

MỤC LỤC

	Trang
MỞ ĐẦU	2
<i>Chương I: TDST-Tiềm năng nội dung lượng giác trong việc bồi dưỡng TDST.</i>	5
§1: Tư duy sáng tạo	5
§ 2: Tiềm năng nội dung lượng giác trong việc bồi dưỡng TDST.	7
§ 3: Thực tiễn dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo.	24
<i>Chương II: Phương hướng và biện pháp cơ bản dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng bồi dưỡng TDST.</i>	28
§ 1: Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức	28
§ 2: Khắc phục ảnh hưởng tiêu cực của thói quen tâm lí khi hướng dẫn học sinh giải bài tập lượng giác.	35
§ 3: Sáng tạo bài toán mới từ bài toán ban đầu.	42
<i>Chương III: Thực nghiệm</i>	51
KẾT LUẬN CHUNG	55

MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Rèn luyện năng lực sáng tạo (NLST), tư duy độc lập linh hoạt là một trong những mục tiêu của quá trình dạy học. Cùng với việc cung cấp những kiến thức, kỹ năng cơ bản việc rèn luyện cho học sinh NLST là cần thiết. Đặc biệt trong bộ môn toán, phát huy NLST của học sinh là sự tích hợp của tính tích cực và độc lập trong nhận thức, là sự phối hợp thống nhất giữa sự chỉ đạo của giáo viên với năng lực giải quyết vấn đề của học sinh nhằm đạt mục đích dạy học.

Năng lực toán học nói chung, năng lực sáng tạo nói riêng chỉ có thể hình thành và phát triển trong hoạt động. Học toán ở phổ thông chính là học các hoạt động toán học, trong đó hình thức hoạt động toán học chủ yếu của học sinh là giải bài tập toán

Nội dung dạy học lượng giác góp phần trang bị cho học sinh không chỉ các khái niệm, quy tắc, công thức biến đổi ... mà còn cả kỹ năng và phương pháp học toán. Hệ thống tri thức đó không chỉ có trong các bài giảng lý thuyết mà còn trong các bài tập tương ứng. Bài tập lượng giác vừa là mục đích vừa là phương tiện làm cho học sinh nắm vững kiến thức cơ bản, rèn luyện kỹ năng (kỹ năng tính toán, kỹ năng suy luận toán học, kỹ năng toán học hóa các tình huống thực tế,...), góp phần phát triển năng lực toán học cho học sinh. Vì vậy tổ chức có hiệu quả việc dạy học giải bài lượng giác có vai quyết định đối với chất lượng học tập nội dung này nói riêng và chất lượng dạy học toán nói chung. Dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng bồi dưỡng tư duy sáng tạo (TDST) là thiết thực góp phần thực hiện xu hướng đổi mới phương pháp dạy học: Tích cực hóa học tập của học sinh.

Bài tập lượng giác chiếm một phần không nhỏ trong nội dung dạy học lượng giác. Ngoài việc củng cố lý thuyết, rèn luyện các thao tác biến đổi linh hoạt thì bài tập lượng giác còn được dùng làm công cụ hữu hiệu trong việc giải quyết một số bài toán đại số, hình học phẳng...

Trong thực tiễn việc dạy học giải lượng giác theo định hướng phát huy sáng tạo chưa được chú trọng, hiệu quả dạy học giải lượng giác nói chung, bồi dưỡng sáng tạo thông qua dạy nói riêng chưa cao.

Với tất cả lý do trên, việc xem xét nghiên cứu vấn đề: “Dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo” là vấn đề cần thiết, có ý nghĩa thực tiễn sâu sắc.

II. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU:

Nghiên cứu đề xuất các phương hướng và biện pháp cơ bản dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng bồi dưỡng tư duy sáng tạo.

III. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU:

Nghiên cứu tiềm năng nội dung lượng giác bồi dưỡng tư duy sáng tạo và thực tiễn bồi dưỡng tư duy sáng tạo thông qua dạy học giải bài tập lượng giác.

Nghiên cứu phương hướng và biện pháp cơ bản bồi dưỡng tư duy sáng tạo thông qua dạy học giải bài tập lượng giác.

Tổ chức thực nghiệm: Kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

Nghiên cứu lý luận:

Điểm lại 1 số vấn đề chung về tư duy sáng tạo và nội dung dạy học ở trường phổ thông.

Điều tra quan sát:

Tiến hành tìm hiểu thực trạng dạy và học giải bài tập lượng giác ở nhà trường phổ thông, vấn đề dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo thông qua trao đổi với giáo viên, học sinh và quan sát dự giờ.

Thực nghiệm sư phạm:

Thực nghiệm kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

V. CẤU TRÚC SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM:

Mở đầu:

Chương I: Tư duy sáng tạo- Tiềm năng nội dung lượng giác bồi dưỡng tư duy sáng tạo.

§ 1: Tư duy sáng tạo.

§ 2: Tiềm năng nội dung lượng giác bồi dưỡng tư duy sáng tạo.

§ 3: Thực tiễn việc dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo.

Chương II: Phương hướng và biện pháp cơ bản dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng bồi dưỡng tư duy sáng tạo.

§ 1: Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức.

§ 2: Khắc phục ảnh hưởng tiêu cực của thói quen tâm lý khi dạy học giải bài tập lượng giác.

§ 3: Sáng tạo bài toán mới từ bài toán ban đầu.

Chương III: Thực nghiệm sư phạm:

I. Mục đích thực nghiệm

II. Nội dung thực nghiệm

III Tổ chức thực nghiệm

IV. Kết luận

Kết luận

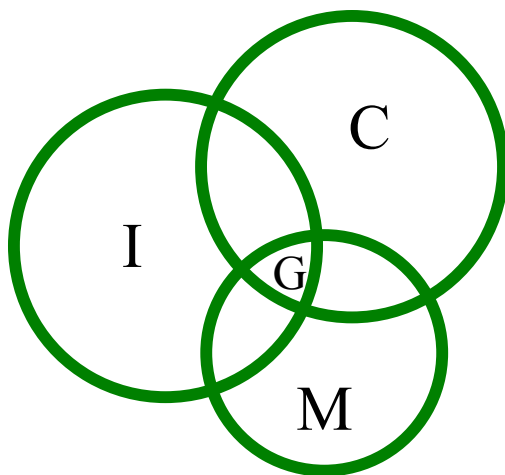
Chương I:**TƯ DUY SÁNG TẠO – TIỀM NĂNG NỘI DUNG LƯỢNG GIÁC
TRONG BỒI DƯỠNG TƯ DUY SÁNG TẠO****§ 1: TƯ DUY SÁNG TẠO****1. Tư duy sáng tạo.**

Theo định nghĩa của từ điển thì tư duy sáng tạo là tìm ra cái mới, cách giải quyết mới, không gò bó, phụ thuộc vào cái đã có. Nội dung sáng tạo gồm có: tính chất mới và có lợi ích.

Sáng tạo thường được nghiên cứu trên nhiều bình diện, như một quá trình sáng tạo phát hiện ra cái mới, như một kiểu tư duy, như một năng lực của con người và thậm chí một hiện tượng tồn tại trong sự tiến hóa của tự nhiên.

Theo các nhà tâm lý, giáo dục thì sáng tạo là một thành phần không thể thiếu được trong thành phần cấu trúc cơ bản của tài năng.

Mô hình cấu trúc tài năng bao gồm 3 thành phần: Thông minh, sáng tạo, niềm say mê.(H.1)



I: Thông minh

C: Sáng tạo

M : Sự thúc đẩy (hiểu là niềm say mê)

G: Năng khiếu, tài năng

H.1

2. Các thành phần của tư duy sáng tạo:**2.1. Tính mềm dẻo.**

- Dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.
- Suy nghĩ không dập khuôn.
- Nhận ra vấn đề mới, chức năng mới của đối tượng trong điều kiện quen thuộc.

2.2. Tính nhuần nhuyễn.

- Khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau.
- Khả năng xem xét đối tượng dưới những khía cạnh khác nhau.

2.3. Tính độc đáo.

- Khả năng tìm ra những liên tưởng và những kết hợp mới.
- Nhìn ra những mối liên hệ trong những sự kiện bên ngoài tưởng như không có liên hệ với nhau.

- Khả năng tìm ra giải pháp lạ tuy đã biết những giải pháp khác.

2.4. Tính hoàn thiện.

- Khả năng lập kế hoạch, phối hợp các ý nghĩa và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và chứng minh ý tưởng.

2.5. Tính nhạy cảm.

- Là năng lực nhanh chóng phát hiện ra vấn đề, mâu thuẫn, sai lầm, sự thiếu logic... do đó nảy sinh ra ý muốn cấu trúc lại hợp lý, hài hòa, tạo ra cái mới.

- Ngoài 5 thành phần cơ bản trên đây còn có những yếu tố quan trọng khác như: tính chính xác, năng lực định giá trị...

- Tuy nhiên có thể thấy rằng 3 yếu tố : tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo là 3 yếu tố cơ bản trong thành phần của tư duy sáng tạo. Vì lý do này, chúng tôi chỉ đề cập đến 3 yếu tố trong nhiều yếu tố đặc trưng của tư duy sáng tạo.

§2: TIỀM NĂNG NỘI DUNG LƯỢNG GIÁC TRONG VIỆC BỒI DƯỠNG TDST

Trong chương trình toán phổ thông, bài tập lượng giác rất đa dạng, phong phú bao gồm các bài tập có nhiều cách giải, bài tập có nội dung biến đổi, bài tập khác kiểu, bài tập mang tính chất đặc thù, bài tập không mẫu mực Tuy nhiên dựa trên cơ sở phân tích khái niệm TDST cùng những yếu tố đặc trưng nó, có thể phân thành ba dạng bài tập sau:

- Các bài tập chủ yếu bồi dưỡng tính mềm dẻo của TDST. Đặc trưng của các bài tập này là: dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, suy nghĩ không đập khuôn, khả năng nhận ra vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc, khả năng nhận thấy chức năng mới của đối tượng. Chúng ta kí hiệu các bài tập này là: A_1, A_2, A_3, A_4 .

- Các bài tập chủ yếu nhằm bồi dưỡng tính nhuần nhuyễn của tư duy sáng tạo với các đặc trưng: khả năng tìm ra nhiều giải pháp trên nhiều góc độ khác nhau, khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau. Kí hiệu các bài tập này là B.

- Các bài tập bồi dưỡng tính độc đáo. Những bài toán này giúp học sinh có khả năng tìm ra những mối quan hệ trong những sự vật bên ngoài tưởng như không có quan hệ với nhau và khả năng tìm ra được nhiều giải pháp lạ tuy đã biết phương thức giải quyết khác. Chúng ta kí hiệu các bài tập này là C.

1. Các bài tập bồi dưỡng tính mềm dẻo

Bài tập nhiều cách giải (A_1).

Bài tập có nhiều cách giải là bài tập có những đối tượng, những quan hệ có thể xem xét ở nhiều khía cạnh khác nhau.

