

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



LÝ THUYẾT.

Kí hiệu K là một khoảng, hay một đoạn hay một nửa khoảng.

1) Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

2) Định lý

a. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $\forall C \in \mathbb{R}$ hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

b. Đảo lại nếu $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $F(x) = G(x) + C$

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x) = F(x) + C$.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng: “Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K ”

3) Tính chất của nguyên hàm.

a. Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

b. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int [k \cdot f(x) + l \cdot g(x)] dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx$

c. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

4) Công thức nguyên hàm từng phần

$$\int u dv = uv - \int v du$$

5) Công thức đổi biến số

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

6) Bảng nguyên hàm và vi phân của những hàm số thường gặp

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp $u = u(x)$	Thường gặp
1) $\int dx = x + C$	1) $\int du = u + C$	$d(ax + b) = \frac{1}{a} dx$ 1) Vi phân
2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax + b)^{\alpha+1} + C$
3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	3) $\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u(x) \neq 0)$	3) $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln ax + b + C \quad (a \neq 0)$
4) $\int \cos x dx = \sin x + C$	4) $\int \cos u du = \sin u + C$	4) $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	5) $\int \sin u du = -\cos u + C$	5) $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$ Với $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	6) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	7) $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	7) $\int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
8) $\int e^x dx = e^x + C$	8) $\int e^u du = e^u + C$	8) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	9) $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C \quad (0 < a \neq 1)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1 LÝ THUYẾT.

Phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định. Phương pháp đổi biến số để xác định nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau:

a) Nếu: $\int f(x) = F(x) + C$ và với $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm thì: $\int f(u) du = F(u) + C$

b) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được: $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C$.

Từ đó ta trình bày hai dạng toán về phương pháp đổi biến số như sau:

Dạng 1: Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1 để tính nguyên hàm: $I = \int f(x) dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.

Bước 2: Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x)dx$.

Bước 3: Biểu thị: $f(x)dx = g[\varphi(x)] \varphi'(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

* Chú ý: Ta có một số dấu hiệu để đổi biến thường gặp:

STT	Dạng nguyên hàm	Cách đặt	Đặc điểm nhận dạng
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$t = f(x)$	Biểu thức dưới mẫu
2	$\int f[e^{u(x)}] u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức ở phần số mũ
3	$\int f[u(x)] u'(x) dx$	$t = u(x)$	Biểu thức trong dấu ngoặc
4	$\int f[\sqrt[n]{u(x)}] u'(x) dx$	$t = \sqrt[n]{u(x)}$	Căn thức
5	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$	$\frac{dx}{x}$ đi kèm biểu thức theo $\ln x$
6	$\int f(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x$	$\cos x dx$ đi kèm biểu thức theo $\sin x$
7	$\int f(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x$	$\sin x dx$ đi kèm biểu thức theo $\cos x$
8	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\tan x$
9	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$\frac{dx}{\sin^2 x}$ đi kèm biểu thức theo $\cot x$
10	$\int f(e^{ax}) e^{ax} dx$	$t = e^{ax}$	$e^{ax} dx$ đi kèm biểu thức theo e^{ax}
Đôi khi thay cách đặt $t = t(x)$ bởi $t = m.t(x) + n$ ta sẽ biến đổi dễ dàng hơn.			

Các dạng đặc biệt

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan \frac{x}{2}; \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	+ Với: $x + a > 0$ và $x + b > 0$, Đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ + Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$, đặt: $t = \sqrt{x-a} + \sqrt{-x-b}$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

c) $\int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$

Câu 2: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln x} dx$

b) $\int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$

Câu 3: Tìm nguyên hàm:

a) $I = \int (x+1)^3 \sqrt{3-2x} dx$

b) $J = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+2}}$

c) $K = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{5x+3}}$

Câu 4: Tìm nguyên hàm: a) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

b) $J = \int \frac{\cos x dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}$

Câu 5: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

2) $J = \int \frac{e^{2x}}{1 + \sqrt{e^x + 2}} dx$

3) $K = \int \sqrt{\frac{e^x + 4}{4e^x + 1}} dx$

Câu 6: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$

2) $J = \int \frac{\ln x \cdot dx}{x(1 + \sqrt{3 \ln x + 2})}$

3) $K = \int \frac{\ln x \sqrt{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

