 5; -2)$. D. $\vec{u}_3 = (3; 4; 1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(1;0;1), C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. B. $\frac{z+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$. D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{6}$. D. 12.

Câu 11. Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6. Biết rằng con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

A. $\frac{2}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 12. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = 0,5; P(B|A) = 0,8$ và $P(B|\bar{A}) = 0,3$. Khi đó, $P(B)$ bằng:

A. 0,55. B. 0,4. C. 0,6. D. 0,5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$.

a) $F'(x) = 2^x \ln 2$

b) $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

d) $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019) = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx$

$$\text{b) } \int_2^3 f(x)dx = \frac{15}{3}$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 1$$

$$\text{d) } \int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{41}{12}$$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) $2x - y + z - 1 = 0$ và điểm A(2;1;4)

$$\text{a) } d(A; (P)) = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song với (P) là: $2x - y + z - 6 = 0$

c) Góc giữa đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ bằng 30°

d) O là hình chiếu của A trên mặt phẳng (Q). Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là 45°

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

a) d có một vector chỉ phương là: $a = (2;1;3)$

b) d qua điểm A(1;0;3)

c) d vuông góc với d' : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

d) Phương trình đường thẳng đi qua O và song song với d có phương trình là:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

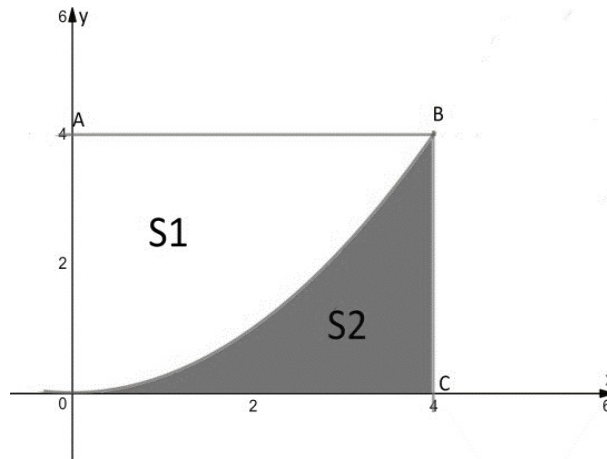
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, Biết $F(1) = \frac{a}{b} - \sin c$. Tính $a + b + c$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi^2 + a\pi + 4}{a}$. Tính

2a

Câu 3. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $b + c$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình chính tắc: $\frac{x}{3} = \frac{y}{b} = \frac{z-2}{c}$. Tính $b.c$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Phương trình mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz - 42 = 0$ có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) . Tính $a + b + c$.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN

PHẦN I

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,25 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	D	D	D	A	B	D	A	A	C	C	C	A

PHẦN II

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm.

- ⊘ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm.
- ⊘ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,25 điểm.
- ⊘ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,50 điểm.
- ⊘ Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1 điểm.

Câu 1:	Câu 2:	Câu 3:	Câu 4:
a) S	a) Đ	a) S	a) S
b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) S	d) S

PHẦN III. (Mỗi câu trả lời Đúng thí sinh Được 0,5 Điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	38	32	2	5	- 2	12

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C$.

B. $3x^2 + C$.

C. $x^4 + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Chọn D

Giải: $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Chọn D

Giải: $\int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x} + C$

Câu 3. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $F(1) = -2$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. -5 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 5 .

Chọn D

Giải: $\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = 3 - (-2) = 5$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. 2 .

B. -2 .

C. 18 .

D. -18 .

Chọn A

Giải: $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - \int_0^2 3x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S .

A. $S = 4$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Chọn A

Giải: $S = \int_0^4 (3x^2 - 4x) dx = 4$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2025 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n}_3 = (2; 3; 1)$. **B.** $\vec{n}_1 = (2; -1; -3)$. **C.** $\vec{n}_4 = (2; 1; 3)$. **D.** $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$.

Chọn D

Giải: Dùng định nghĩa

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 3)$ là

- A.** $2x - y + 3z + 9 = 0$. **B.** $2x - y + 3z - 4 = 0$.
C. $x - 2y - 4 = 0$. **D.** $2x - y + 3z + 4 = 0$.

Chọn A

Giải: $2(x - 1) - 1(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 9 = 0$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?

- A.** $\vec{u}_2 = (3; 4; -1)$. **B.** $\vec{u}_1 = (2; -5; 2)$. **C.** $\vec{u}_3 = (2; 5; -2)$. **D.** $\vec{u}_3 = (3; 4; 1)$.

Chọn A

Giải: Dùng định nghĩa

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 0), B(1; 0; 1), C(3; 1; 0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

- A.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. **B.** $\frac{z+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Chọn C

Giải: Đường thẳng song song BC nên có VTCP $\vec{BC} = (2; 1; -1) \Rightarrow$ ptđt qua A và song song BC là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A.** 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 12.

Chọn C

Giải : $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6 \Rightarrow R = \sqrt{6} \Rightarrow d = 2\sqrt{6}$

Câu 11. Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6. Biết rằng con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

- A. $\frac{2}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Chọn C

Giải: Gọi A là biến cố “con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm”

Gọi B là biến cố “ Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc bằng 6”.