Tác dụng của dạng bài này nhằm rèn luyện khả năng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, rèn luyện khả năng nhìn một đối tượng toán học dưới nhiều khía cạnh khác nhau, khả năng tìm ra giải pháp lạ tuy đã biết cách giải khác.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ (1)

Cách 1: Do $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$

$$\Rightarrow \sin^4 x \leq \sin^2 x \quad ; \quad \cos^4 x \leq \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Vậy phương trình : $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x \\ \cos^4 x = \cos^2 x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$(1) \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 3:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 4:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^4 x = 1 - \cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x = \sin^2 x \cdot (1 + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot (1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 5:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \cos^4 x = 1 - \sin^4 x \\
 &\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) \\
 &\Leftrightarrow \cos^4 x = \cos^2 x (1 + \sin^2 x) \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 x (1 + \sin^2 x - \cos^2 x) \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 x \cdot \sin^2 x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Cách 6:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow 1 + \cos^2 2x = 2 \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 2x = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Cách 7:

Đặt $\sin^2 x = X$

$\cos^2 x = Y$ Khi đó : $0 \leq X, Y \leq 1$

$$(1) \text{ có dạng } \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ X + Y = 1 \end{cases}$$

Từ đây ta dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

Trong các giải trên công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ được sử dụng một cách linh hoạt

Như vậy, bằng sự phân tích triệt để quan hệ có trong bài và các quan hệ đã biết về hàm số lượng giác $\sin x$, $\cos x$ ta tìm được ít nhất 7 cách giải. Mỗi cách giải trên củng cố, khắc sâu một tri thức nhất định, một phương pháp giải phương trình đã biết. Nhờ vậy kỹ năng biến đổi lượng giác được rèn luyện tốt hơn, linh hoạt hơn.

Căn cứ vào mỗi cách giải trên ta có thể giới thiệu cho từng đối tượng học sinh tương ứng.

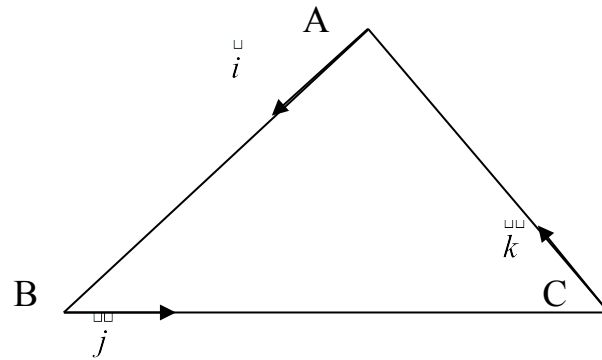
Ví dụ 2:

Chứng minh với mọi tam giác ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Việc giải bài toán này có thể có các cách làm sau:

Cách 1:



H.2

Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các vector đơn vị i, j, k

Ta luôn có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{k} + \vec{i} \cdot \vec{k} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2} - \cos B - \cos C - \cos A \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow & \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - \cos(A+B) - 1 - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -2 \cos^2 \frac{A+B}{2} + 2 \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -2 \left(\cos^2 \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -2 \left(\cos \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) \leq 0 \quad (\text{hiển nhiên}) \end{aligned}$$

Cách 3:

$$(2) \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C - \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} - [\cos(A+B)+1] - \frac{1}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2\cos^2\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \leq 0 \quad (2') \end{aligned}$$

Đặt $X = \cos\frac{A+B}{2}$

$$(2') \Leftrightarrow -2X^2 + 2\cos\frac{A-B}{2} \cdot X - \frac{1}{2} \leq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Vì VT: $f(X) = -2X^2 + 2\cos\frac{A-B}{2} \cdot X - \frac{1}{2}$ là tam thức bậc hai có

$$\Delta' = \cos^2\frac{A-B}{2} - 1 \leq 0 \quad \text{và hệ số của } X^2 \text{ là } -2 < 0$$

Vậy : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Cách 4:

Ta có :

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \cos C \\ &= 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \cos C \\ &\leq 2\sin\frac{C}{2} + \cos C \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + \cos x \quad (x \in (0; \pi))$

$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad (\text{do } x \in (0; \pi))$$

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	0	π	$\pi/3$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	1

Dựa vào bảng xét dấu của $f(x)$ ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là: $\frac{3}{2}$ với $\forall x \in (0; \pi)$

$$\forall x \in (0; \pi) \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} + \cos x \leq \frac{3}{2} \quad \forall x \in (0; \pi)$$

Do C là góc của tam giác $\Rightarrow 0 < C < \pi \Rightarrow 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Kết hợp (*) ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Ta thấy, mỗi cách giải là một cách, một phương pháp tiếp cận tìm lời giải bài toán dựa trên cơ sở kiến thức đã biết. Muốn tìm được nhiều cách giải khác nhau của một bài toán đòi hỏi học sinh phải huy động nhiều tri thức liên quan, biết nhìn vấn đề dưới nhiều khía cạnh khác nhau, biết vận dụng linh hoạt nhiều kiến thức đã học vào giải quyết bài toán. Với kiến thức lớp 10 có thể giải được bài toán theo cách 1,2 và 3. Sau khi học phần hàm số lớp 12 ta có thể giới thiệu cho học sinh cách làm thứ 4. Mặt khác, từ mỗi lời giải ta đều có thể suy ra mệnh đề đúng:

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$. Tuy nhiên với cách làm 2,3,4 thì rõ ràng hơn.

1.2 .Bài tập có nội dung biến đổi (A_2).

Bài tập này gồm hai phần, phần thứ nhất là bài toán (a), sau đó biến đổi vài yếu tố của (a) để tạo bài toán mới, nhìn bề ngoài thì hình như ít quan trọng những lại làm thay đổi cách nhìn đối với (a). Loại bài tập này có tác dụng chuyển từ hoạt động tư duy này sang hoạt động tư duy khác, chống sức ỳ của tư duy.

Ví dụ 1: Cho A,B,C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a). \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$b). \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ có một góc vuông.}$$

Lời giải:

$$a) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 A + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2C)$$

$$= 1 + \cos^2 A + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C)$$

$$= 1 + \cos^2 A + \cos(B+C) \cdot \cos(B-C)$$

$$= 1 + \cos A \cdot \cos A - \cos A \cdot \cos(B-C)$$

$$= 1 - \cos A \cdot [\cos(B-C) + \cos(B+C)]$$

$$= 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

b) Để giải b, thực chất là ta đi giải bài toán a, sau đó dựa vào kết quả bài toán a, biểu diễn $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ qua $\cos^2 A, \cos^2 B, \cos^2 C$ sau đó nhờ giả thiết của b, ta có ngay kết quả cần chứng minh. Cụ thể có lời giải sau:

$$\text{Dựa vào a, có: } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \quad (1)$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ có một góc vuông.}$$

Ví dụ 2: Tính tổng:

$$a). A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

$$b). B = \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}$$

Lời giải:

$$a). A = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{6\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9}$$

$$= \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{9} = 0$$

$$\text{Hoặc do: } \cos 3 \frac{\pi}{9} = \cos 3 \frac{5\pi}{9} = \cos 3 \frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9} \text{ là 3 nghiệm của phương trình } \cos 3x = \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Đặt $\cos x = t$. Khi đó $\cos \frac{\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9}$ là 3 nghiệm phương trình:

$$4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4t^3 - 3t - \frac{1}{2} = 0$$

Áp dụng định lý Vi-et đối với tổng các nghiệm của phương trình bậc 3 ta có:

$$\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0$$

b). Do $\cos x = -\cos(\pi - x)$ và các góc $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$ bù với các góc $\frac{8\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}$.

$$\text{Vì vậy : } \cos \frac{\pi}{9} = -\cos \frac{8\pi}{9}$$

$$\cos \frac{5\pi}{9} = -\cos \frac{4\pi}{9}$$

$$\cos \frac{7\pi}{9} = -\cos \frac{2\pi}{9}$$

$$B = -\left(\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}\right) = -A = 0$$

1.3. Bài tập khác kiểu :

Loại bài tập này có ít nhất hai trong ba bài cùng kiểu, bài còn lại khác kiểu.

Tác dụng của chúng nhằm rèn luyện khả năng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.

Ví dụ : Giải phương trình:

$$\text{a). } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \quad (1)$$

$$\text{b). } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \quad (2)$$

$$\text{c). } \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + 4\sin 4x = 10 \quad (3)$$

Lời giải:

$$\text{a). } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\sin x + \sin 2x) + (\sin 3x + \sin 4x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{5x}{2} = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Cách khác: $x = 2l\pi$ luôn là nghiệm của phương trình (1)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2l\pi$ (~~l=~~)

$x \neq 2l\pi$ khi đó $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Nhân cả 2 vế của (1) với $\sin \frac{x}{2}$ ta được phương

trình tương đương:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2} \sin 2x + \sin \frac{x}{2} \sin 3x + \sin \frac{x}{2} \sin 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{9x}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{9x}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin 5x \sin 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

b). Tương tự câu a

c). Khi giải a và b đều sử dụng công thức đổi tổng thành tích hoặc nhân hai vế với biểu thức thích hợp sau đó sử dụng công thức đổi tích thành tổng, biến đổi đưa về phương trình tích đơn giản

Với bài toán c, giống a, b về mặt hình thức tuy nhiên do hệ số của $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x$ tăng dần từ 1 đến 4, vế phải lại là $10 = 1+2+3+4$. Nên tiến hành biến đổi như sau:

$$(3) \Leftrightarrow (\sin x - 1) + 2(\sin 2x - 1) + 3(\sin 3x - 1) + 4(\sin 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (1') \\ \sin 2x = 1 & (2') \\ \sin 3x = 1 & (3') \\ \sin 4x = 1 & (4') \end{cases}$$

Từ (1') suy ra $\cos x = 0$, do đó $\sin 2x = 0$ mâu thuẫn với (2') nên hệ phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

1.4. Bài tập có tính chất đặc thù (A_4)

Là loại bài tập có số liệu cụ thể, có cách giải riêng do tính cá biệt của nó

Tác dụng của loại bài tập này là chống suy nghĩ dập khuôn, áp dụng công thức, thuật toán một cách máy móc.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0 \quad (1)$$

Lời giải:

$$(1) \Leftrightarrow (4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3) + (3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy nghiệm phương trình là } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nhờ việc phát hiện đặc thù các số hạng, học sinh đưa phương trình về dạng $\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x + 1)^2 = 0$. Lúc này phương trình đã được đưa về dạng quen thuộc : phương pháp tổng các bình phương

Ví dụ 2:

$$\text{Giải phương trình : } 3\tan x + 2\cot 3x = \tan 2x \quad (2)$$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 3(\tan x + \cot 3x) = \tan 2x + \cot 3x$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right) = \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cos 2x}{\cos x \cdot \sin 3x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \cdot \sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \pm \frac{\alpha}{6} + k\pi \left(\cos \alpha = -\frac{1}{3} \right) \end{cases}$$

Với bài này nếu không nhìn đúng đặc điểm riêng mà cứ máy móc biểu diễn hàm tan, cot theo sin và cos rồi quy đồng, biến đổi đưa về mặt phương trình cùng ẩn sẽ rất phức tạp và khó giải.

Việc giải các bài toán mang tính chất đặc thù tạo cho học sinh thói quen biết nghiên cứu những điều kiện cụ thể của bài toán trước khi áp dụng các thuật toán tổng quát, có tác dụng lớn trong việc rèn luyện sự suy nghĩ linh hoạt sáng tạo.

2. Bài tập bồi dưỡng tính nhuần nhuyễn

2.1 . Bài tập cầm (B)

Bài tập cầm chủ yếu dùng sơ đồ, hình vẽ, kí hiệu, lời văn đóng vai trò thứ yếu. Bài tập cầm là sự kết hợp chặt chẽ của sự trừu tượng hóa, khái quát hóa và cụ thể hóa

Loại bài tập này có tác dụng rèn khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau rèn luyện khả năng trừu tượng hóa, khái quát hóa.

