

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

ĐƯỜNG THẲNG ĐÔI SONG

Người viết: Nguyễn Văn Nhiệm

Chức vụ: Giáo viên

SKKN thuộc lĩnh vực môn Toán

Thanh Hóa, năm 2016

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
1. Mở đầu	1
2. Nội dung	1
2.1 Cơ sở lý luận	1
2.2 Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	3
2.3 Áp dụng	4
2.4 Bài tập	19
3. Kết luận, kiến nghị	21
<i>Tài liệu tham khảo</i>	21
Cam kết của tác giả	21

1. MỞ ĐẦU

Lí do chọn đề tài

Trong các kì thi học sinh giỏi bài toán hình học phẳng luôn chiếm một vị trí trong đề thi, vì vậy để góp phần nâng cao kĩ năng giải toán hình học phẳng chúng ta cần phải nắm bắt được những phương pháp phát hiện vấn đề.

Mục đích nghiên cứu

Trong bài viết này tôi sẽ giới thiệu phép biến đổi đối song là một trong những phương pháp để phát hiện ra tứ giác nội tiếp, quan hệ song song và vuông góc giữa các đường thẳng, đồng thời cũng là một phương pháp để sáng tạo ra những bài toán mới.

Đối tượng nghiên cứu

Thông qua phép biến đổi đối song cung cấp thêm một phương pháp tư duy, tiếp cận để giải quyết các bài toán hình học phẳng.

Xây dựng một hệ thống bài tập hay và khó đã từng xuất hiện trong các kì thi Olympic, được giải quyết mới (một cách sắc sảo) bằng phương pháp phép biến đổi đối song.

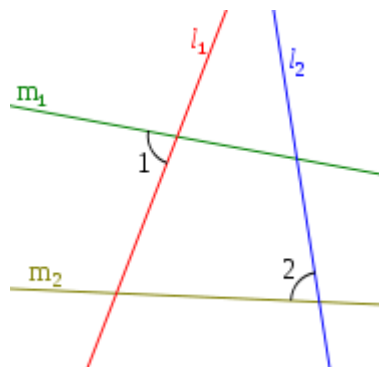
Phương pháp nghiên cứu

Đề tài được nghiên cứu bằng phương pháp phân tích, tổng hợp.

2. NỘI DUNG

2.1 Cơ sở lý luận

Cho hai đường thẳng m_1 và m_2 , hai đường thẳng l_1 và l_2 gọi là đối song với nhau đối với hai đường thẳng m_1 và m_2 , nếu như ảnh l_1' của l_1 qua phép đối xứng qua đường thẳng m (đường phân giác của góc tạo bởi m_1 và m_2) là đường thẳng cùng phương với l_2 .



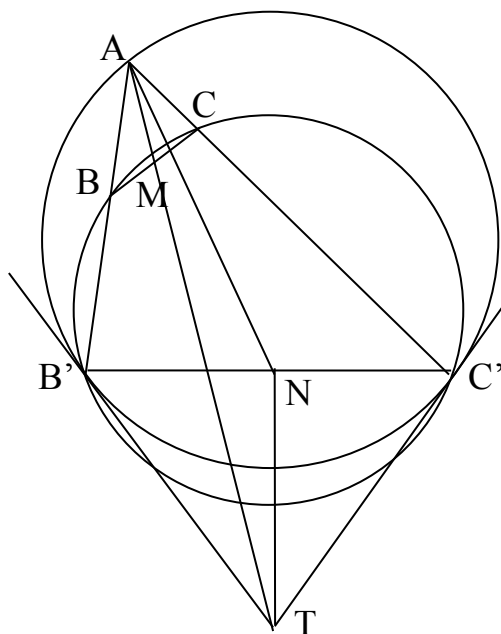
Nhận xét. Nếu ta chỉ để ý đến hai đường thẳng l_1 và l_2 thì l_1' và l_2 song song với nhau (đây là vấn đề hình học tĩnh). Nhưng phép biến đổi đối song biến một lớp các đường thẳng cùng phương với l_1 thành một lớp các đường thẳng cùng phương với l_2 (mỗi đường thẳng trong lớp l_1 đều đối song với một đường thẳng trong lớp l_2) (đây là vấn đề hình học động).

Ta có một số mối liên hệ sau đây về đường thẳng đối song trong tam giác

Cho tam giác ABC, hai điểm P, Q lần lượt thuộc hai đường thẳng AB, AC. Nếu đường thẳng PQ đối song với BC đối với hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC, thì ta còn nói PQ đối song với BC đối với đỉnh A trong tam giác ABC, hay còn nói QP đối song với BC trong tam giác ABC.

- Trong một tam giác đường thẳng nối chân hai đường cao là đường đối song với đường thẳng chứa cạnh còn lại.
- Tiếp tuyến tại mỗi đỉnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường đối song của đường thẳng chứa cạnh đối diện đỉnh đó.
- Bán kính đi qua mỗi đỉnh của tam giác vuông góc với đường đối song của cạnh đối diện đỉnh đó.
- Cho tam giác ABC, đường tròn đi qua hai đỉnh B, C cắt hai đường thẳng AB, AC tại hai điểm P, Q. Khi đó đường kính đi qua đỉnh A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với PQ và đường kính đi qua đỉnh A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ vuông góc với BC.
- Trong một tam giác đường cao và đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác cùng đi qua một đỉnh thì đối song với nhau đối với hai cạnh đi qua đỉnh đó.
- Trong tam giác đường đối trung và đường trung tuyến cùng đi qua một đỉnh thì đối song với nhau, đối với hai cạnh đi qua đỉnh đó.

Hệ quả: Đường tròn đi qua hai điểm B, C cắt hai đường thẳng AB, AC tại hai điểm B', C'. Khi đó đường thẳng nối A với giao điểm của hai tiếp tuyến tại B', C' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB'C' đi qua trung điểm BC.

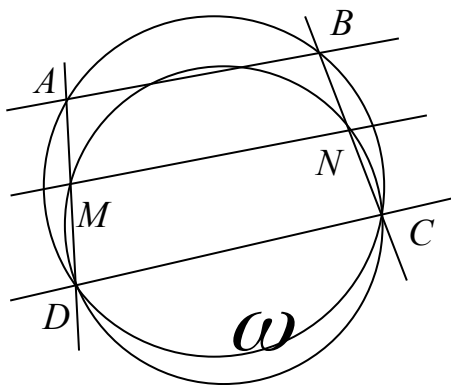


- Trong một tam giác hai đường đối song cùng đi qua một đỉnh thì đẳng giác với nhau. Như vậy hai đường đẳng giác là trường hợp đặc biệt của hai đường đối song.

Ta có mối liên hệ sau đây về đường thẳng đối song trong tứ giác nội tiếp

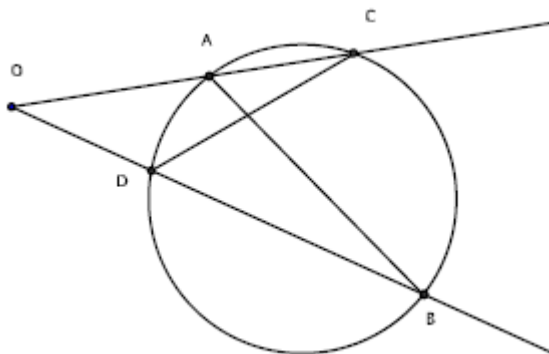
Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, cặp cạnh đối diện đối song với nhau đối với cặp cạnh còn lại.

Như vậy, nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn và đường tròn ω thay đổi đi qua hai đỉnh C, D cắt các đường thẳng AD, BC lần lượt tại M, N thì $MN \parallel AB$.



Ta thường sử dụng điều kiện đối song dưới dạng sau:

Cho A, C thuộc Ox và B, D thuộc Oy ($A, B, C, D \neq O$). Khi đó AB đối song với CD khi và chỉ khi tứ giác $ACBD$ nội tiếp.



2.2 Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Trong hình học vấn đề quan hệ song song và vuông góc giữa các đường thẳng là một trong những quan hệ cơ bản, và vấn đề tứ giác nội tiếp có liên hệ sâu sắc với số đo góc nên những vấn đề này thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi môn toán.