Câu 7: Tìm nguyên hàm:

1) $I = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 3 \sin 2x + 2}$

2) $J = \int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 1}$

$$I = \int \frac{\sin^4 2x \cdot \cos^3 x}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

Câu 8: Tìm nguyên hàm:

Câu 9: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 4e^{-x}}$ 2) $J = \int \frac{(\ln x + 1) \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx$

Câu 10: Tìm nguyên hàm: 1) $I = \int \frac{x^3 - 1}{x(x^6 + 3x^3 + 2)} dx$ 2) $J = \int \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2}$

Câu 11: Tìm nguyên hàm: $I = \int \frac{\tan x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int x\sqrt{x+1} dx \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{(x+3)^{10}} \quad I_3 = \int \frac{(x+1)^{2010}}{(3x+1)^{2012}} dx$$

Bài 2: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^3} dx \quad I_2 = \int \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx \quad I_3 = \int \frac{1 - x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, x \neq 0$$

$$J_1 = \int x\sqrt{x^2 - 4} dx \quad J_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx \quad J_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

Bài 3: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} \quad I_2 = \int x^2 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} \quad I_4 = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Bài 4: Tìm nguyên hàm:

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad J_1 = \int \frac{x}{1 + \sqrt{2x+1}} dx$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+1}} \quad J_4 = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} \quad J_5 = \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx$$

$$J_6 = \int \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx$$

Bài 5: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \tan^2 x dx \quad I_2 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

$$J_1 = \int \tan^3 x dx \quad J_2 = \int \frac{5 \sin x + 2 \sin 2x}{\cos 2x + 6 \cos x + 5} dx \quad J_3 = \int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx$$

Bài 6: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \sin^5 x \cos^3 x dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{(\sin x + 2 \cos x)^3} dx \quad I_3 = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

Bài 7: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx \quad I_3 = \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{x} dx$$

Bài 8: Tìm nguyên hàm:

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)} dx \quad I_2 = \int \frac{\ln^2 x}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})} dx \quad I_3 = \int \frac{\ln^2(\ln x)}{x \ln x [\ln(\ln x) + 1]} dx$$

Bài 9: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x dx}{1 + 4 \sin x} \quad J = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \quad K = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

Bài 10: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{\sin 2x + 3 \cos x}{1 + \sqrt[3]{1 + 2 \sin x}} dx \quad J = \int \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx \quad K = \int \frac{4 \sin^2 3x + \sin 4x}{\tan x + \cot 2x} dx$$

Bài 11: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \frac{2x + 1}{2 + \sqrt{x - 1}} dx \quad J = \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad K = \int \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} dx$$

Bài 12: Tìm nguyên hàm:

$$I = \int \sqrt{\frac{(x + 3)^{2009}}{(2x - 1)^{2013}}} dx \quad K = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

Bài 13: Tìm nguyên hàm:

$$\begin{aligned} 1. \quad I &= \int x^3 \sqrt{x + 1} dx & 2. \quad I &= \int \frac{x}{\sqrt[4]{x + 1}} dx \\ 3. \quad I &= \int \frac{(x + 1) dx}{1 + \sqrt{4x + 1}} & 4. \quad I &= \int \frac{x^5 - x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx \\ 5. \quad I &= \int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{3 \sin x + 1}} dx & 6. \quad I &= \int \frac{\tan x dx}{1 + \sqrt[3]{\ln(\cos x) + 1}} \\ 7. \quad I &= \int \frac{\ln x}{(1 + \sqrt{\ln x + 2})x} dx & 8. \quad I &= \int \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 5} e^x dx \end{aligned}$$

Bài toán 2: (Lượng giác hóa) Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 2 tính tích phân bất định: $I = \int f(x) dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.