Bài tập cầm thường là những bài tập củng cố khái niệm, quy tắc, tìm tòi phát hiện kiến thức mới.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin^{2014} x + \cos^{2014} x = 1$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin^2 x (1 - \sin^{2012} x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x (1 - \cos^{2012} x) &\geq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x \geq \sin^{2014} x \\ \cos^2 x \geq \cos^{2014} x \end{cases} \\ \Rightarrow \sin^{2014} x + \cos^{2014} x &\leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

Như vậy x là nghiệm hệ

$$\begin{cases} \sin^2 x (1 - \sin^{2012} x) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{2012} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Từ lời giải bài toán, trên cơ sở của lời giải là tính chất cơ bản của lũy thừa và tính chất bị chặn của các hàm Sinx, Cosx ta có thể có được một số hướng phát triển bài toán:

- 1- Nếu thay hằng số (2014) – số mũ của hàm sin và cos bởi biến số (n) khi đó ta có:

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\sin^n x + \cos^n x = 1 \quad (n \geq 2)$$

Trong trường hợp đặc biệt của n (n chẵn, n lẻ) thì chúng ta lại có các bài toán mới:

Bài toán 2: Giải phương trình :

$$\begin{aligned} a) \sin^{2k} x + \cos^{2k} x &= 1 \quad (k \geq 1) \\ b) \sin^{2k+1} x + \cos^{2k+1} x &= 1 \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

- 2- Thay số mũ của hàm sin và cos bởi các số khác nhau ta có bài toán tiếp theo.

Bài toán 3: Giải phương trình : $\sin^n x + \cos^{n+m} x = 1 \quad (n \geq 2, m \geq 1)$

- 3- Nếu ở bài toán 1,2,3 về phải của phương trình là hằng số $a > 1$ thì các phương trình đó đều vô nghiệm. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 4: Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{aligned} a) \sin^n x + \cos^n x &= a \quad (n \geq 2, a > 1) \\ b) \sin^n x + \cos^{n+m} x &= a \quad (m \geq 1, n \geq 2, a > 1) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

Lời giải đã được trình bày ở mục 1.2 – Bài tập có nội dung biến đổi phần a của ví dụ

1

- Xuất phát từ đặc điểm bài toán và từ tính chất cơ bản: $\forall x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{có thể đề xuất bài toán sau :}$$

Bài toán 1: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

- Mặt khác ta thấy rằng nếu:

a) ΔABC có ba góc nhọn, nghĩa là $\cos A, \cos B, \cos C$ có giá trị dương, điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0$

b) ΔABC vuông, nghĩa là $\cos A = 0$ hoặc $\cos B = 0$ hoặc $\cos C = 0$ điều này xảy ra khi và chỉ khi $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$

c) Tương tự ΔABC có một góc tù khi và chỉ khi $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$

Vì vậy từ kết quả bài toán 1 và từ nhận xét trên chúng ta có các bài toán mới

Bài toán 2: A, B, C là ba góc của một tam giác

Đặt $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ Chứng minh rằng:

a). $T > 2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ nhọn

b). $T = 2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông

c). $T < 2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ tù

Tiếp đó nhờ nhận xét $A < B < C$ là 3 góc của tam giác suy ra $0 < \sin A, \sin B, \sin C \leq 1$

$$\Rightarrow \sin^2 A \leq \sin A$$

$$\sin^2 B \leq \sin B$$

$$\text{và } \sin^2 C \leq \sin C$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$\Rightarrow$ Có kết quả tiếp theo

Bài toán 3:

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không tù thì $\sin A + \sin B + \sin C > 2$. Ngoài ra, từ bài toán ban đầu. Nếu sử dụng định lý hàm số cosin sẽ cho ta một bài toán đại số biểu thị mối quan hệ giữa các cạnh của tam giác.

3- Các dạng bài tập bồi dưỡng tính độc đáo.

3.1. Bài tập không mẫu mực (C)

Các bài tập này không thể áp dụng thuật toán hay công thức để giải. Tác dụng của bài tập này rèn luyện khả năng tìm ra những liên tưởng và những kết hợp mới, khả năng tìm ra những mối liên hệ trong những sự kiện bên ngoài tưởng như không có liên hệ với nhau, khả năng tìm ra giải pháp lạ tuy đã biết những phương thức giải quyết khác.

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} \quad (1)$$

Lời giải :

Xét biểu thức $M + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} M + 1 &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} + 1 \\ \Leftrightarrow M + 1 &= \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} \\ \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{3}{M + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C &= \frac{3}{M + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + 1 + \cos^2 C &= \frac{3}{M + 1} \\ \Leftrightarrow \cos^2 C + \cos(A + B) \cdot \cos(A - B) + 1 - \frac{3}{M + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 C - \cos C \cdot \cos(A - B) + 1 - \frac{3}{M + 1} &= 0 \quad (1') \end{aligned}$$

Đặt $X = \cos C$. Khi đó (1') có dạng:

$$X^2 - \cos(A - B) \cdot X + 1 - \frac{3}{M + 1} = 0 \quad (2)$$

Xét phương trình (2) ta có : $\Delta = \cos^2(A - B) - 4 \left(1 - \frac{3}{M + 1} \right)$

Do (2) có nghiệm $X = \cos C \Rightarrow \Delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4 \left(1 - \frac{3}{M + 1} \right) &\leq \cos^2(A - B) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{M + 1} &\geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow M + 1 \leq 4 \Leftrightarrow M \leq 3 \end{aligned}$$

$$M = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(A - B) = 1 \\ (2) \text{ có nghiệm kép} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(A - B) = 0 \\ \cos C = \frac{1}{2} \cos(A - B) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos C = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}
\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 3, đạt được khi tam giác ABC đều.

Việc xét biểu thức M+1 là nhận xét độc đáo xuất phát từ việc liên tưởng tới công thức:
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Việc phân chia bài tập lượng giác thành các dạng trên chỉ có tính chất tương đối vì mỗi bài tập đều có tác dụng về nhiều mặt và có chức năng khác nhau. Ở đây tôi chỉ dựa trên nét đặc trưng thể hiện ở yếu tố này nổi bật hơn yếu tố khác để phân chia.

Ngoài các dạng bài tập đã nêu thì nội dung lượng giác còn là một công cụ giải toán hữu hiệu.

4-Ứng dụng lượng giác và giải toán

Trong một số bài toán đại số (giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất) việc chuyển đổi sang bài toán lượng giác, rồi dùng kiến thức lượng giác để giải sẽ ngắn gọn hơn, tránh được rườm ràkhi sử dụng công cụ lượng giác vào giải toán, lời giải thể hiện được tính linh hoạt trong việc nhìn nhận vấn đề, đồng thời thể hiện tiềm năng rất lớn của nội dung lượng giác.

$$\text{Ví dụ 1: Giải hệ : } \begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 x = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải :

Nhận xét thấy bộ 3 số (0,0,0) là một nghiệm của hệ. Ngoài ra cả 3 số x,y,z, đều khác ± 1 . Vì nếu giả sử $x = \pm 1$ khi đó phương trình đầu của hệ không thỏa mãn.

Với $x, y, z \neq \pm 1$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Sự có mặt của vế phải trong mỗi phương trình của hệ khiến ta liên tưởng đến công

thức lượng giác: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Vì vậy nếu đặt $x = \tan \alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right)$

$$\Rightarrow y = \tan 2\alpha, z = \tan 4\alpha, x = \tan 8\alpha$$

Từ đó $\Rightarrow \tan \alpha = \tan 8\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{7} (n \in \mathbb{Z}, \text{ chọn } n \text{ sao cho } \tan \alpha \neq \pm 1)$$

Nghiệm hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = \tan \frac{n\pi}{7} \\ y = \tan \frac{n2\pi}{7} \\ z = \tan \frac{n4\pi}{7} \end{cases}$$

Từ lời giải bài toán có thể suy ra cách giải của một loạt các bài toán đại số được thiết lập từ công thức: $\tan 3\alpha, \tan 9\alpha, \tan 27\alpha$ hoặc $\tan 2\alpha, \tan 4\alpha, \tan 8\alpha, \dots$

Chẳng hạn : Giải hệ :

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$$

(Từ $y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}$ Đặt $x = \tan \alpha \Rightarrow y = \tan 3\alpha, z = \tan 9\alpha, x = \tan 27\alpha$)

Ví dụ 2: Cho $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sao cho : $x^2 + y^2 = 1, u^2 + v^2 = 1$

Chứng minh rằng: $-\sqrt{2} \leq u(y - x) + v(x + y) \leq \sqrt{2}$

Lời giải:

Từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1, u^2 + v^2 = 1$ ta liên tưởng đến công thức cơ bản $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Như vậy, nếu chuyển bài toán này sang lượng giác ta có lời giải sau:

Đặt $u = \cos \alpha, v = \sin \alpha$

$$x = \cos \beta, y = \sin \beta$$

$$\begin{aligned} P &= u(y - x) + v(x + y) = \cos \alpha (\sin \beta - \cos \beta) + \sin \alpha (\sin \beta + \cos \beta) \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta) \\ &= \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2} \quad (\text{đpcm}).$$

Ở các ví dụ trên, việc sử dụng công cụ lượng giác để giải, khiến lời giải của bài toán ngắn gọn, sáng sủa dễ hiểu lại rất độc đáo.

§3: THỰC TIỄN VIỆC DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC

THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT HUY TÍNH SÁNG TẠO

Việc dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo có nhiều thuận lợi :

Trước hết, yêu cầu bồi dưỡng phát triển năng lực trí tuệ, bồi dưỡng TDST cho học sinh thông qua dạy học toán nói chung, dạy học giải bài tập lượng giác nói riêng được ghi trong mục tiêu dạy học.

Sau đó phải kể đến nội dung ,phương pháp, hình thức bài tập lượng giác rất phong phú trong các sách giáo khoa, sách tham khảo...

Tuy nhiên qua tham dò thực tế tôi thấy, việc dạy học giải bài tập lượng giác, đặc biệt dạy theo định hướng phát huy tính sáng tạo của học sinh còn tùy thuộc nhiều vào quan niệm, cách suy nghĩ, cách làm và tiềm lực của mỗi giáo viên. Vì vậy hiệu quả dạy học giải bài tập lượng giác nói chung, bồi dưỡng TDST thông qua dạy nội dung này nói riêng chưa cao.

Trong giờ học không phải mọi giáo viên và học sinh đều hoạt động thực sự tích cực. Quan sát một số giờ dạy tôi thấy giáo viên chưa chú ý đến việc bồi dưỡng TDST cho học sinh. Thầy giáo thường cố gắng giải thích, chứng minh, trình bày lời giải bài toán mà ít khi chú ý tới việc khai thác, mở rộng bài toán, tìm tòi nhiều lời giải. Vì vậy đã bỏ lỡ rất nhiều cơ hội bồi dưỡng, phát huy tính sáng tạo và hứng thú học tập toán học.

Chẳng hạn trong giờ tự chọn của lớp 10A₃ trường THPT Yên Mỹ. Khi hướng dẫn học sinh giải bài toán:

“ Chứng minh rằng mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C ”$$

Giáo viên mới chỉ chú ý tới kỹ năng giải bài tập lượng giác : chứng minh đồng nhất theo biểu thức lượng giác và kỹ năng biến đổi đồng nhất , chưa chú ý tới việc khai thác bồi dưỡng TDST của học sinh . Với bài toán đã cho sau khi có lời giải giáo viên có thể đưa ra một số kết quả mới nhờ sử dụng kết quả của bài toán này (xem phần 1.2, bài 2 – chương I).