Có những vấn đề về song song, vuông góc giữa các đường thẳng và tứ giác nội tiếp nếu nhìn dưới dạng hình học dạng tĩnh thì khó phát hiện ra vấn đề. Nhưng cũng cùng vấn đề đó được nhìn bằng phép biến đổi đối song (dạng hình học động) thì việc phát hiện ra vấn đề lại rất đơn giản.

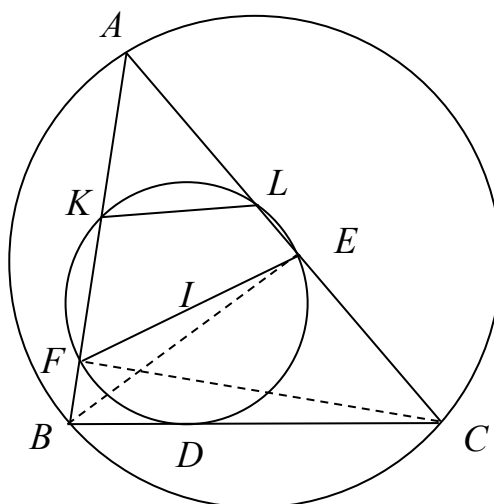
Vì vậy việc nắm bắt được nội dung phép biến đổi đối song sẽ góp phần nâng cao kĩ năng giải toán hình học phẳng.

2.3 Áp dụng

1. (VMO -2015) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I.

Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

Lời giải:



Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của (I) với AB, AC.

Nếu tam giác ABC cân tại A, thì hiển nhiên bài toán đúng.

Giả sử $AB \neq AC$. Ta có BC, KL cùng đối song với EF, suy ra $KL \parallel BC$.

$$\text{Suy ra } \frac{DB^2}{DC^2} = \frac{BF \cdot BK}{CE \cdot CL} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BK}{CL} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BE}{CF} = \frac{\cot B}{\cot C} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}.$$

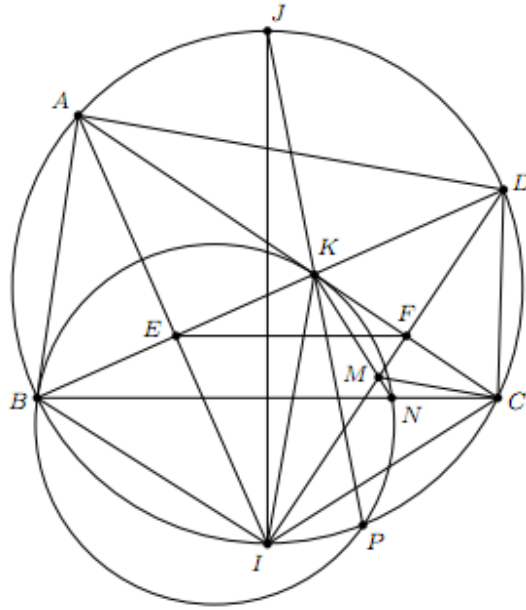
2.(VMO – 2014) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại $D (D \neq B)$ và cắt đường thẳng AI tại E. Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh rằng $2EF = BC$.

Lời giải:

Theo giả thiết thì K thuộc đoạn AC. Do I là trung điểm cung BC nên $\angle EAF = \angle EDF \Rightarrow EADF$ nội tiếp.

Xét tam giác KAD, từ các tứ giác ADFE, ADCB nội tiếp suy ra EF, BC cùng đối song với AD, nên $EF \parallel BC$ (1)

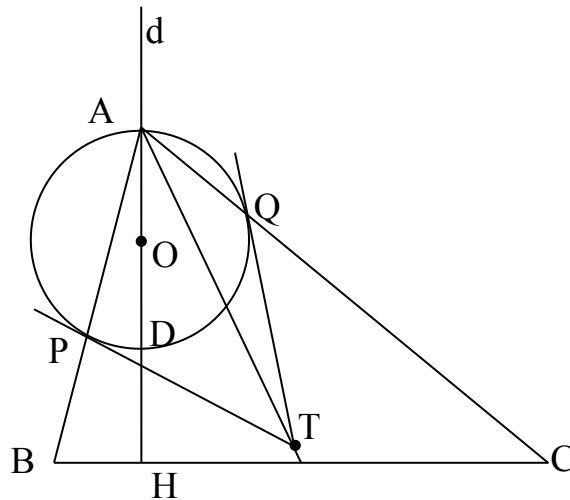
Ta có $IK = IC \Rightarrow \triangle IKC$ cân tại I. Hơn nữa do ABIC nội tiếp, ta suy ra $\angle AKI = 180^\circ - \angle KIC = 180^\circ - \angle KCB = \angle ABI$. Ta lại có $\angle IAK = \angle IAB$ và $IK = IC = IB$, nên suy ra $\triangle ABI = \triangle AKI$, từ đó suy ra AI là trung trực của BK hay E là trung điểm BK (2).



Từ (1) và (2) suy ra EF là đường trung bình của tam giác KBC hay $2EF = BC$.

3. Cho tam giác ABC. Đường thẳng d đi qua đỉnh A vuông góc với BC. O là điểm bất kỳ thuộc d , đường tròn tâm O bán kính OA cắt hai đường thẳng AB, AC tại P, Q. Gọi T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Chứng minh rằng điểm T luôn thuộc một đường thẳng cố định khi O thay đổi trên d .

HD: Cách 1: Ta có $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = \overline{AQ} \cdot \overline{AC} = \overline{AT} \cdot \overline{AT} \Rightarrow B, P, Q, C$ đồng viên, do đó PQ đối song với BC trong tam giác ABC. Áp dụng hệ quả trên suy ra điều phải chứng minh.



Cách 2: Kẻ tiếp tuyến d tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Suy ra (d, AT, AP, AQ) là chùm điều hòa. Mà $BC \parallel d$, suy ra AT đi qua trung điểm BC.

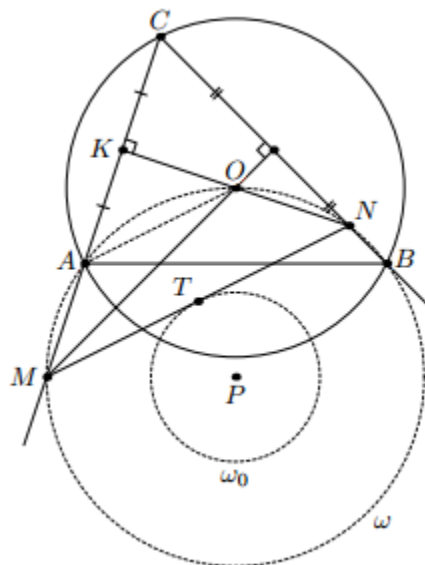
4. Cho tam giác ABC. AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AA' cắt AB, AC tại P, Q. Tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn đường kính AA' cắt nhau tại A'' . Các điểm B'', C'' được xác định tương tự. Chứng minh rằng AA'', BB'', CC'' đồng qui.

5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường trung trực của AC cắt CB tại N, đường trung trực của CB cắt CA tại M.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Cho A, B và (O) cố định. Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

HD: a) Gọi K, L lần lượt là trung điểm CA, CB suy ra KL song song AB. Ta có KL đối song với MN và $AB \parallel KL$, suy ra AB đối song với MN trong tam giác CMN. Do đó bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn.



b) Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCO, suy ra P cố định.

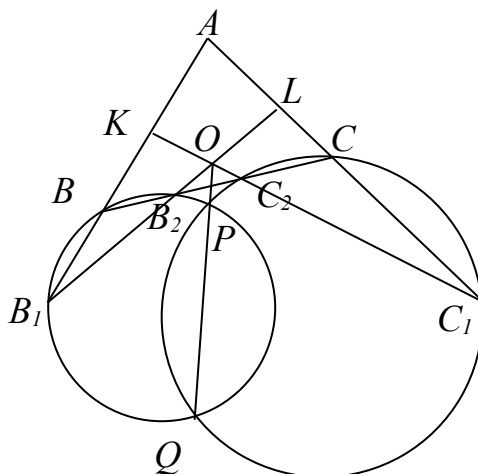
MN tiếp xúc với đường tròn tâm P, bán kính bằng nửa bán kính đường tròn (O).

6. (**RUSSIA 1998**) Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác BCO. OK là đường kính của (S); D, E lần lượt là giao điểm thứ hai của (S) với AB, AC. Chứng minh ADKE là hình bình hành.