Bước 2: lấy vi phân hai vế: $dx = \varphi'(t)dt$

Bước 3: Biến đổi: $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$

Bước 4: Khi đó tính: $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

* *Lưu ý:* Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t \leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} \leftrightarrow t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t \leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a \cot t \leftrightarrow t \in (0; \pi) \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

Câu 1: Tính tích phân bất định a/ $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ b/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Câu 2: Tính tích phân bất định: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

1 LÝ THUYẾT.

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$$

Với dạng này, ta đặt

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$$

Với dạng này, ta đặt

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$$

Với dạng này, ta đặt

• **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$$

Với dạng này, ta đặt

• **Dạng 5.** $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$.

$$\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

Với dạng này, ta đặt

BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

Câu 4. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

Câu 5. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

- Câu 6.** Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:
- Câu 7.** Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .
- Câu 8.** Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó, tính $a+b$
- Câu 9.** Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.
- Câu 10.** Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x} dx$.
- Câu 11.** Tìm nguyên hàm $\int \ln x dx$
- Câu 12.** Tìm nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$
- Câu 13.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.
- Câu 14.** Tìm nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$?



Câu 1: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
 C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$ D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 2: (Mã 101 - 2020 Lần 1) $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C.$ B. $\frac{1}{3}x^3 + C.$ C. $x^3 + C.$ D. $3x^3 + C.$

Câu 3: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C.$ B. $3x^2 + C.$ C. $x^4 + C.$ D. $\frac{1}{4}x^4 + C.$

Câu 4: (Mã 103 - 2020 Lần 1) $\int x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$ B. $4x^3 + C$ C. $x^5 + C$ D. $5x^5 + C$

Câu 5: (Mã 104 - 2020 Lần 1) $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4 + C.$ B. $\frac{1}{6}x^6 + C.$ C. $x^6 + C.$ D. $6x^6 + C.$

Câu 6: (Mã 101 - 2020 Lần 2) $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C.$ B. $x^5 + C.$ C. $5x^5 + C.$ D. $20x^3 + C.$

Câu 7: (Mã 102 - 2020 Lần 2) $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6 + C.$ B. $x^6 + C.$ C. $\frac{1}{6}x^6 + C.$ D. $30x^4 + C.$

Câu 8: (Mã 103 - 2020 Lần 2) $\int 3x^2 dx$ bằng

A. $3x^3 + C.$ B. $6x + C.$ C. $\frac{1}{3}x^3 + C.$ D. $x^3 + C.$

Câu 9: (Mã 104 - 2020 Lần 2) $\int 4x^3 dx$ bằng

A. $4x^4 + C.$ B. $\frac{1}{4}x^4 + C.$ C. $12x^2 + C.$ D. $x^4 + C.$

Câu 10: (Mã 103 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C.$ D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 11: (Mã 104 - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $x^2 + C.$ B. $2x^2 + C.$ C. $2x^2 + 4x + C.$ D. $x^2 + 4x + C.$

Câu 12: (Mã 102 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là
A. $x^2 + C$. **B.** $x^2 + 6x + C$. **C.** $2x^2 + C$. **D.** $2x^2 + 6x + C$.

Câu 13: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là
A. $\sin x + 3x^2 + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Câu 14: (Mã 105 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x$.
A. $\int 2\sin x dx = -2\cos x + C$ **B.** $\int 2\sin x dx = 2\cos x + C$
C. $\int 2\sin x dx = \sin^2 x + C$ **D.** $\int 2\sin x dx = \sin 2x + C$

Câu 15: (Mã 101 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là
A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$ **B.** $3x^2 + 1 + C$ **C.** $x^3 + x + C$ **D.** $x^4 + x^2 + C$

Câu 16: (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là
A. $x^2 + 3x + C$. **B.** $2x^2 + 3x + C$. **C.** $x^2 + C$. **D.** $2x^2 + C$.

Câu 17: (Đề Minh Họa 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.
A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 18: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.
A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 19: (Mã 110 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.
A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$ **B.** $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$
C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$ **D.** $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Câu 20: (Mã 123 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$
A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ **B.** $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$
C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ **D.** $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 21: (Mã 104 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là
A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ **B.** $3x^2 + 2x + C$ **C.** $x^3 + x^2 + C$ **D.** $x^4 + x^3 + C$