Hoặc trong giờ chữa bài tập của lớp 11A₉ trường THPT Yên Mỹ với bài toán : giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ (1) (ĐS và giải tích 11) tôi thấy học sinh biến đổi đưa về cách làm quen thuộc là dùng ẩn phụ $t = \sin x + \cos x$. Giáo viên đã không yêu cầu hoặc hướng dẫn học sinh tìm lời giải khác. Với bài toán này có thể hướng dẫn học sinh giải theo cách sau:

$$\text{Do: } \begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin x) \geq 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^3 x \leq \sin^2 x \\ \cos^3 x \geq \cos^2 x \end{cases}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được nghiệm $x = k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + l2\pi$ ($l, k \in \mathbb{Z}$)

Từ lời giải này giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm tòi và có những phát hiện mới. Học sinh sẽ nhận thấy có thể áp dụng lời giải trên để giải mọi phương trình dạng $\sin^n x + \cos^n x = 1$ ($n \geq 2$) hoặc chứng minh mọi phương trình dạng $\sin^n x + \cos^n x = a$ ($n \geq 2, a > 1$) đều vô nghiệm. Việc chú ý mở rộng, khai thác kết quả bài toán vừa nhằm khắc sâu kiến thức đã học vừa cung cấp cho học sinh kiến thức mới, cung cấp phương pháp giải cho một loạt các bài toán liên quan, rèn luyện thành nếp TDST. Tuy nhiên có rất ít giáo viên chú ý đến điều này.

Nguyên nhân thực trạng này phải kể đến:

Thứ nhất, do quan niệm về việc theo định hướng phát huy tính sáng tạo còn nhiều hạn chế vì vậy nhiều giáo viên đã không khai thác tiềm năng nội dung lượng giác bồi dưỡng TDST cho học sinh.

Tiếp theo phải kể đến năng lực nghề nghiệp của một giáo viên còn chưa cao, việc phát hiện ra tiềm năng của bài tập toán nói chung, bài tập lượng giác nói riêng còn hạn chế.

Bên cạnh đó, số đông học sinh cũng chỉ dừng lại ở mức độ thụ động, suy nghĩ dập khuôn, áp dụng công thức, thuật toán còn may mắn nên khi gặp những bài tập khác kiểu không với các dạng bài tập đã học thì tỏ ra lúng túng, không biết biến đổi bài toán để đưa về dạng quen thuộc đã biết cách giải.

Quan sát, nghiên cứu vở bài tập về nhà của học sinh khối 10 tôi thấy với bài toán:

Tính tổng :

$$\begin{aligned} a). \quad A &= \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \\ b). \quad B &= \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} \end{aligned}$$

(Xem phần 1.2 – Bài 2 – Chương I)

Hầu hết học sinh đều giải bài toán như sau:

$$\begin{aligned} a). \quad A &= \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{9} \\ &= \cos \frac{\pi}{9} \left(1 + 2 \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Sau đó giải câu b tương tự câu a , không học sinh nào phát hiện ra các điểm riêng dễ nhận thấy của bài toán .Các góc $\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ bù với các góc $\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{\pi}{9}$ từ đó tính được B dựa vào tổng A , hoặc với phần a không học sinh nào nhận thấy $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ hay $\cos 3\frac{\pi}{9} = \cos 3\frac{5\pi}{9} = \cos 3\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}$ từ đó có lời giải theo hướng khác , rất độc đáo là phương pháp chung để tính tổng một số biểu thức khác .

Trong bài kiểm tra học kì I của học sinh khối 11 tôi thấy có bài toán : “ Giải phương trình : $6\tan x + 5\cot 3x = \tan 2x$ ”.

Quan sát tổng kết bài làm của học sinh của hai lớp 11A₃ và 11A₉ tôi thu được kết quả sau :

Kết quả \ Lớp	11A ₉	11A ₃
Tổng số bài kiểm tra (SBKT)	45	50
SBKT không làm được	32	33
SBKT có lời giải đúng	13	17

Mặc dù , đặc điểm riêng của bài toán rất dễ nhận thấy , chỉ cần tách $\tan x$ sang vế phải và áp dụng các công thức biến đổi lượng giác sẽ cho kết quả bài toán nhưng chỉ có một số ít học sinh phát hiện ra đặc điểm này . Phần lớn học sinh đều tìm cách biến đổi $\tan x$, $\tan 2x$, $\cot 3x$ theo hàm sin và hàm cos sau đó quy đồng và cố gắng đưa về phương trình một ẩn của $\sin x$ hoặc $\cos x$. Những phương trình đó lại quá phức tạp nên không tìm ra kết quả bài toán

Kết quả khảo sát cho thấy, kỹ năng giải toán của học sinh còn hạn chế, suy nghĩ còn dập khuôn, máy móc chưa thể hiện được sự linh hoạt trong nhìn nhận bài toán.

Trước tình trạng nêu trên, trước tiềm năng nội dung lượng giác và mục tiêu dạy học toán nói chung, bồi dưỡng TDST qua việc dạy học giải bài tập lượng giác nói riêng thì tăng

cường, bồi dưỡng TDST qua việc dạy học giải bài tập lượng giác là vấn đề mang tính lí luận và thực tiễn sâu sắc.

CHƯƠNG II

PHƯƠNG HƯỚNG VÀ BIỆN PHÁP CƠ BẢN DẠY HỌC

GIẢI BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC THEO ĐỊNH HƯỚNG BỒI DƯỠNG TDST

Việc rèn luyện giải bài toán bao gồm hai nội dung chủ yếu:

- 1- Rèn luyện việc tìm lời giải các bài toán
- 2- Rèn luyện việc giải toán .

Khi đã có đường lối giải thì việc giải hoàn chỉnh một bài toán là cả một quá trình rèn luyện gồm nhiều khâu, từ việc nắm vững các kiến thức cơ bản về nội dung lí thuyết và các phương pháp thực hành đến việc luyện tập thành thạo các quy trình và các thao tác cơ bản, có tính chất kỹ thuật. Kết quả mỗi bài toán được biểu hiện ở lời giải đúng và đầy đủ . Như vậy việc rèn luyện giải toán có vai trò quan trọng. Tuy nhiên, vẫn phải xem xét việc rèn luyện khả năng tìm lời giải các bài toán có tính chất quyết định trong toàn bộ công việc luyện giải vì các lí do sau:

Dù có kỹ thuật cao, có thành thạo trong việc thực hiện các thao tác và phân tích nhưng khi chưa có phương hướng tốt thì chưa thể có lời giải hoặc có lời giải tốt.

Công việc tìm phương hướng giải bài toán là công việc mang tính sáng tạo.

Việc coi trọng rèn luyện phương hướng giải bài toán của bài tập chính là cơ sở quan trọng cho việc rèn luyện khả năng làm việc độc lập – sáng tạo.

Tôi chỉ đề cập đến vấn đề rèn luyện việc tìm lời giải các bài toán. Trong nội dung này tôi đề cập đến một số ít vấn đề:

Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức; khắc sâu ảnh hưởng tiêu cực của thói quen tâm lí khi hướng dẫn học sinh giải toán; sáng tạo bài toán mới từ bài toán ban đầu.

\$1. BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC HUY ĐỘNG KIẾN THỨC

Trong việc rèn luyện kỹ năng tìm lời giải bài toán thì năng lực huy động kiến thức giải các bài tập có vai trò quan trọng. Việc bồi dưỡng năng lực định hướng, năng lực huy động kiến thức khi giải các bài tập lượng giác liên quan tới nhiều năng lực khác nhau.

1. Đặt bài toán cần giải trong mối quan hệ biện chứng với bài toán khác nhằm tạo năng lực liên tưởng cho học sinh.

Đứng trước một bài toán hay một vấn đề cần giải quyết, người làm toán thường tự đặt câu hỏi:

- 1- Bài toán này có giống (tương tự) với bài toán nào đã biết không ?. Có thể sử dụng phương pháp hay kết quả của bài toán đó để giải không ?
 - 2- Có phải là trường hợp riêng của bài toán đã biết nào không .
 - 3- Bài toán này có trường hợp riêng nào ? Có thể giải các trường hợp riêng đó không ?
- Từ đó có thể giải được các bài toán ban đầu không?

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu A,B,C là 3 của một tam giác thì:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Nhận xét :

Vì A,B,C là 3 góc của một tam giác nên: $\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sin \frac{A+B+C}{3}$

Bài toán khái quát : “Chứng minh rằng ,nếu $0^\circ < A, B, C < 180^\circ$ thì :

$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin \frac{A+B+C}{3}$ ”. Để giải bài toán này ta xét bài toán đơn giản hơn:

“ Cho x,y là hai góc không âm , không vượt qua 180° thì : $\sin x + \sin y \leq 2\sin \frac{x+y}{2}$ ”

Ta luôn có $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

Vì $0^\circ < x, y < 180^\circ$ nên $0 \leq \cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ và $\sin x, \sin y \geq 0$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y \leq 2\sin \frac{x+y}{2}$$

Áp dụng kết quả này cho các góc (A,B);(C,D); $\left(\frac{A+B}{2}, \frac{C+D}{2} \right)$

$$0^{\circ} < A, B < 180^{\circ} \Rightarrow \sin A + \sin B \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} (*)$$

$$0^{\circ} < C, D < 180^{\circ} \Rightarrow \sin C + \sin D \leq 2 \sin \frac{C+D}{2} (**)$$

Mặt khác : $0^{\circ} < A, B < 180^{\circ}$

$$0^{\circ} < C, D < 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow 0^{\circ} < \frac{A+B}{2}, \frac{C+D}{2} < 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C+D}{2} \leq 2 \sin \frac{A+B+C+D}{4} (***)$$

Từ (*), (**), (***) ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leq 4 \sin \frac{A+B+C+D}{4} (1)$$

Ở đây $0^{\circ} < A, B, C, D < 180^{\circ}$

Chọn $D = \frac{A+B+C}{3}$ (rõ ràng $0^{\circ} < D < 180^{\circ}$)

$$(1) \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3}$$

Vì bài toán ban đầu là trường hợp đặc biệt của bài toán này nên ta cũng có ngay kết quả của bài toán ban đầu hoặc cũng có thể chỉ ra lời giải bài toán ban đầu như cách giải của bài toán khái quát. Như vậy, để tìm lời giải cho bài toán ban đầu ta đã sử dụng linh hoạt các bài toán phụ đặc biệt hóa khái quát hóa.

Trong thực tế việc tìm được một bài toán phụ, bài toán liên quan không khó khăn ngay cả với người ít kinh nghiệm. Tuy nhiên để có được một bài toán phụ, bài toán liên quan hữu ích cho việc tìm lời giải bài toán cũng như việc rèn luyện năng lực giải toán không phải là đơn giản. Trước hết mỗi bài toán liên quan phải giải được, lời giải càng đơn giản càng tốt, lời giải của bài toán ban đầu có thể tìm được nhờ sử dụng phương pháp giải hay kết quả hoặc chỉ có thể là các bước giải của bài toán phụ.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu A,B,C là 3 góc nhọn của một tam giác thì:

$$\sin^{\sin B} A + \sin^{\sin C} B + \sin^{\sin A} C > 2$$

Do các số mũ của $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ không là số cụ thể nên việc biến đổi rất khó khăn. Từ kết luận của bài toán làm người giải toán có liên tưởng đến các kết quả đã biết:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$ nếu tam giác ABC nhọn

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$ nếu tam giác ABC tù

Từ đó ta suy nghĩ phải so sánh: $\sin^{\sin B} A$ với $\sin^2 A$; $\sin^{\sin C} B$ với $\sin^2 B$; $\sin^{\sin A} C$ với $\sin^2 C$.