HD: Hệ quả của bài 3.

7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) Đường trung trực của AB cắt AC, CB lần lượt tại C_1, C_2 ; đường trung trực của AC cắt BA, BC lần lượt tại B_1, B_2 . Chứng minh bốn điểm B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên.

HD: Gọi K, L lần lượt là trung điểm AB, AC. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KLO là trung điểm AO và B_1C_1 đối song với KL trong tam giác KLO.



Mà $B_2C_2 \parallel KL \Rightarrow B_1C_1$ đối song với B_2C_2 trong tam giác OB_2C_2 , do đó B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên

Nhận xét: Nếu gọi P, Q là giao điểm của hai đường tròn (BB_2B_2) , (CC_1C_2) thì O, P, Q, A thẳng hàng.

8. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, N, M; BI cắt MN tại E, CI cắt MN tại F. Chứng minh rằng tứ giác BFEC nội tiếp.

Giải: Gọi P là giao điểm thứ hai của AI với (O). Để chứng minh được P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI. Xét tam giác BCI có $IP \perp EF \Rightarrow EF$ đối song với BC, suy ra BFEC nội tiếp.

9. Cho đường tròn (O) cố định và AB là một dây cung cố định khác đường kính của (O). I là trung điểm đoạn AB. P là điểm thay đổi trên cung lớn AB của (O). Gọi M, N lần lượt thuộc tia PA, PB sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$. Chứng minh:

a) Đường thẳng đi qua P vuông góc với MN đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng Ole của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

HD: a) Gọi $X = IM \cap PB, Y = IN \cap PA$. (không mất tổng quát giả sử N thuộc đoạn AX, thì M thuộc đoạn AY)

Ta có $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB \Rightarrow \triangle YPN, \triangle XPM$ cân tại Y, X.

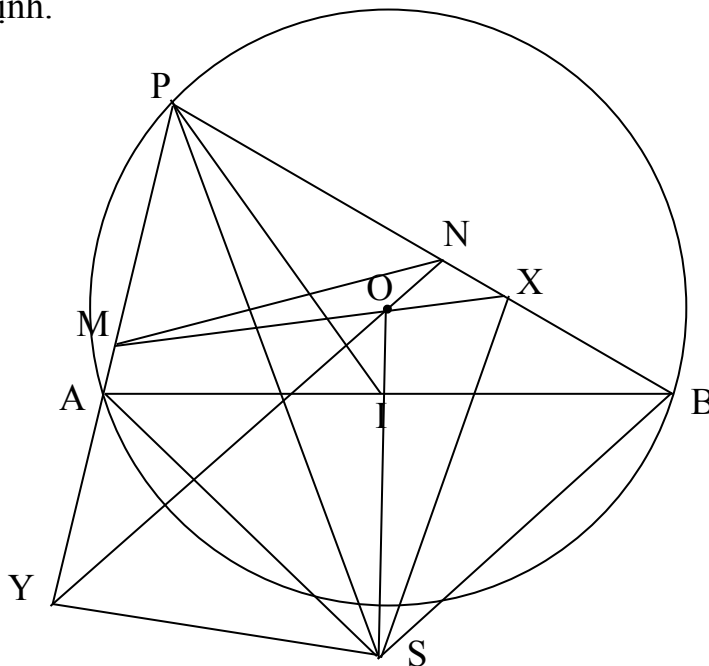
Suy ra $\angle PYN = 180^\circ - 2\angle APB = \angle XPM \Rightarrow MNXY$ nội tiếp.

Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB, suy ra S cố định.

Ta có $\angle PSB = \angle OSB = 180^\circ - \angle AOB = \angle PXI \Rightarrow IXBS$ nội tiếp. Tương tự ISYA nội tiếp.

Suy ra $\angle SXB = \angle SYA = \angle SIB = 90^\circ \Rightarrow PS$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY.

Xét tam giác PXY: Từ tứ giác MNXY nội tiếp, suy ra MN đối song với XY. Suy ra PS vuông góc với MN. Vậy đường thẳng đi qua P vuông góc với MN luôn đi qua điểm S cố định.



b) **Bổ đề:** Cho tam giác ABC và một đường tròn ω đi qua hai đỉnh B, C cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Gọi H, H' lần lượt là trực tâm các tam giác AMN, ABC. Gọi I là giao điểm của BY và CX. Khi đó H, H', I thẳng hàng.

Thật vậy, dễ thấy H, H', I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BX, CY.

Trở lại bài toán: Gọi H, H' lần lượt là trực tâm của các tam giác PMN, PXY.

Từ $\triangle YPN, \triangle XPM$ cân tại Y, X suy ra H' là tâm đường tròn (PMN).

Áp dụng bổ đề ta được đường thẳng Oile của tam giác PMN luôn đi qua I cố định.

10. (IMO 1985) Đường tròn tâm O đi qua hai đỉnh B, C của tam giác ABC, cắt các cạnh AB, BC tương ứng tại K, N. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và KBN cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $\angle OMB = 90^\circ$.

Lời giải: *Cách 1:* Gọi O', O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BKN.

Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của BO', BO_1 với các đường tròn $(O'), (O_1)$. Gọi O_2 là trung điểm EF, suy ra $BE \parallel O_1O_2$ và $O'O_2 \parallel BF$.

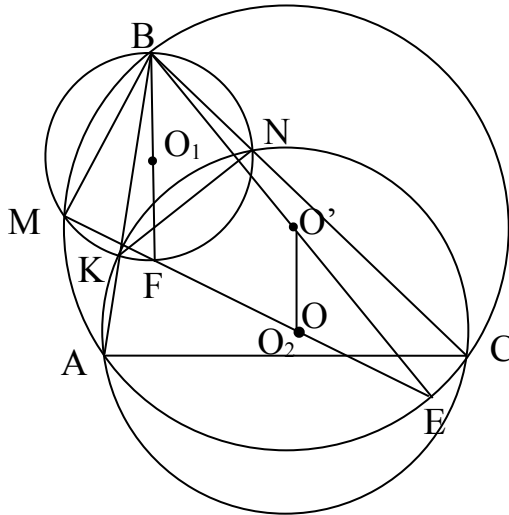
Xét tam giác ABC, ta có KN là đường đối song của AC, suy ra $BE \perp KN$.

Do đó $O_1O_2 \perp KN$, suy ra O_2 thuộc trung trực của KN (1).

Dễ thấy E, F, M thẳng hàng vì ME và MF cùng vuông góc với BM.

Xét tam giác BKN, ta có AC là đường đối song của KN, nên $BF \perp AC \Rightarrow O'O_2 \perp AC$. Do đó O_2 thuộc trung trực của AC (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O_2 \equiv O$. Do đó O nằm trên đường thẳng EM, nên $OM \perp BM$.



Cách 2: Ta có KN là đối song của AC trong tam giác BAC, suy ra $BO' \perp KN$ (1).

AC là đối song của KN trong tam giác BKN, suy ra $BO_1 \perp AC$ (2).

$(O) \cap (O_1) = \{K, N\} \Rightarrow OO_1 \perp KN$ (3). $(O) \cap (O') = \{A, C\} \Rightarrow OO' \perp AC$ (4).

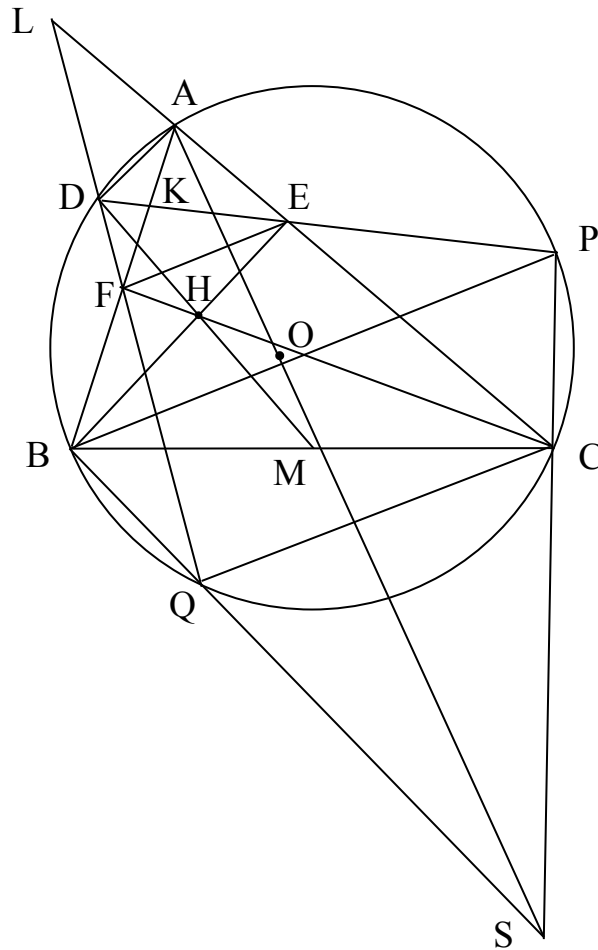
Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $BO'O O_1$ là hình bình hành, suy ra BO cắt $O'O_1$

Lời giải: Không mất tổng quát giả sử D thuộc cung AB không chứa C. Gọi K là giao điểm của AF và DE. Để chứng minh được AEHFD nội tiếp.