Khi con xúc xắc thứ nhất đã xuất hiện mặt 4 chấm thì lần thứ hai xuất hiện 2 chấm thì tổng hai lần xuất hiện là 6 chấm thì $P(B|A) = \frac{1}{6}$

Câu 12. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = 0,5$; $P(B|A) = 0,8$ và $P(B|\bar{A}) = 0,3$. Khi đó, $P(B)$ bằng:

- A. 0,55. B. 0,4. C. 0,6. D. 0,5.

Chọn A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,5.0,8 + 0,5.0,3 = 0,55.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1:

a) Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

b) Dùng công thức nguyên hàm $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

Vì $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ nên $C = 0$. Do đó, $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

d)

$$\begin{aligned}
 T &= F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019) \\
 &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2018}}{\ln 2} + \frac{2^{2019}}{\ln 2} \\
 &= \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

Câu 2:

$$\text{a) } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx$$

$f(x)$ là hàm được cho bởi nhiều công thức, dựa vào cận ta lấy hàm tương ứng

$$\text{b) } \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{13}{3}$$

c) Ta có :

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x+1) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx \\
 &= \frac{19}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{d) Ta có: } \int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (x+1) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx \right) = \frac{41}{12}$$

Câu 3:

$$\text{a) } d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 4 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

b) Mặt phẳng song song với (P) nên mặt phẳng đó có dạng: $2x - y + z + m = 0 (m \neq -1)$

Vì mặt phẳng đi qua $A(2; 1; 4)$ nên $m = -6$ (Nhận)

c) Vector chỉ phương của đường thẳng d là , vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $n = (2; -1; 1)$

- Côsin của góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $\sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{1}{2}$. Suy ra $(d, (P)) = 30^\circ$

d) Do O là hình chiếu của A lên mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (Q) nhận $\vec{OA} = (2; 1; 4)$ làm vector pháp tuyến

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{14}}{6}. \text{ Suy ra } ((P), (Q)) \approx 52^\circ$$

Câu 4:

a) Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $a = (2; 1; 0)$

b) Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 0; 3)$

c) Vector chỉ phương của đường thẳng d' là $u = (-1; 2; 1)$

Ta có: $a \cdot u = 0$ nên $d \perp d'$

d) Đường thẳng song song với d và đi qua O có phương trình
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, Biết $F(1) = \frac{a}{b} - \sin c$. Tính $a + b + c$

Giải:

Ta có: $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + C_1$.

Mà $f(0) = 3 \Leftrightarrow -1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 4$. Vậy $f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$.

Do đó: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C_2$.

Mà: $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$. Suy ra: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + 2$.

Khi đó: $F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$. $a + b + c = 38$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi^2 + a\pi + 4}{a}$. Tính

2a

Giải : Ta có

$$f(x) = \int (2\cos^2 x + 1)dx = \int \left(\frac{2(1 + \cos 2x)}{2} + 1 \right) dx = \int (\cos 2x + 2)dx$$

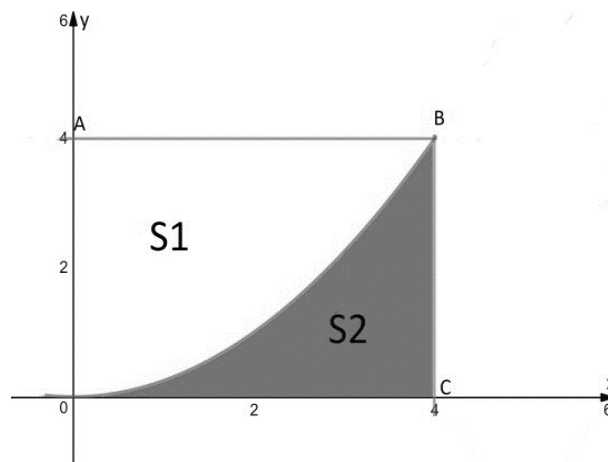
$$= \int \cos 2x dx + \int 2dx = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + C.$$

Lại có $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4.$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4dx$$

$$= \left. -\frac{\cos 2x}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left. (x^2 + 4x) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}. \Rightarrow a = 16 \Rightarrow 2a = 32$$

Câu 3. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tính số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Giải: Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \left. \frac{x^3}{12} \right|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $b + c$

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$, vector pháp tuyến của mp (P) là $\overrightarrow{n_P} = (1; -3; 2)$.

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (0; 8; 12)$ là vector pháp tuyến của mp (Q) .

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp (Q) là:

$$0(x - 2) + 8(y - 4) + 12(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0 \Rightarrow b + c = 5$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình chính tắc: $\frac{x}{3} = \frac{y}{b} = \frac{z-2}{c}$. Tính $b.c$

Giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 1; -1); \overrightarrow{BD} = (0; -1; -2)$.

Mặt phẳng (BCD) có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(BCD)}} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}] = (3; 2; -1)$.

Gọi $\overrightarrow{u_d}$ là vector chỉ phương của đường thẳng d .

$$\text{Vì } d \perp (BCD) \text{ nên } \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(BCD)}} = (3; 2; -1) \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow b.c = -2$$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Phương trình mặt cầu (S') : $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz - 42 = 0$ có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) . Tính $a + b + c$.

Giải:

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3) \text{ và } R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}.$$

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14}$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 42 = 0 \Rightarrow a + b + c = 12$$