Lời giải bài toán như sau:

Do A,B,C là 3 góc tam giác nên $0 < A, B, C < \pi$

Do đó : $0 < \sin A; \sin B; \sin C \leq 1$

Và $\sin^{\sin B} A > \sin^2 A$; $\sin^{\sin C} B > \sin^2 B$; $\sin^{\sin A} C > \sin^2 C$

Mặt khác : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

Từ giả thiết tam giác ABC nhọn suy ra $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$

Vậy $\sin^{\sin B} A + \sin^{\sin C} B + \sin^{\sin A} C > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$

Như vậy , một trong những thao tác quan trọng dẫn đến thành công trong việc tìm đường lối giải toán là nghĩ đến bài toán liên quan , các bài toán có tính chất gần giống với bài toán ta đang cần giải (có thể là bài toán con , bài toán tương tự , bài toán đặc biệt , bài toán khái quát) . Bằng việc phân tích sử dụng lời giải của các bài tập liên quan với bài toán đã cho , chúng ta sẽ có nhiều cơ hội thuận lợi để tìm ra đường lối giải của các bài toán đã cho.

Một trong những thao tác quan trọng trong việc bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức khi giải toán đó là biết đặt bài toán trong mối quan hệ biện chứng với bài toán khác tạo năng lực liên tưởng cho học sinh . Các bước giải bài toán theo hướng này được tiến hành như sau :

B₁: Phát biểu bài toán liên quan (tương tự , khái quát , đặc biệt ...)

B₂: Giải bài tập liên quan.

B₃: Sử dụng phương pháp hoặc kết quả bài toán liên quan vào giải bài tập ban đầu .

2.Chú trọng khai thác mạch kiến thức theo hướng từ định nghĩa, khái niệm, định lý toán học, các công thức, quy tắc đến hệ thống các bài tập gốc cần thiết và đến các bài toán nâng cao.

Khi tìm phương pháp giải cho một bài toán, người làm toán phải phân tích đặc điểm của bài toán, các yếu tố chính của bài toán và liên tưởng tới những khái niệm, định lý, quy tắc. Xem vấn đề đó, tình huống đó (hoặc chỉ giả thiết, kết luận) có phù hợp với giả thiết hoặc kết

luận của định lí, quy tắc nào đó đã biết. Từ đó áp dụng định nghĩa, định lí, bài tập gốc có liên quan đó.

Con đường huy động kiến thức theo mạch này nhằm khám phá các ứng dụng khác nhau của định nghĩa, định lí, và quy tắc bài toán về hệ các bài toán gốc.

Ví dụ 3:

Từ tính chất cung bù nhau của hàm $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ và công thức tính tan của một tổng ta có bài tập cơ bản sau : “ Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ ”

Từ bài tập “gốc” này ta có thể đề xuất một loạt các bất đẳng thức của hàm tan đối với các góc trong tam giác :

CMR: Nếu tam giác ABC nhọn thì:

- 1) $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$
- 2) $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq 3\sqrt{3}$
- 3) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$
- 4) $\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81$
- 5) $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[n]{(3\sqrt{3})^n}$
- 6) $\frac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 9$
- 7) $\frac{\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 9\sqrt{3}$
- 8) $\tan A \cdot \tan B + \tan B \cdot \tan C + \tan A \cdot \tan C \geq 9$
- 9) $\tan^4 A + \tan^4 B + \tan^4 C \geq 27$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC thỏa mãn :

$$\begin{cases} \frac{3^{\sin A}}{3^{\sin B}} + 4 \sin A = 1 + 4 \sin B & (1) \\ \frac{3^{\sin A}}{3^{\sin C}} + 4 \sin C = 1 + 4 \sin A & (2) \end{cases}$$

Hãy khảo sát dạng của tam giác .

Lời giải:

Bài tập liên quan tới các góc của tam giác với đòi hỏi nhận dạng tam giác nên tri thức ban đầu được huy động phải là định lí , định nghĩa về mối quan hệ giữa các góc trong tam giác với các cạnh : định lí hàm số sin , cosin ... Mặt khác mối quan hệ giữa các góc trong tam giác mô tả bởi điều kiện (1) và (2) cho thấy khả năng không sử dụng các định lí này mà

các góc được liên hệ theo biểu thức lũy thừa . Vì vậy , khả năng phải sử dụng tính chất của lũy thừa hàm số mũ .

Nhờ hướng suy nghĩ trên chúng ta có cảm nhận gần hơn với lời giải:

$$\text{Đặt } u = \sin A - \sin B$$

$$\text{Thì (1) có dạng } 3^u + 4u = 1$$

Vì $3^u + 4u$ là hàm số đồng biến nên phương trình $3^u + 4u = 1$ có nghiệm duy nhất $u = 0$ hay $\sin A = \sin B$ khi đó $A = B$.

Xét phương trình thứ (2):

$$\text{Đặt } x = \sin A - \sin C (*) \Rightarrow |x| \leq 2$$

$$(1) \text{ có dạng } 3^x - 4x = 1$$

Xét hàm số $y = 3^x - 4x$ trên đoạn $[-2; 2]$

$$\text{Ta có } y' = 3^x \cdot \ln 3 - 4$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3^x \cdot \ln 3 = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{4}{\ln 3} (=x_0)$$

Bảng biến thiên :

x	-2	x_0	2
y'	-	0	+
y	$\frac{71}{9}$		1

CT

$$\text{Ta có } \forall x \in [-2; x_0) : f(0) = 1 \quad (1')$$

$$\forall x \in [x_0; 2] : f(2) = 1 \quad (2')$$

Do trên $[-2; x_0)$ và $[x_0; 2]$ hàm số đơn điệu nên trong $[-2; x_0)$ và $[x_0; 2]$ phương trình có nghiệm thì nghiệm là duy nhất . Từ (1') và (2') ta thấy có duy nhất 2 giá trị là 0 và 2 mà hàm số nhận giá trị 1 . Vì vậy phương trình $3^x - 4x = 1$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 2$ trên $[-2; 2]$

Ta thấy $x = 2$ không thỏa mãn (*) vì $2 = \sin A - \sin C$

$$\Leftrightarrow \sin A = 2 + \sin C$$

$$\Rightarrow \sin A > 2 \text{ (vì } 0 < \sin C \leq 1 \text{)}$$

$$\text{Tại } x=0 : \sin A = \sin C \Leftrightarrow A=C$$

Từ 2 kết luận ta có $A=B=C$ hay tam giác ABC đều .

Trong quá trình huy động kiến thức để tìm lời giải bài toán đòi hỏi người giải toán phải có kinh nghiệm nhận ra tình huống mới trong tình huống quen thuộc , phát hiện được cấu trúc chức năng mới của đối tượng quen thuộc. Nghĩa là đứng trước bài toán người giải phải xem xét tiến hành hoạt động nhận dạng bài toán đó có phù hợp với định nghĩa định lí, quy tắc hay có quan hệ với một bài toán đã biết hay không. Từ đó đề xuất đường lối giải bài toán.

§ 2: KHẮC PHỤC ẢNH HƯỞNG TIÊU CỰC CỦA THÓI QUEN TÂM LÝ KHI HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC

Thực tế cho thấy trong quá trình giải bài tập toán nói chung, bài tập lượng giác nói riêng, có rất nhiều học sinh mặc dù đã cố gắng học toán, tin tưởng là mình đã nắm vững

kiến thức cơ bản, đã hiểu được bài học nhưng khi đứng trước một bài toán thì hoặc không tìm ra được lời giải hoặc lời giải còn nhiều thiếu sót, hoặc quá rườm rà, khó hiểu. Mặc dù, việc tìm lời giải của bài toán không có gì khó khăn và lời giải lại rất ngắn gọn, dễ hiểu. Sở dĩ như vậy vì tư duy của các em còn cứng nhắc, bảo thủ không có khả năng vận dụng linh hoạt tri thức đã học vào giải quyết hợp lý các tình huống.

Hầu như rất ít học sinh có thói quen nghiên cứu lại bài toán khi đã tìm được lời giải, đa số các em đều bằng lòng với kết quả tìm được. Ngay cả đối với “ học sinh giỏi”, sau khi tìm được lời giải và trình bày sáng sủa lý luận của mình cũng đều có xu hướng gấp sách lại và làm việc khác. Vì vậy các em đã bỏ lỡ những cơ hội tốt cho việc học hỏi. Có rất nhiều nguyên nhân dẫn đến tình trạng trên nhưng chủ yếu do những nguyên nhân sau:

Thứ nhất: do không tạo được thói quen cần phải phân tích kỹ đặc điểm bài toán từ đó huy động lựa chọn phương pháp tiếp cận bài toán phù hợp. Thông thường khi gặp một bài toán nào đó các em đều bắt tay ngay vào thử áp dụng một phương pháp đã biết mà không tìm hiểu xem bài toán ban đầu có phù hợp với phương pháp đã biết hay không, không tích cực suy nghĩ biến đổi bài toán về những bài toán đã biết cách giải.

$$\text{Giải phương trình: } \tan x + \cot x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

Trong thực tế nhiều học sinh vội vàng áp dụng ngay các công thức biểu diễn: $\tan x$, $\cot x$, $\sin x$, $\cos x$ công thức biến đổi $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ theo $\sin x + \cos x$ sau đó chuyển về phương trình bậc 3 với ẩn phụ là $T = \sin x + \cos x$. Vì phương trình bậc 3 này có thể nhầm được nghiệm nên một số học sinh tìm ra kết quả đúng, một số khác thì do quá trình biến đổi quá rườm rà, kỹ năng biến đổi còn hạn chế nên nhầm lẫn. Có rất ít học sinh chịu quan sát kỹ đặc điểm bài toán hoặc tìm lời giải khác khi đã giải theo cách trên. Thông qua phân tích kỹ giả thiết của bài toán $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ có thể dần dần tiếp cận đến lời giải bài toán.

Do $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ thì vế trái ≥ 2 , vế phải ≤ 2 . Từ đó lời giải của phương trình rất gọn, phương pháp giải độc đáo.

Thứ hai: Do vốn kinh nghiệm của các em còn hạn chế, không nắm bắt được nhiều phương pháp giải bài toán, do đó không có khả năng biến đổi bài toán đưa về tình huống quen thuộc đã biết.

Nguyên nhân thứ 3: Do tư duy của chúng ta mang tính phương hướng. Một loại tri thức, đặc biệt là tri thức phương pháp được luyện tập nhiều lần, lặp lại, gây ấn tượng sâu rồi trở thành thói quen (gọi là thói quen tâm lý) . Đây là nguyên nhân cơ bản nhất chúng ta cần khắc phục.

Như vậy, thói quen tâm lý tạo rất nhiều bất lợi cho học sinh khi giải bài tập toán nói chung, bài tập lượng giác nói riêng. Khắc phục ảnh hưởng tiêu cực của thói quen tâm lý khi giải bài tập lượng giác chính là góp phần bồi dưỡng năng lực sáng tạo cho học sinh.

Việc làm đó đòi hỏi:

Thứ nhất: Khi dạy học áp dụng định lý, công thức lượng giác hoặc tri thức phương pháp thầy giáo cần chỉ rõ điều kiện áp dụng, các tình huống áp dụng tri thức đó vào các ví dụ, đầy đủ nội dung, đa dạng hình thức bao gồm các trường hợp tiêu biểu nhất được sắp xếp phù hợp với nhận thức của học sinh:

Ví dụ: Khi dạy học sinh định lý hàm số Cos[HH10] giáo viên cần chỉ rõ tình huống áp dụng:

1- Xác định các yếu tố còn lại của tam giác trong các trường hợp.