Xét các tam giác AKD, ta có EF, BP cùng đối song với AD, suy ra EF//BP (1).

Tương tự gọi L là giao điểm của DF và AE. Xét tam giác ALD, ta có EF, CQ cùng đối song với AD, suy ra EF//CQ (2).

Từ (1) (2) và 4 điểm B, P, Q, C nằm trên đường tròn suy ra BQCP là hình thang cân. Gọi S là giao điểm của BQ và CP, suy ra $OS \perp BP$. Mặt khác cũng từ tính chất đối song suy ra $OA \perp EF$. Từ đó suy ra A, O, S thẳng hàng. Vậy AO, BQ, CP đồng qui tại S.

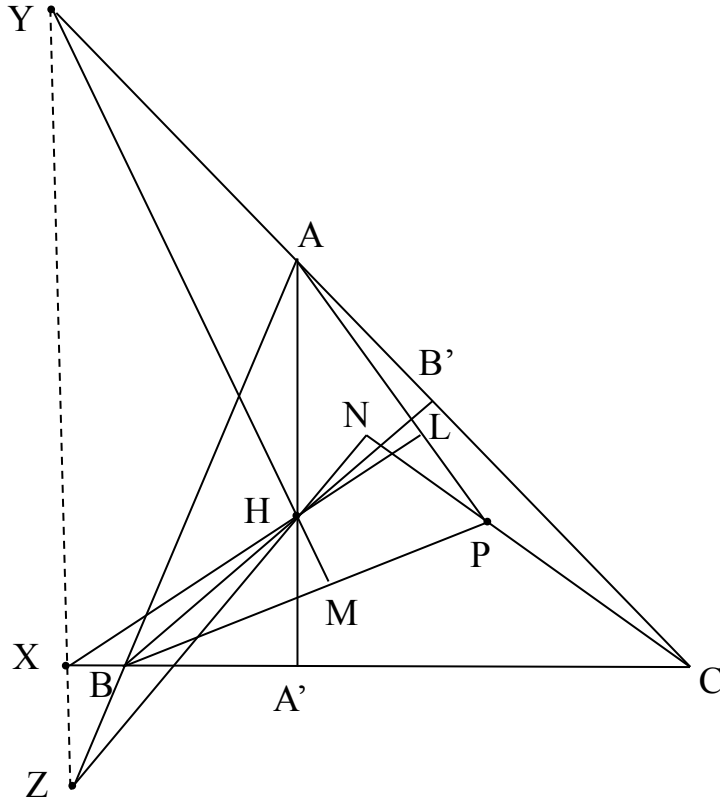


Mở rộng: Cho tam giác ABC. Đường tròn đi qua hai điểm B, C cắt AB, AC tại E, F đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. DE, DF cắt lại đường tròn (ABC) tại P, Q. Chứng minh rằng PC, QB, AO đồng qui (O là tâm đường tròn (ABC)).

13. (England – 2007) Gọi H là trực tâm tam giác ABC, P là điểm nằm trong mặt phẳng tam giác ABC khác A, B, C. Các điểm L, M, N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến đường thẳng PA, PB, PC. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của LH, MH, NH với BC, CA, AB. Chứng minh ba điểm X, Y, Z thẳng hàng.

Lời giải: Cách 1. Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C đến các cạnh đối diện. Để thấy $\overline{HA.HA'} = \overline{HB.HB'} = \overline{HC.HC'}$.

Ta có $\angle NZ = \angle C'Z = 90^\circ \Rightarrow$ bốn điểm C, N, C', Z đồng viên, suy ra $\overline{HN} \cdot \overline{HZ} = \overline{HC} \cdot \overline{HC}'$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overline{HL} \cdot \overline{HX} = \overline{HA} \cdot \overline{HA}'$ và $\overline{HM} \cdot \overline{HY} = \overline{HB} \cdot \overline{HB}'$. Từ đó suy ra các bộ 4 điểm (X, Y, L, M), (X, Z, L, N) đồng viên.



Để thấy tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HLM, HLN là trung điểm HP. Xét tam giác HLM với đường tròn (XYLM) đi qua L, M suy ra XY đối song với LN, do đó $PH \perp XY$ (1). Chứng minh tương tự ta có $PH \perp XZ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra X, Y, Z thẳng hàng.

Cách 2. Để chứng minh X, Y, Z thẳng hàng ta chứng minh $PH \perp XY$ và $PH \perp XZ$. Ta có

$$XH \equiv HL \perp PA \Leftrightarrow XP^2 - XA^2 = HP^2 - HA^2 \quad (1)$$

$$XB \equiv CB \perp AH \Leftrightarrow AX^2 = AB^2 = HX^2 - HB^2 \quad (2)$$

$$BH \perp AC \equiv AY \Leftrightarrow BA^2 - BY^2 = HA^2 - HY^2 \quad (3)$$

$$YH \equiv MH \perp BP \Leftrightarrow YB^2 - YP^2 = HB^2 - HP^2 \quad (4).$$

Cộng (1), (2), (3) và (4) về theo vế ta được

$$XP^2 - YP^2 = HX^2 - HY^2 \Leftrightarrow PH \perp XY \quad (5).$$

Chứng minh tương tự ta có $HP \perp XZ$ (6). Từ (5) và (6), suy ra đpcm.

Cách 3. Đặt $\overline{HA} \cdot \overline{HA}' = \overline{HB} \cdot \overline{HB}' = \overline{HC} \cdot \overline{HC}' = \overline{HL} \cdot \overline{HX} = \overline{HN} \cdot \overline{HZ} = \overline{HM} \cdot \overline{HY} = r$. Xét phép nghịch đảo φ tâm H, phương tích r .

Qua phép biến đổi $\varphi: L \rightarrow X, M \rightarrow Y, N \rightarrow Z$; mà đường tròn (LMN) đi qua H, nên qua φ đường tròn (LMN) biến thành đường thẳng XYZ.

14. (HSG-THPT chuyên Lam Sơn 2015) Trong mặt phẳng cho tam giác ABC không cân, cố định. Đường tròn ω thay đổi luôn đi qua hai điểm B, C; ω cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi K là giao điểm của BE và CF, O là tâm đường tròn ω . Chứng minh rằng:

a) KO luôn đi qua một điểm cố định khi ω thay đổi.

b) $d(A, KO) \leq 2R$ (trong đó $d(A, KO)$ là khoảng cách từ A đến đường thẳng OA và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

HD: Cách 1: Gọi M là giao điểm của EF và BC, thì AM là đường đối cực của K đối với đường tròn ω do đó $OK \perp AM$. Gọi $H = AM \cap OK \Rightarrow AH \perp HO$ và $\overline{OH} \cdot \overline{OK} = \overline{OB}^2 \Rightarrow OB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK, suy

ra $(OB, BK) \equiv (BH, HO) \equiv (BH, HA) + (HA, HO) \equiv (BH, HA) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, (vì $HA \perp HO$)

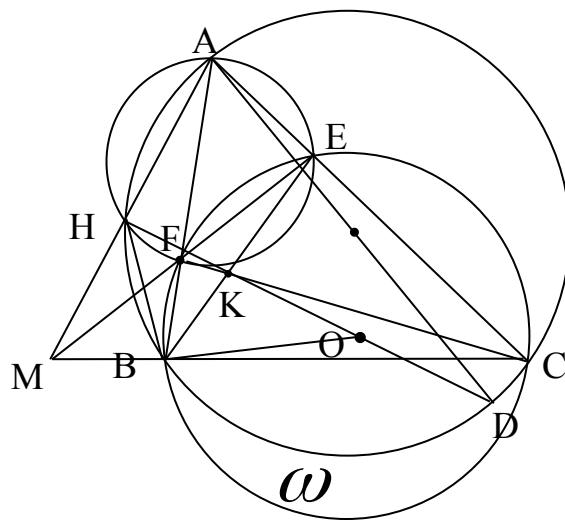
$\Rightarrow (BH, HA) \equiv (OB, BK) - \frac{\pi}{2} \equiv (OB, BE) - \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(OE, OB) - \frac{\pi}{2}$, (vì $\triangle OBE$ cân tại O)

$\equiv \frac{1}{2}(OB, OE) \equiv (BC, CE) \equiv (BC, CA) \pmod{\pi}$, suy ra bốn điểm A, H, B, C cùng

nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra KO luôn đi qua điểm D cố định, với AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Cách 2: Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt lại ω tại B', qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt lại ω tại C'. Gọi $D = BB' \cap CC'$, suy ra AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra D cố định.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm B, C, E, F, B', C' cùng nằm trên đường tròn ω , suy ra K, O, D thẳng hàng.



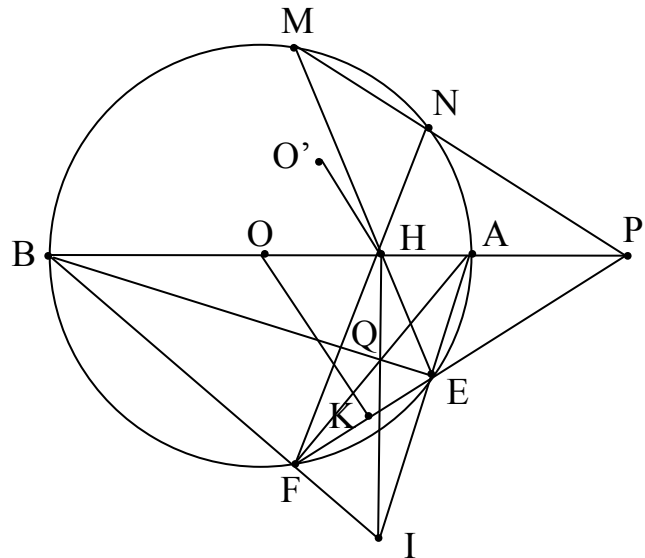
b) Ta có $d(A, KO) = AH \leq AD = 2R$. Dấu bằng khi và chỉ khi $H \equiv D$ khi và chỉ khi tâm O của ω là giao điểm đường thẳng vuông góc với AD tại D và trung trực của BC.

Nhận xét: - Có thể chứng minh $OK \perp AM$ bằng định lý Brocard.

- Bài toán trên được sáng tác theo tính chất EF đối song với BC trong tam giác ABC.

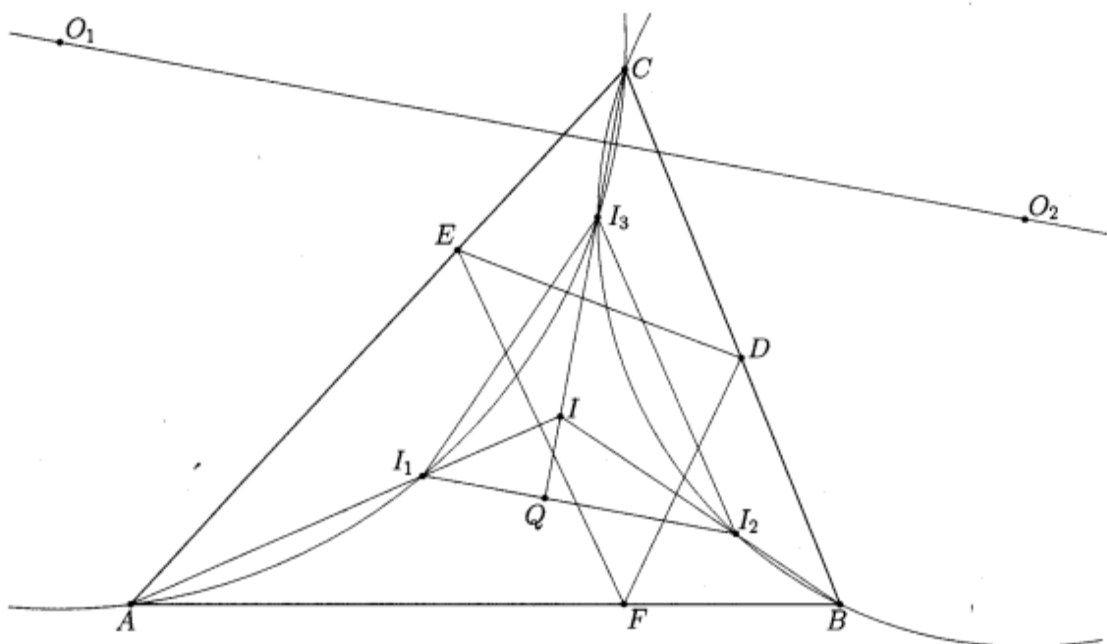
15. (T5/436 - TH&TT) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm I nằm ngoài đường tròn kẻ IH vuông góc với AB (H nằm giữa O và A). IA, IB cắt (O) lần lượt tại E, F; EF cắt AB tại P. EH cắt (O) tại điểm thứ hai là M, PM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Gọi K là trung điểm EF, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN. Chứng minh rằng $O'H \parallel OK$.

HD: BE, AF, IH đồng qui tại Q là trực tâm của tam giác ABI, suy ra IH là phân giác của $\angle EHF \Rightarrow M, F$ đối xứng qua AB $\Rightarrow PM, PF$ đối xứng nhau qua AB $\Rightarrow N, H, F$ thẳng hàng. Mà EF là đường đối song của MN đối với tam giác HMN, suy ra $O'H$ vuông góc với EF. Theo giả thiết ta có $OK \perp EF$. Từ đó suy ra $O'H \parallel OK$



16. (Shortlits IMO -2012) Cho tam giác ABC nhọn, các điểm D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh BC, CA, và AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDF; O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACI_1, BCI_2 . Chứng minh rằng I_1I_2 song song với O_1O_2 .

HD:



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và I_3 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CED . Để chứng minh được $II_1.IA = II_2.IB = II_3.IC$, suy ra các tứ giác AI_1I_2B , BI_2I_3C , AI_1I_3C nội tiếp. Do đó đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại C , I_3 . Suy ra $O_1O_2 \perp CI$ (1).

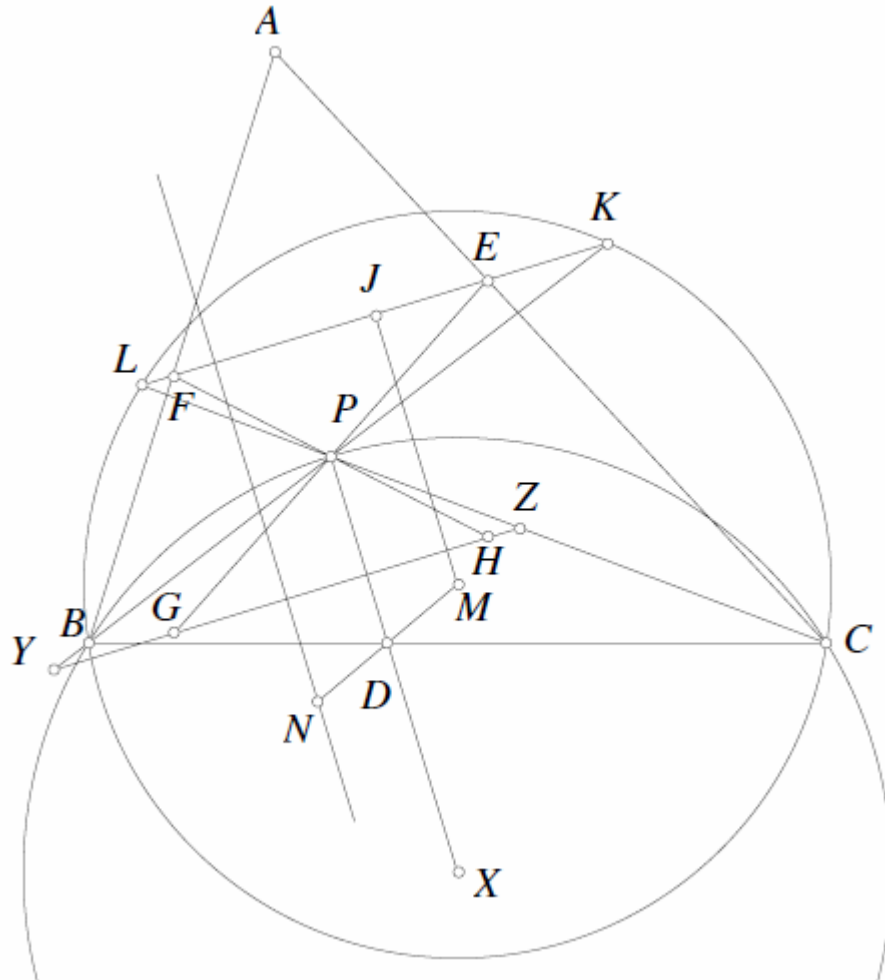
Để thấy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB là trung điểm cung AB (không chứa C), nên thuộc CI .