- a. Tam giác cho trước 3 cạnh.
- b. Tam giác cho trước 2 cạnh và một góc xen giữa 2 cạnh đó.

2- Nhận dạng tam giác:

- a. Nhận dạng tam giác vuông, tù, nhọn.
- b. Nhận dạng tam giác vuông, có 1 góc $60^0, 30^0...$

3-Chỉ ra ứng dụng thực tiễn của định lý.

Khi dạy học giải phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ bằng phương pháp hạ bậc.

Phương trình ban đầu trở thành : $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 = \frac{1}{4}$

Sau khi rút gọn ta có : $\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Sau đó chỉ ra cho học sinh thấy có thể áp dụng phương pháp hạ bậc đối với phương trình có dạng :

$$1). \cos^2 ax + \cos^2 bx = \cos^2 cx + \cos^2 dx$$

$$2). \sin^2 ax + \sin^2 bx = \sin^2 cx + \sin^2 dx$$

Nếu a,b,c,d thỏa mãn một trong các điều kiện : $a+b=c$ hoặc $a-b=c-d$

Thứ 2 : Giáo viên cần khai thác triệt để tri thức cần truyền thụ cho học sinh đặc biệt là tri thức phương pháp và tạo được cơ hội áp dụng tri thức đó . Một mặt khắc sâu giá trị nội dung cần học , mặt khác cung cấp phương pháp tiếp cận bài toán .

Ví dụ : 1. Khi cung cấp công thức biến đổi :

Biến đổi tích thành tổng :

$$\begin{aligned}\cos a . \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a . \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \sin a . \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]\end{aligned}\quad (I)$$

Biến đổi tổng thành tích :

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2 \left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \right] \\ \cos a - \cos b &= -2 \left[\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) . \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \right] \\ \sin a + \sin b &= 2 \left[\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \right] \\ \sin a - \sin b &= 2 \left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) . \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \right]\end{aligned}\quad (II)$$

Các công thức này hay sử dụng. Vì vậy học cần phải học thuộc. Để giúp học sinh dễ nhớ có thể lưu ý học sinh về những đặc điểm của nhóm công thức I và II.

Chẳng hạn nhóm I , ở vế phải bao giờ cũng có $\frac{1}{2}$, trong nhóm II thì là 2

Trong cả hai nhóm đều có một công thức có dấu (-), liên quan đến $\sin a . \sin b$ và $\cos a - \cos b$

Nếu quy ước ở vế phải bao giờ $a+b$ cũng đứng trước $a-b$ ta có thể nhớ nhóm I, một cách sơ lược như sau:

$$2\cos . \cos = \cos + \cos$$

$$-2\sin . \sin = \cos - \cos$$

$$2\sin.\cos = \sin + \sin$$

Ở nhóm công thức II, nếu quy ước $\frac{a+b}{2}$ đứng trước $\frac{a-b}{2}$ ta có thể nhớ sơ lược như

sau:

$$\cos + \cos = 2\cos.\cos$$

$$\cos - \cos = -2\sin.\sin$$

$$\sin + \sin = 2\sin.\cos$$

$$\sin - \sin = 2\cos.\sin$$

Sau đó có một số bài tập biến đổi đòi hỏi học sinh phải nắm vững các CTLG nhìn xuôi cũng như nhìn ngược.

Chẳng hạn có biểu thức : $\sin x.\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}.\cos x$ thì học sinh phải thấy đây chính là :

$$-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Thứ ba : Việc khắc phục thói quen tâm lý trong giải bài tập lượng giác đòi hỏi khi dạy học giải bài tập lượng giác giáo viên hướng dẫn học sinh có thói quen:

a. Tìm hiểu đầu bài một cách sáng tạo, không nóng vội đi vào từng yếu tố cụ thể mà phải có cách nhìn tổng quát tỉ mỉ tìm ra đặc điểm riêng của bài toán. Cách giải hay của mỗi bài toán khó đều bắt nguồn từ việc nắm vững đặc điểm riêng ẩn sâu của bài toán.

Ví dụ : Cho α, β là hai góc nào đó.

$$\text{CMR: Nếu } \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha.\cos\beta \geq 0 \quad (1) \text{ thì } \cos\alpha + \cos\beta \geq 0 \quad (2)$$

Nếu nóng vội, suy nghĩ dùng kiến thức lượng giác để giải thì rất khó khăn nhưng nếu tiếp cận bài toán bằng phương pháp chuyển từ lượng giác sang đại số ta có lời giải bài toán rất đơn giản:

Khi gặp biểu thức đại số có dạng $A+B+A.B \geq 0$ có thể liên tưởng đến

$$A+B+A.B = 1+A+B-A.B-1 = (1+A)(1+B)-1$$

$$\text{Do đó bất(1)} \Leftrightarrow (1+\cos\alpha).(1+\cos\beta) - 1 \geq 0$$

$$\text{Mặt khác vì : } 1+\cos\alpha \geq 0 ; 1+\cos\beta \geq 0$$

Áp dụng bất cosi cho 2 số ta có :

$$\frac{(1+\cos\alpha)+(1+\cos\beta)}{2} \geq \sqrt{(1+\cos\alpha).(1+\cos\beta)} \geq 1$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Trong nội dung tìm hiểu đề toán cần hướng dẫn học sinh phát biểu lại bài toán dưới nhiều khía cạnh khác nhau, tức là biến đổi bài toán thành nhiều bài toán tương đương, phiên dịch bài toán về ngôn ngữ mình quen thuộc. Làm như vậy giúp ta xác định được phạm vi dự đoán lời giải bài toán, học sinh được vận dụng tri thức linh hoạt sẽ khắc phục được ảnh hưởng tiêu cực của thói quen tâm lý.

Ví dụ : Cho $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$. Tìm GTLN,NN của biểu thức

$$S = \tan^2 x + \tan^2 y$$

Căn cứ vào đặc điểm $\sin^2 x ; \sin^2 y ; \tan^2 x ; \tan^2 y$ đều có thể biểu diễn qua $\cos^2 x ; \cos^2 y$ nên có thể biểu diễn bài toán dưới dạng :

$$\text{Tìm } S \text{ để hệ phương trình } \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2} \\ \tan^2 x + \tan^2 y = S \end{cases} (*) \text{ có nghiệm}$$

Lời giải :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} = S + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \cdot \cos^2 y = \frac{3}{2(S+2)}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x ; \cos^2 y \text{ là nghiệm phương trình } X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{3}{2(S+2)} = 0 \quad (**)$$

Do $0 \leq \cos^2 x ; \cos^2 y \leq 1 \Rightarrow (*)$ có nghiệm thì $(**)$ có nghiệm thỏa mãn : $0 \leq X \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - \frac{24}{S+2} \geq 0 \\ af(0) = \frac{3}{S+2} \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} - 0 > 0 \\ af(1) = \frac{3}{S+2} - 1 \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} - 1 > 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $1 \leq S \leq \frac{3}{2}$

b). Khai thác bài toán

Khai thác bài toán, một trong những nội dung quan trọng trong việc hướng dẫn học sinh giải toán, là phần không thể thiếu trong việc hướng dẫn học sinh học toán. Dạy toán là dạy học sinh cách làm toán, đầu tiên là học giải toán.

Khai thác bài toán giúp học sinh tích lũy kinh nghiệm và rèn luyện kỹ năng giải toán. Do không có phương pháp chung cho việc giải mọi bài toán nên chỉ có thể thông qua từng bài toán cụ thể hướng dẫn học sinh nắm được phương pháp giải của từng loại.

Hơn nữa, trong giải toán việc khắc phục thói quen tâm lý rất có hiệu quả nếu Thầy giáo chú ý tới nội dung khai thác bài toán.

Khai thác tìm cách giải mới, so sánh các cách giải, phát hiện cách làm tối ưu hơn, việc làm đó tạo cho học sinh thói quen đi sâu vào nghiên cứu lời giải bài toán, không lệ thuộc vào một cách làm nguyên nhân hình thành thói quen tâm lý.

Khai thác, sử dụng phương pháp, kết quả bài toán từ một bài toán đã có lời giải hoặc nghiên cứu mở rộng bài toán làm cho phạm vi ứng dụng của bài toán càng rộng lớn, giúp tri thức cũ và tri thức mới được vận dụng linh hoạt phù hợp với từng tình huống do đó khắc phục được thói quen tâm lý cố tình biến đổi bài toán về bài toán đã biết cách giải.

c). Để khắc phục ảnh hưởng của thói quen tâm lý đòi hỏi khi tìm lời giải bài toán Thầy giáo cần hướng dẫn học sinh dự đoán được phương pháp giải, có thể áp dụng để giải bài toán này. Đặc biệt chú ý đến việc sử dụng phương pháp suy luận có lý vào tìm lời giải bài toán. Vì vậy nó tăng thêm đặc điểm riêng của bài toán, các bài toán ít lệ thuộc vào nhau hơn. Việc giải các bài toán này góp phần tăng hứng thú khi giải bài toán.

Ngoài ra, Thầy giáo cần biết lựa chọn hệ thống bài tập đa dạng cả về nội dung và phương pháp, chú ý tới tư duy linh hoạt, sáng tạo. Việc chú trọng đến mọi bước giải của bài toán cũng góp phần không nhỏ trong việc khắc phục ảnh hưởng của thói quen này. Ở đây tôi chỉ đề cập đến một vài nội dung cụ thể giúp học sinh tránh được những hạn chế khi giải bài tập lượng giác.

Thói quen tâm lý là một thứ tiêu cực, nó làm cho tư duy của chúng ta cứng nhắc, bảo thủ, không có khả năng vận dụng linh hoạt tri thức để giải quyết hợp lý mọi tình huống

mới, không phát huy được tính sáng tạo cho người giải toán. Vì vậy việc khắc phục ảnh hưởng của thói quen này là cần thiết.

§3 SÁNG TẠO BÀI TOÁN TỪ BÀI TOÁN BAN ĐẦU

Khả năng phát hiện ra vấn đề mới là một khả năng rất quan trọng mà mỗi giáo viên cần quan tâm, bồi dưỡng cho học sinh. Khả năng này thể hiện rõ nét nhất ở chỗ đề xuất được bài toán mới. Bài toán mới có thể là bài toán hoàn toàn mới, không có quan hệ gì về nội dung hay về phương pháp với những bài toán đã có. Vì vậy, ở đây tôi chỉ đề cập đến việc sáng tạo các bài toán mới từ bài toán ban đầu. Cụ thể từ những bài tập lượng giác quen thuộc.

Xuất phát từ bài toán ban đầu ta có thể tìm ra các bài toán mới bằng cách chỉ ra các bài toán liên quan, bài toán khái quát hóa, bài toán tương tự hóa, bài toán đặc biệt hóa hoặc cũng có thể là bài toán ban đầu sau khi thay đổi một số yếu tố của giả thuyết, kết luận, hoặc cũng có thể là bài toán ban đầu nhưng dùng hình thức phát biểu khác... Và từ các bài toán liên quan này ta lại tìm được các bài toán liên quan khác. Cứ như vậy sẽ có một hệ thống các bài tập với mức độ khó, dễ khác nhau. Khi đó, người giải toán không chỉ nắm được các bài toán dưới dạng riêng lẻ mà còn nắm được dưới dạng tổng quát.