Ta lại có I_1I_2 đối song với AB trong tam giác AIB , do đó $CI \perp I_1I_2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I_1I_2 song song với O_1O_2 .

17. Cho tam giác ABC , P là điểm bất kỳ. Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C . BP, CP lần lượt cắt (M) tại K, L . KL cắt CA, AB tại E, F . G, H lần lượt đối xứng với E, F qua P . GH cắt PB, PC tại Y, Z . Giả sử B, C và (M) cố định, A, P thay đổi sao cho đường nối P và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định trên BC . Chứng minh rằng trung trực YZ luôn đi qua một điểm cố định.

HD: Gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC . Ta có LK đối song với BC trong tam giác BPC , suy ra $PX \perp LK$. Gọi J là trung điểm LK , suy ra $MJ \perp LK$.



Từ đó $PX \parallel JM$. Ta lại có đoạn LK đối xứng với đoạn ZY qua P và PX đi qua điểm D cố định trên BC , nên trung trực của ZY đi qua điểm N (cố định) đối xứng với M qua D .

18. Cho đoạn BC và D thuộc BC cố định. Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C . M đối xứng với O qua BC . Đường thẳng qua O song song với MD cắt (O) tại A sao cho A và M khác phía với BC . Đường tròn (K) cố định đi qua B, C . MD cắt đường thẳng đi qua A vuông góc với BC tại H . HB, HC cắt (K) tại E, F khác B, C . Y, Z đối xứng với E, F qua H . Chứng minh rằng trung trực của YZ luôn đi qua một điểm cố định khi (O) di chuyển.

HD:

- H là trực tâm của tam giác ABC ; M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .

- Ta có EF là đường đối song với BC trong tam giác BHC . Suy ra EF vuông góc với HM . Từ đó suy ra điểm cố định là điểm đối xứng với K qua điểm D .

19. Cho tam giác MKL . S đối xứng với K qua ML , T đối xứng với L qua MK . Y là tâm đường tròn Öle của tam giác MLK . Chứng minh rằng MY đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MST .

HD: Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MST .

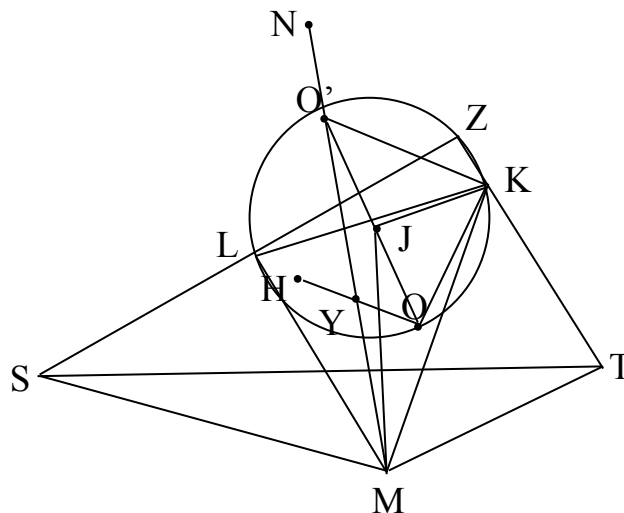
- Dễ thấy đường đẳng giác của MN trong tam giác MLK cũng là đường đẳng giác của MN trong tam giác MST .

- Mà N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MST , nên theo tính chất đối song, đường đẳng giác của MN trong tam giác MST là đường thẳng đi qua M vuông góc với ST .

- Đường đẳng giác của đường thẳng MY trong tam giác MLK là đường thẳng đi qua M và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KOL (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MLK). Thật vậy, gọi O' là điểm đối xứng với O qua KL và J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KOL . Dễ thấy OK là tiếp tuyến của

$$(KO'J), \text{ suy ra } OK^2 = OO' \cdot OJ \Rightarrow OM^2 = OO' \cdot OJ \Rightarrow \frac{OM}{OJ} = \frac{OO'}{OM}$$

$$\Rightarrow \triangle MOO' \sim \triangle JOM \Rightarrow \angle OMO' = \angle OJM = \angle MH \quad (H \text{ là trực tâm tam giác } MLK).$$



- Ta cần chứng minh $MJ \perp ST$. Thật vậy, Gọi $Z = SL \cap TK \Rightarrow Z \in (KOL)$. Ta có: $SJ^2 - TJ^2 = P_{S/(KOL)} - P_{T/(KOL)} = SL.SZ - TK.TZ = KL(SZ - TZ) = KL(LZ - KZ) = ML^2 - MK^2 = MS^2 - MT^2 \Rightarrow SJ^2 - TJ^2 = SM^2 - TM^2 \Rightarrow ST \perp MJ$.

20. Cho tam giác ABC; AD, BE, CF là các đường cao; trung tuyến AM. $DF \cap BE = P, CF \cap DE = Q$. S, T lần lượt là hình chiếu của B, C trên trung trực của AC, AB. $MS \cap PQ = U, MT \cap PQ = V$. Chứng minh rằng S, T, U, V thuộc một đường tròn.

HD: Gọi K, L lần lượt là trung điểm AC, AB; X, Y lần lượt là tâm đường tròn Ôle của các tam giác ABC, MLK. Ta có S đối xứng với K qua ML và T đối xứng với L qua MK.

- Áp dụng bài 19 ta có MY đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MST.
- Áp dụng tính chất đối song ta cần chứng minh $MY \perp UV$. Thật vậy,
- Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta có $\begin{cases} P_{P/(DEF)} = P_{P/(HBC)} \\ P_{Q/(DEF)} = P_{Q/(HBC)} \end{cases} \Rightarrow P, Q$ thuộc trục đẳng phương của (DEF) và (HBC). Suy ra $AX \perp PQ$, vì A, X và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC thẳng hàng.
- Qua phép vị tự $V_{\left(G, \frac{1}{2}\right)}: AX \rightarrow MY$ (G là trọng tâm tam giác ABC), suy ra AX song song với MY, hay $MY \perp UV \Rightarrow$ đpcm.

21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn ω thay đổi luôn đi qua B, C cắt các đường thẳng AB, AC tại E, F tương ứng. O_1 đối xứng với O qua EF; O_2 đối xứng với O_1 qua AB; O_3 đối xứng với O_1 qua AC. Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$.

HD: Đáp số $\{A\}$.

22. (VÒNG 2, TRƯỜNG ĐÔNG BẮC TRUNG BỘ 2015)

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn ω . Đường tròn ω' thay đổi đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F ($E, F \neq A$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn ω tại K ($A \neq K$). KE, KF lần lượt cắt lại đường tròn ω tại Q, P ($P, Q \neq K$). Gọi T là giao điểm của BQ và CP. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BF, CE.

- Chứng minh rằng T thuộc một đường thẳng cố định khi đường tròn ω' thay đổi.
- Chứng minh rằng KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Nguyễn Văn Nhiệm

Lời giải: Gọi O là tâm đường tròn ω .

a) Cách 1: $(EF, BP) \equiv (EF, FP) + (FP, BP) \equiv (EA, KA) + (KA, BA)$ (vì E, F, A, K đồng viên và A, B, P, K đồng viên) $\equiv (EA, BA) \equiv 0 \pmod{\pi} \Rightarrow EF \parallel BP$ (1).