Thông qua việc sáng tạo các bài toán mới từ các bài toán ban đầu rèn luyện cho học sinh năng lực tự giải quyết vấn đề, năng lực nghiên cứu vấn đề và khả năng làm việc độc lập, sáng tạo.

Việc tạo lập bài toán mới từ bài toán ban đầu thường được tiến hành bằng một số cách:

- 1- Lập bài toán tương tự với bài toán ban đầu.
- 2- Thay đổi một số yếu tố của bài toán ban đầu.
- 3- Dùng hình thức khác để diễn tả cùng một nội dung.
- 4- Thêm vào một số yếu tố của bài toán.
- 5- Bớt đi một số yếu tố của bài toán.
- 6- Lập bài toán đảo với bài toán ban đầu.

Ở đây tôi chỉ trình bày một số cách lập bài toán mới xuất phát từ tiềm năng nội dung lượng giác trong việc bồi dưỡng tư duy sáng tạo.

1- Lập bài toán tương tự với bài toán ban đầu.

Tương tự thường được hiểu là như nhau, giống nhau. Những vấn đề tương tự là những vấn đề thường được nghiên cứu cùng nhau, có liên quan chặt chẽ với nhau. Các bài toán tương tự có thể xem xét dưới nhiều khía cạnh khác nhau:

- Chúng có đường lối giải, phương pháp giải giống nhau.
- Nội dung của chúng có những nét giống nhau, có giả thiết hoặc kết luận như nhau.
- Chúng đề cập tới những vấn đề giống nhau, những đối tượng có tính chất giống nhau.

Ví dụ 1: BT1 (BTBD): Tính tổng : $A = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

Do tính chất tương tự giữa các hàm sin và cos ta có thể đề xuất bài toán sau :

BT2: Tính tổng : $B = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

Các biến của hàm sin trong bài toán đầu tăng dần: Ban đầu là biến x , sau là $2x = x + x$, cứ như vậy cho đến $nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-phần tử}}$, có thể thay đổi bài toán. Tính tổng của n hàm sin

trong đó các biến của hàm sin đứng sau tăng so với các biến của hàm sin đứng trước một hằng số a nào đó ($a \neq 2k\pi; n \in \mathbb{N}^*$). Ta có bài toán mới:

BT3: Tính tổng :

$$C = \sin x + \sin(x + a) + \dots + \sin(x + na) \quad (a \neq 2k\pi; n \in \mathbb{N}^*)$$

Cho a là các giá trị cụ thể ta được các bài toán mới.

Như vậy, nhờ so sánh các đối tượng có thuộc tính giống nhau mà ta đề ra các bài toán tương tự. Trong một số bài toán tương tự có thể đúng hoặc cũng có thể sai, có thể dễ hơn, hoặc có thể khó hơn. Trong trường hợp nêu trên so với bài toán ban đầu, các bài toán sau là tương đương.

Ngoài ra, để tạo ra các bài tập mới bằng các phương pháp tương tự ta có thể giữ nguyên giả thiết của bài toán ban đầu mà chỉ thay kết luận của bài toán đó. Chỉ có thể làm được điều này nếu ta khai thác được những kết quả mới của bài toán đã cho, hoặc nghiên cứu bài toán đó theo hướng khác. Bài tập mới cùng với bài toán ban đầu giúp học sinh biết xem xét một vấn đề toán học dưới những góc độ khác nhau, giúp cho học sinh biết cách khai thác các kết quả khác nhau. Có thể có từ những dữ kiện không thay đổi.

Ví dụ 2: BT1(BTBĐ)

Chứng minh rằng phương trình: $\tan x + \cot x = a$ ($a < 2$) không có nghiệm trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Với giả thiết $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\tan x, \cot x > 0$ và do $\tan x \cdot \cot x = 1$ nên ta luôn có: $\tan x + \cot x \geq 2$. Dễ dàng có được lời giải bài toán. Từ đặc điểm trên của bài toán có thể đưa ra bài toán mới sau:

BT1: Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ giải phương trình:

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x) = 6$$

BT2 : Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ giải phương trình:

$$\tan x + \cot x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Cách giải 2 bài toán mới và bài toán ban đầu tương tự nhau, nhưng chúng cung cấp cho học sinh những bài toán mới. Hơn nữa với phương pháp giải và kinh nghiệm thu được qua việc giải các bài toán trên, kết quả khai thác từ bài toán ban đầu học sinh có thể tự mình tìm ra những kết quả mới.

2. Thay đổi một số yếu tố của BTBD.

Khi thay đổi một số yếu tố của của bài toán ban đầu, ta có thể thay đổi một vài dữ kiện giả thiết, cũng có thể thay đổi một vài điều cần tìm, phải chứng minh, hoặc cũng có thể thay đổi cả giả thiết và kết luận của bài toán. Việc thay đổi này nhằm làm cho bài toán đã cho trở thành một bài toán khác, có thể dễ hơn hay khó hơn, có thể chuyển sang một thể loại khác, phải dùng phương pháp giải khác so với bài toán ban đầu.

Trong một số trường hợp việc nghiên cứu sâu sắc cách giải của một bài tập có thể giúp ta khai thác được những kết quả mới. do đó chỉ còn thay đổi một số yếu tố của bài tập ban đầu có thể tạo ra bài toán mới chẳng hạn.

BT1 (BTBD): CMR trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Bài toán này có nhiều cách giải và được trình bày ở Bài 2 – Chương I- Phần bài tập bồi dưỡng tính mềm dẻo.

Qua nghiên cứu cách giải thứ nhất ta thấy nếu thay các hệ số của các véc tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trong bất đẳng thức ban đầu:

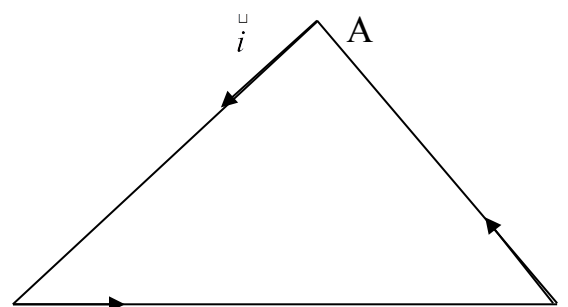
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right)^2 \geq 0 \text{ bằng các số khác ta có thể tạo ra một loạt các bài toán mới.}$$

Chẳng hạn với : $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad z = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$

Ta có kết quả : $3 \cos A + \sqrt{3} \cos B + 3 \cos C \leq \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Có thể ra cho học sinh bài toán sau:

BT2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:



$A = \sqrt{3} \cos B + 3 \cos A + 3 \cos C$
 (A,B,C là 3 góc của tam giác)
 Hoặc với :

B $\vec{j}$

$\vec{k}$
C

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \sqrt{2}, z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ ta có:}$$

$$\sqrt{3} \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C \leq 4 \quad (*)$$

Nếu dấu đẳng thức xảy ra thì ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vec{k} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow \vec{i} + \sqrt{3} \vec{k} &= -2\vec{j} \\
 \Rightarrow 4 + 2\sqrt{3} \vec{i} \cdot \vec{k} &= 4 \\
 \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0 \\
 \Rightarrow A &= 90^\circ
 \end{aligned}$$

Thay $\cos A = 0$ vào đẳng thức (*) để tính các góc còn lại có bài toán mới sau:

BT3: Tính các góc A,B,C của ΔABC biết:

$$\sqrt{3} \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C = 4$$

Nếu cũng với bài toán này, nghiên cứu lời giải theo cách 4. Sử dụng tính chất của hàm để chứng minh:

Trong bài toán đó ta xét hàm số $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + \cos x$ ($x \in 0; \pi$)

Và chứng minh được $\text{Max } f(x) = 3/2$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{3}$

Khi đó: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi tam giác đều

Từ lời giải đó ta suy nghĩ đến lớp các bất đẳng thức trong tam giác mà dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác đều. Chúng liên quan đến lớp các hàm $f(x)$ có đạo hàm phụ thuộc vào $2\cos x - 1$ hoặc $\cos x - \sin \frac{x}{2}$ hoặc $2\sin x - \sqrt{3}$,...triệt tiêu khi $x = \frac{\pi}{3}$

Chẳng hạn:

1). Xuất phát từ $f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$, bằng phương pháp tìm nguyên hàm ta được :

$f(x) = \cot x - \frac{2}{\sin x}$, ($x \in (0; \pi)$). Và chứng minh được $\max f(x) = -\sqrt{3} \Rightarrow A, B, C$ là 3 góc của Δ

ABC nên $A, B, C \in (0; \pi)$

Từ đó có: $\cot A - \frac{2}{\sin A} \leq -\sqrt{3}$

$$\cot B - \frac{2}{\sin B} \leq -\sqrt{3}$$

$$\cot C - \frac{2}{\sin C} \leq -\sqrt{3}$$

Chúng ta được :

$$3\sqrt{3} + (\cot A + \cot B + \cot C) \leq 2 \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$$

2). Xuất phát từ: $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bằng phương pháp tìm nguyên hàm ta được $f(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x - x$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

đồng biến với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó:

$$\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\tan A > A$$

$$\frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\tan B > B$$

$$\frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\tan C > C$$

Cộng các bất đẳng thức ta được :

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C) > \pi$$

Bằng con đường trên ta xây dựng được rất nhiều bất đẳng thức.

Căn cứ vào các cách giải của BT1 chúng ta đã thay đổi một số yếu tố của bài toán ban đầu để lần lượt tạo ra các bài toán mới. Bài toán sau thu được là do khai thác phương pháp và kết quả của bài toán ban đầu.

3. Dùng hình thức khai thác để diễn tả cùng một nội dung:

Một trong những cách để chúng ta sáng tạo ra những bài toán mới đó là tìm hình thức khác để diễn tả cùng một nội dung, rồi lấy hình thức nào đó phù hợp với trình độ học sinh và yêu cầu chứng minh tính đúng đắn của nó.

Ví dụ: $\cos^2 x \leq 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Xuất phát từ biểu thức tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ta suy ra bất đẳng thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Nếu chọn các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có tọa độ thay đổi ta có thể tạo ra vô số các bất đẳng thức khác nhau.

Chẳng hạn:

1. Nếu chọn các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có tọa độ lần lượt là:

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Vậy với: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có ngay bất đẳng thức Bunhia Copxki cho 3 số

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Nếu chọn $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ta có kết quả mới:

BT2: CMR với 3 số thực bất kỳ a,b,c ta có :

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Nhờ vào thay đổi tọa độ của các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta có thể tạo được rất nhiều bài toán mới với mức độ khó, dễ khác nhau.

Chẳng hạn nếu đặt: $a_1 = \sqrt{A}, a_2 = \sqrt{B}, a_3 = \sqrt{C}, b_1 = \sqrt{\frac{1}{A}}, b_2 = \sqrt{\frac{1}{B}}, b_3 = \sqrt{\frac{1}{C}}$ ($A, B, C > 0$) thì ta có:

$$\text{BT3: CMR: } A, B, C \text{ là 3 số thực dương ta có: } (A + B + C) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) \geq 9$$

Từ BT3 nếu tiếp tục chọn A,B,C là

$$A = a^2 + 2bc, B = b^2 + 2ca, C = c^2 + 2ab \quad \text{Với điều kiện } a + b + c = 1$$

Thì $A + B + C = (a + b + c)^2 = 1$. Khi đó ta có bài toán:

BT4: CMR nếu $a + b + c = 1, a, b, c > 0$ thì:

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

Cứ tiếp tục như vậy nếu lấy $A + B + C = (a + b + c)^3$, hoặc là các số đặc biệt khác thì ta lại có các bài tập mức khác.

Hoặc từ nội dung: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Chúng ta có thể biến đổi lần lượt như sau bằng cách mỗi lần nhân 2 vế với 2 lần $\cos$ của góc ở vế trái để vế đó có thể thay $\sin$ của góc gấp đôi.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$$

$$2 \sin 4x \cos 4x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$$

.....

$$2 \sin 2^{n-1} x \cos 2^{n-1} x = 2^n \sin x \cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1} x$$

$$\text{hay : } \sin 2^n x = 2^n \sin x \cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1} x$$

Từ đó ta có bài tập:

BT1: Giải phương trình: $\cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1} x = \frac{1}{2^n}$

Ở đây 2^n rất đặc biệt vì vậy nếu học sinh nào nhạy cảm sẽ viết lại phương trình trên thành

$$2 \cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1} x = 1$$

Và sẽ viết nhân thêm $\sin x$ vào 2 vế để có kết quả: $\sin 2^n x = \sin x$

Tùy vào trình độ học sinh, giáo viên sẽ đề n tổng quát hay cho một giá trị nào đó.

Hoặc từ nội dung: $\cos t \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Nếu tiến hành lấy tích phân hai vế ta có những kết quả mới:

$$1). \text{ Với } x > 0 \Rightarrow \int_0^x \cos t dt < \int_0^x 1 dt \Rightarrow \sin x < x$$

$$\begin{aligned}
2). \int_0^x \sin t dt &< \int_0^x t dt \Rightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \\
3). \int_0^x \cos t dt &> \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{2.3} \\
4). \cos x &< 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
5). \sin x &< x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
\Rightarrow BT : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 &> \left(1 - \frac{x^2}{2.3}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 &> 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} > \cos x
\end{aligned}$$

Như vậy, để có một bài toán mới từ bài tập đã biết không phải là quá khó, không làm được. Có kiến thức rộng là thuận lợi lớn cho việc suy nghĩ sáng tạo nhưng đó chưa phải là cái quyết định. Cái quyết định là nhiệt tình với cái mới, sự luôn luôn không bằng lòng với hiểu biết hiện có, óc tò mò khoa học, sự chú ý rèn luyện những phương pháp suy nghĩ đúng đắn. Chỉ cần có ý thức và quyết tâm rèn luyện. Khi đã quen với nếp làm việc, suy nghĩ như trên học sinh sẽ tự mình ra những kiến thức mới.

Kết luận: Xuất phát từ tiềm năng giác trong việc bồi dưỡng TDST, từ thực tiễn dạy học giáo viên chưa chú ý tới tiềm năng bồi dưỡng TDST của nội dung này, bỏ lỡ nhiều cơ hội bồi dưỡng cho học sinh. Việc giải bài tập theo định hướng bồi dưỡng TDST thiết thực góp phần thực hiện mục tiêu dạy học và theo xu hướng đổi mới phương pháp học toán: Tích cực hóa hoạt động của học sinh.

Việc giải bài tập lượng giác theo định hướng bồi dưỡng TDST cho học sinh đòi hỏi:

- Giáo viên không ngừng nâng cao năng lực toán học nói riêng và năng lực sư phạm nói chung.
- Giáo viên chú ý rèn luyện năng lực huy động kiến thức, khả năng định hướng khi hướng dẫn học sinh tìm lời giải.
- Giáo viên chú ý tới khắc phục ảnh hưởng của thói quen tâm lý trong khi hướng dẫn học sinh tìm lời giải, khai thác bài toán.
- Giáo viên chú ý tới sáng tạo bài toán.

Việc làm này đòi hỏi tiến hành thường xuyên liên tục.

Chương III: THỰC NGHIỆM

I- MỤC ĐÍCH THỰC NGHIỆM

- Tìm hiểu về dạy và học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo.
- Kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

II- NỘI DUNG THỰC NGHIỆM

1. Tìm hiểu khó khăn và hạn chế của học sinh trong việc giải bài tập lượng giác.

2. Tìm hiểu việc dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo.
3. Kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

III- TỔ CHỨC THỰC NGHIỆM

1. Thực nghiệm điều tra.

- Tìm hiểu khó khăn và hạn chế của học sinh trong việc giải bài tập lượng giác.
- Tìm hiểu việc dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy tính sáng tạo.

2. Thực nghiệm kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

Kế hoạch:

- Xây dựng tài liệu thực nghiệm, rút kinh nghiệm.
- Kiểm tra đối chứng.

Chuẩn bị:

- Điều tra thực tế.
- Trao đổi với giáo viên.

3. Kết quả:

3.1. Các thực nghiệm điều tra 1,2 (Mục II) được ghi trong bảng 1 (§3 chương I)

Qua điều tra tôi thấy học sinh chưa có năng lực sáng tạo, suy nghĩ còn dập khuôn, áp dụng công thức, phương pháp còn máy móc, không linh hoạt trong việc nhìn nhận vấn đề, kết quả học nội dung lượng giác nói chung, giải bài tập lượng giác nói riêng còn chưa cao. Cũng qua đó thấy được giáo viên chưa chú ý đến việc rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo cho người học, chưa khai thác tiềm năng nội dung lượng giác bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh.

Kết quả thực nghiệm kiểm nghiệm tính khả thi của biện pháp đề xuất.

Sau khi hướng dẫn học sinh một số kỹ năng cơ bản rèn luyện tư duy sáng tạo trong việc giải bài tập lượng giác ở các giờ ô tập và tiến hành làm thực nghiệm, tôi thu được kết quả khả quan. Cụ thể:

Lần thứ nhất:

- + Người thực hiện: Lưu Thị Thu
- + Đối tượng thực nghiệm: 11A₄

+ Nội dung thực nghiệm:

- Tìm hiểu năng lực xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau, khả năng tìm ra giải pháp lạ tuy đã biết giải pháp khác, khả năng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác...

- Tiến hành kiểm tra 1 tiết với đề toán sau:

Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x) = 6; x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

làm theo nhiều cách khác nhau

Sau khi chấm bài kiểm tra, thu được kết quả sau:

Kết quả	Lớp 11
Tổng số bài kiểm tra	45
Số bài kiểm tra làm theo 3 cách	8
Số bài kiểm tra làm theo 2 cách	22
Số bài kiểm tra có 1 cách	15
Số bài kiểm tra không làm được	0

Dựa trên kết quả quan sát, tổng kết bài kiểm tra tôi thấy tất cả học sinh trong lớp đều làm được ít nhất theo một cách. Chủ yếu các bài tập làm dùng ẩn phụ

$T = \tan x + \cot x$ hoặc $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, trong đó có 20% số bài có lời giải đặc biệt, ngắn gọn,

dựa vào đặc điểm riêng của giả thiết $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x + \cot x \geq 2 \\ \tan^2 x + \cot^2 x \geq 2 \end{cases}$$

Như vậy bước đầu kết quả đạt được là khả quan, kỹ năng giải bài tập lượng giác được củng cố, nâng cao, thể hiện được tính mềm dẻo, nhuần nhuyễn của tư duy.

Lần thứ 2:

+ Người thực hiện: Lưu Thị Thu

+ Đối tượng thực nghiệm: Học sinh lớp 10A₃ – Trường THPT Yên Mỹ.

+ Nội dung thực nghiệm:

- Tìm hiểu năng lực huy động kiến thức, khả năng tìm ra những mối liên hệ trong những sự kiện bên ngoài tưởng như không có quan hệ gì với nhau, khả năng nhận ra vấn đề mới, chức năng mới của đối tượng trong điều kiện quen thuộc.

- Tiến hành gọi lên bảng với đề bài sau:

Vòng 1: Cho A, B, C là 3 góc của 1 tam giác. CMR:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ tù}$$

Sau khi gọi 4 học sinh lên bảng kết quả thu được: Hai học sinh không làm được bài, một học sinh dựa vào kết quả bài trong ΔABC : $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$. Từ đó đưa ra lời giải bài toán. Một học sinh biến đổi trực tiếp biểu thức $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ và đưa ra kết quả chứng minh.

Vòng 2: Cho ΔABC không tù. CMR: $\sin A + \sin B + \sin C < 2$

Kiểm tra 3 học sinh:

Kết quả: Một học sinh không làm được, một học sinh phát hiện ra mối liên hệ giữa bài toán ở vòng 1 nhưng không cho ra kết quả đúng của bài toán, một học sinh nhận xét được mối quan hệ giữa bài toán với kết quả của bài toán ở vòng 1 và đưa ra được lời giải đúng.

Sau khi tiến hành kiểm tra với hai bài toán khác nhau có mức độ khó khác nhau nhưng cùng xuất phát từ một bài toán cơ bản và có quan hệ chặt chẽ với nhau tôi thấy kết quả đạt được bước đầu khẳng định được các biện pháp đề xuất là có hiệu quả. Đa số học sinh đều hào hứng với cách học trên, hăng hái tham gia xây dựng lời giải của bài toán.

IV. KẾT LUẬN:

- Trong khi giải bài tập lượng giác học sinh còn bị ảnh hưởng của lối tư duy cũ, phương pháp giải toán cũ nên kết quả đạt được chưa cao.

- Do giáo viên chưa chú ý đến bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập nói chung, bài tập lượng giác nói riêng nên năng lực sáng tạo còn hạn chế.

- Nếu chú ý đến việc bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh khi dạy học giải bài tập toán nói chung, bài tập lượng giác nói riêng học sinh sẽ có cơ hội phát triển toàn diện, có khả năng làm việc độc lập, năng lực tự nghiên cứu vấn đề và sáng tạo toán học.

KẾT LUẬN CHUNG

Sáng kiến kinh nghiệm đã làm sáng tỏ việc dạy học giải bài tập lượng giác theo định hướng phát huy sáng tạo mang tính lý luận và thực tiễn sâu sắc:

- Xuất phát từ nội dung chương trình.

- Xuất phát từ thực tiễn dạy học giải bài tập lượng giác.
- Xuất phát từ yêu cầu, nhiệm vụ và mục đích dạy học nội dung lượng giác.

Sáng kiến kinh nghiệm chỉ rõ định hướng cơ bản trong việc bồi dưỡng tư duy sáng tạo khi giải bài tập lượng giác.

Sáng kiến kinh nghiệm chỉ rõ biện pháp cơ bản bồi dưỡng tư duy sáng tạo khi dạy học giải bài tập lượng giác.

Sáng kiến kinh nghiệm mở ra hướng nghiên cứu nội dung dạy học ở trường phổ thông, nghiên cứu việc dạy học giải bài tập toán theo định hướng phát huy tính sáng tạo, phương pháp giảng dạy một dạng toán.

Do điều kiện không thể tiến hành thực nghiệm rộng rãi, với nhiều nội dung. Nhưng từ kết quả thực nghiệm bước đầu có thể khẳng định tính khả thi của biện pháp đề xuất.

Chúng tôi hy vọng rằng sáng kiến kinh nghiệm sẽ là tài liệu bổ ích cho giáo viên Toán các trường phổ thông.

Trong việc nghiên cứu đề tài khoa học chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót, tôi rất mong các Thầy Cô giáo trao đổi góp ý để sáng kiến kinh nghiệm thực sự trở thành tài liệu bổ ích cho giáo viên và học sinh các trường phổ thông.

Tôi xin trân trọng cảm ơn.

Yên Mỹ, ngày tháng năm 2014

Người thực hiện sáng kiến

Lưu Thị Thu