Chứng minh tương tự, ta có $EF \parallel CQ$ (2).

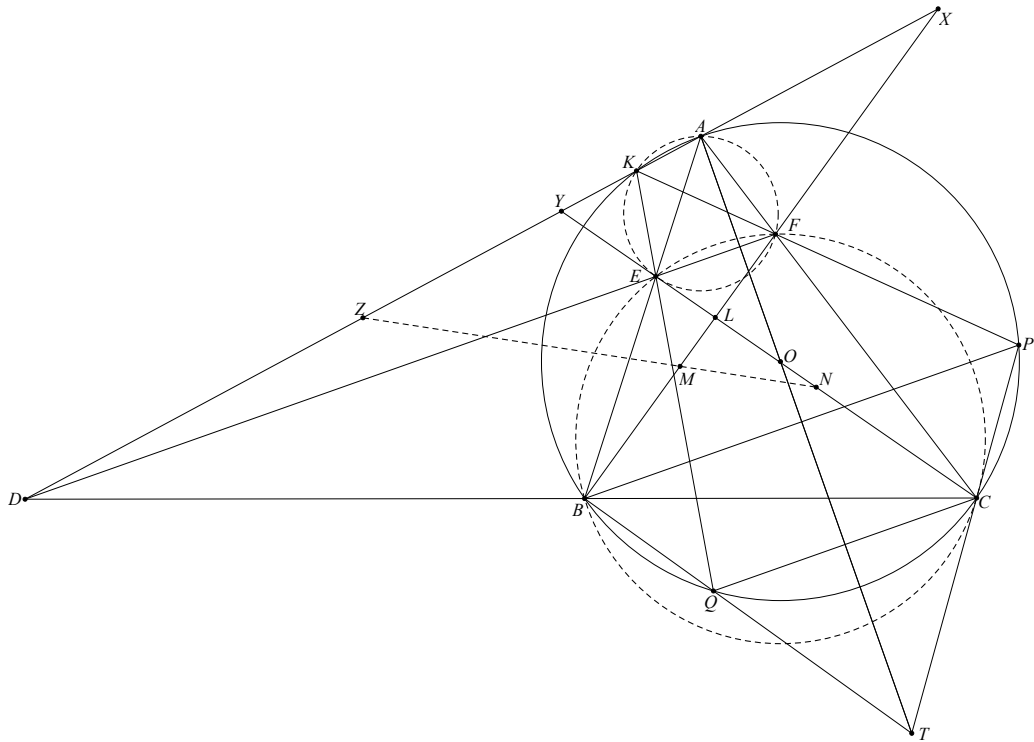
Từ (1) và (2) suy ra $BP \parallel CQ \Rightarrow BP, CQ$ là hai đáy hình thang cân, suy ra OT vuông góc với BP (vì O thuộc trung trực của BP và CQ), do đó OT vuông góc với EF. Để chứng minh được EF vuông góc AO. Từ đó suy ra A, O, T thẳng hàng. Vậy T thuộc đường thẳng AO cố định.

Cách 2: Gọi $U = AE \cap KF, V = AF \cap KE$.

Xét tam giác AKU, từ các bộ bốn điểm (A, K, E, F), (A, K, B, P) đồng viên, suy ra EF và BP cùng đối song với AK. Do đó $BP \parallel EF$. Tương tự $CQ \parallel EF$. Suy ra BP, CQ là hai đáy hình thang cân. Suy ra OT vuông góc với BP, do đó OT vuông góc với EF. Để chứng minh được EF vuông góc AO. Từ đó suy ra A, O, T thẳng hàng. Vậy T thuộc đường thẳng AO cố định.

b) Ta có BC, EF, AK theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn ω và ω' ; ω' và (AEF); ω và (AEF). Do đó BC, EF, AK đồng qui tại một điểm D. Gọi : L là giao điểm của BF và CE; X, Y theo thứ tự là giao điểm của BF, CE với AD. Suy ra $(AD, XY) = -1 \Rightarrow B(AD, XY) = -1 \Rightarrow B(EC, LY) = -1$

$\Rightarrow (EC, LY) = -1$. Mà N là trung điểm CE, nên theo hệ thức Mác-lô-ranh ta có $\overline{LN.LY} = \overline{LE.LC}$. Hoàn toàn tương tự, ta có $\overline{LM.LX} = \overline{LF.LB}$.



Suy ra $\overline{LN.LY} = \overline{LM.LX}$, suy ra M, N, X, Y đồng viên.

Gọi Z là trung điểm AD, suy ra M, N, Z thẳng hàng theo định lý về đường thẳng Gauss cho tứ giác toàn phần BCFEAD

Từ M, N, X, Y đồng viên suy ra $\overline{ZM.ZN} = \overline{ZX.ZY}$. Mặt khác ta lại có $(AD, XY) = -1$ và Z là trung điểm AD, nên theo hệ thức Niu-tơn ta có $ZA^2 = \overline{ZX.ZY} = \overline{ZM.ZN} \Rightarrow ZA$ là tiếp tuyến của đường tròn (AMN). Đpcm.

23. Cho đường tròn (C) tâm O cố định và một điểm M khác O. Đường kính AB quay quanh O nhưng đường thẳng AB không đi qua M. MA, MB cắt (O) tại các điểm thứ hai A', B'.

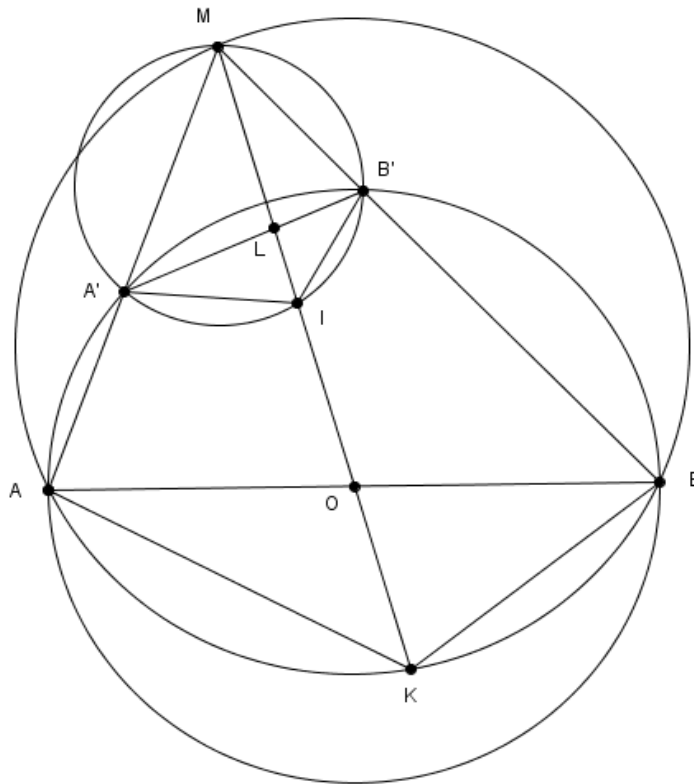
a) Chứng minh rằng đường thẳng A'B' đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MA'B' đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Gọi L, K, I lần lượt là giao điểm của đường thẳng OM với A'B', đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác MA'B'.

HD: Tứ giác MAKB nội tiếp đường tròn và có giao điểm hai đường chéo là O, nên $OM \cdot OK = OA \cdot OB$. Suy ra $OK = \frac{OA \cdot OB}{OM}$ không đổi, nên K là điểm cố định.



Dễ thấy A'B' đối song với AB trong tam giác MAB, suy ra các tứ giác AA'LK, BB'LK nội tiếp, suy ra $ML \cdot MK = MA' \cdot MA = P_{M/(O)}$ không đổi, suy L cố định do K cố định.

b) Do $\angle MIA' = \angle MB'A' = \angle MA'O$ nên $\triangle MA'I \sim \triangle MOA \Rightarrow \frac{MA'}{MI} = \frac{MO}{MA} \Rightarrow MI = \frac{MA' \cdot MA}{MO}$

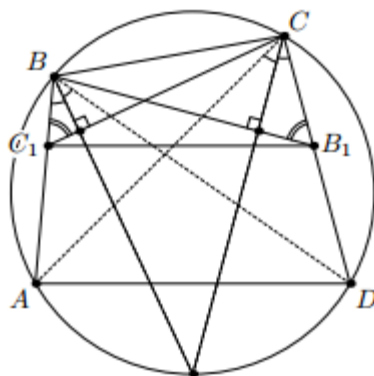
Với chú ý $MA \cdot MA'$ không đổi (lí luận tương tự câu a) ta suy ra I là điểm cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MA'B' luôn đi qua một điểm cố định khác M là I.

2.4 Bài tập

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng đi qua B vuông góc với phân giác $\angle ACD$ cắt CD tại B_1 , đường thẳng đi qua C vuông góc với phân giác $\angle ABD$ cắt AB tại C_1 . Chứng minh rằng AD song song với B_1C_1 .

HD: Dễ thấy BCB₁C₁ nội tiếp, suy ra AD, C₁B₁ cùng đối song với BC do đó AD song song với B₁C₁.



2. (RUSSIA – 98). Đường trong ω tâm O cắt đường trong ω' tại hai điểm A, B. C là một điểm bất kì nằm trên đường ω ($C \neq A, B$). Gọi E, D là giao điểm thứ hai của ω' với CA, CB tương ứng. Chứng minh rằng CO vuông góc với DE.

HD: DE đối song với AB

3. (UKRAINA – 96). Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). ω là đường tròn đi qua A, B, O. Đường thẳng CA, CB cắt ω tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng PQ vuông góc với CO.

4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và vuông góc với nhau. Các góc DAB và CBA nhọn. Điểm M thuộc đoạn AO và điểm N thuộc đoạn OB sao cho góc BMD = góc ANC = 90 độ.

Gọi E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABO, CDO. Chứng minh rằng EF vuông góc với MN.

HD: $ON^2 = OA \cdot OC$

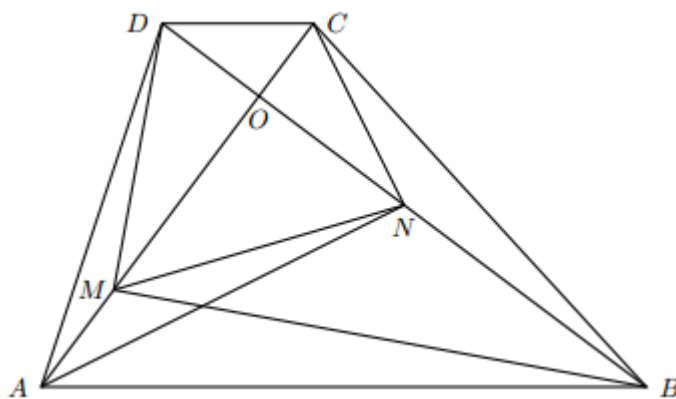
$OM^2 = OB \cdot OD$.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{ON^2}{OA^2} = \frac{OA \cdot OC}{OA^2} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB} \\ \frac{OM^2}{OB^2} = \frac{OB \cdot OD}{OB^2} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB} \end{cases} \Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} \Rightarrow ON \cdot OB = OM \cdot OA \Rightarrow MN \parallel AB$$

nội tiếp. Do đó MN đối song với AB trong tam giác OAB. Suy ra MN vuông góc với OE.

Tương tự OF cũng vuông góc với MN từ đó suy ra điều phải chứng minh.



5. AC và BD là hai dây cung của đường tròn tâm O và $K = AC \cap BD$. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK, CDK. Chứng minh rằng MKON là hình bình hành.

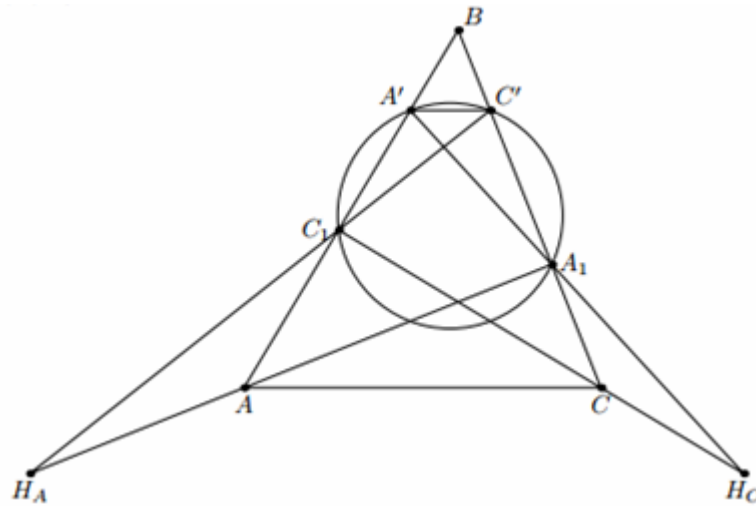
HD:

- DC đối song với AB trong tam giác AKB, suy ra $MK \perp DC$ (1).
- ON là trung trực của CD, suy ra $ON \perp DC$ (2).
- MO là trung trực của AB, suy ra $MO \perp AB$ (3).
- AB đối song với CD trong tam giác KCD, suy ra $NK \perp AB$ (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra MKON là hình bình hành.

6. Cho tam giác ABC, các đường cao AA_1, CC_1 cắt nhau tại H. Điểm H_A đối xứng với điểm H qua A. Đường thẳng $H_A C_1$ cắt AC tại C' ; điểm A' định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng $A'C' \parallel AC$.

HD:



$\Delta AHC_1 \sim \Delta CHA_1 \Rightarrow \Delta AH_A C_1 \sim \Delta CH_C A_1 \Rightarrow \angle A' A_1 B = \angle C' C_1 B \Rightarrow A', C', A_1, C_1$ đồng viên và $A'C'$ đối song với $C_1 A_1$, ta lại có AC cũng đối song với $C_1 A_1$. Do đó $A'C' \parallel AC$.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

Qua hệ thống một số bài tập trên đây chúng ta đã thấy được vai trò của phép biến đổi đối song trong giải toán và sáng tạo ra các bài toán mới. Nhiều bài toán trong các kì thi như VMO, IMO được giải (mới) một cách sắc sảo bằng phương pháp đối song. Đồng thời thông qua phép biến đổi đối song chúng ta sẽ sáng tạo ra các bài toán mới hay và khó.

Phương pháp đối song trình bày trong bài viết này đã được tác giả giảng dạy cho học sinh trong các lớp chuyên toán và trong các đợt tập huấn cho các đội tuyển ôn luyện trong kì thi HSG Quốc gia, Quốc tế và các em đều áp dụng thành công khi gặp các bài toán có nội dung hình học liên quan.

Vấn đề này đã được trình bày trong báo cáo chuyên đề về bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên do Viện toán cao cấp tổ chức vào tháng 8 năm 2015, được các đồng nghiệp đánh giá là một phương pháp rất hữu ích trong giải các bài toán hình học liên quan.

Nội dung này cũng đã được trình bày trong chuyên đề bồi dưỡng giáo viên cấp THCS năm học 2015 – 2016. Sau khi tiếp thu, nhiều giáo viên rất phấn khởi nói rằng nhiều bài toán trước đây thiếu cơ sở để tìm tòi lời giải và cơ sở giải thích tại sao lại có những lời giải bài toán như vậy, nay thì chúng tôi đã có cơ sở rồi.

Bản thân tôi nhận thấy phương pháp đường thẳng đối song là một phương pháp mới rất hữu hiệu trong giải toán hình học phẳng, vì vậy tôi kiến nghị Sở Giáo dục và Đào tạo nghiên cứu, phổ biến nội dung này rộng rãi, nhằm tạo thuận lợi và góp phần nâng cao chất lượng học tập, giảng dạy bộ môn Toán của học sinh và giáo viên.

Tài liệu tham khảo

Một số đề bài toán trong bài viết này được sưu tầm từ các tài liệu dưới đây và lời giải đã được tác giả giải (mới) bằng phương pháp đối song.

[1] Shortlits IMO.

[2] <http://analgeomatica.blogspot.com>

[3] [http://www. Geometry.ru/olymp/php](http://www.Geometry.ru/olymp/php)

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ *Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2016*
Tôi cam đoan SKKN này không sao chép nội dung của người khác.

Nguyễn Văn Nhiệm