- Câu 22:** (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là
- A. $e^x + 1 + C$ B. $e^x + x^2 + C$ C. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$
- Câu 23:** (Mã 101 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là
- A. $x^2 + C$ B. $x^2 + 5x + C$ C. $2x^2 + 5x + C$ D. $2x^2 + C$
- Câu 24:** (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.
- A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$ B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$ C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$ D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$
- Câu 25:** (Mã 102 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là
- A. $4x^3 + 1 + C$ B. $x^5 + x^2 + C$ C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $x^4 + x + C$
- Câu 26:** (Đề Tham Khảo 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là
- A. $x^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C$ C. $6x + C$ D. $x^3 + x + C$
- Câu 27:** (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
- A. $2 + \ln 15$ B. $3 + \ln 15$ C. $\ln 15$ D. $4 + \ln 15$
- Câu 28:** (Mã 105 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.
- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$ B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$ C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$ D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$
- Câu 29:** (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
- A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$
C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$ D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$
- Câu 30:** (Mã 123 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$ B. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$
C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$ D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$
- Câu 31:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng
- A. $2e^x + 2x^2 + C$ B. $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$ C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$ D. $e^{2x} + 4x^2 + C$
- Câu 32:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

A. $2e^x - 4x^2 + C.$

B. $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C.$

C. $e^{2x} - 8x^2 + C.$

D. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C.$

- Câu 33:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. B. $e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $2e^x - 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.
- Câu 34:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng
- A. $e^{2x} + 8x^2 + C$. B. $2e^x + 4x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.
- Câu 35:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là
- A. $x + 3\ln(x-1) + C$. B. $x - 3\ln(x-1) + C$. C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.
- Câu 36:** (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$. B. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$.
C. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$. D. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$.
- Câu 37:** (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là
- A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$. B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.
C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$. D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$.
- Câu 38:** (Mã 102 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là
- A. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$. B. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$.
C. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$. D. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$.
- Câu 39:** (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là
- A. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$. B. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

C. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

D. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

Câu 40: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$ là

A. $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

B. $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$.

C. $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$.

D. $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

Câu 41: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) f'(x)$ là

A. $\frac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$.

B. $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$.

C. $\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

D. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

Câu 42: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) f'(x)$ là

A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$.

B. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

C. $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

D. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Câu 43: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1) f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

B. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

C. $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

D. $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

Câu 44: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$.

B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 45: (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

B. $2x^2 \ln x + x^2$.

C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 46: (Mã 104 2017) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$.

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.

Câu 47: (Mã 105 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Câu 48: (Mã 110 2017) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

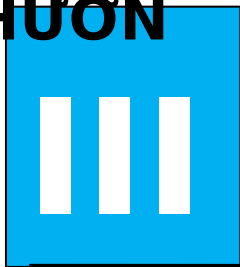
Câu 49: (Mã 103 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$

B. $-\frac{1}{40}$

C. $-\frac{41}{400}$

D. $-\frac{1}{10}$



NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

① $\int 0 dx = C.$	$\int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln a} a^{ax+b} + C.$

♦ **Nhận xét.** Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Một số nguyên tắc tính cơ bản

☞ Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\frac{3}{4} \frac{p}{4} \frac{3}{4} \frac{p}{4}$ khai triển.

☞ Tích các hàm mũ $\frac{3}{4} \frac{p}{4} \frac{3}{4} \frac{p}{4}$ khai triển theo công thức mũ.

☞ Bậc chẵn của sin và cosin $\frac{p}{4}$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a, \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a.$

☞ Chuyển tích các căn thức của $x \frac{3}{4} \frac{p}{4} \frac{3}{4} \frac{p}{4}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1: Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$?

- A. $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$ B. $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$ C. $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$ D. $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- A. $3e^x + C$ B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ C. $\frac{1}{3}e^x + C$ D. $3e^{3x} + C$

Câu 3: Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

- A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ B. $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$ C. $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$ D. $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A. $2e^{2x-1} + C$ B. $e^{2x-1} + C$ C. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ D. $\frac{1}{2}e^x + C$

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

- A. $\ln|2x+3| + C$ B. $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$ C. $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$ D. $\frac{1}{2}\lg(2x+3) + C$

Câu 6: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

Câu 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

- A. $-3\cos 3x + C$ B. $3\cos 3x + C$ C. $\frac{1}{3}\cos 3x + C$ D. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

Câu 8: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- A. $x^3 + \cos x + C$ B. $6x + \cos x + C$ C. $x^3 - \cos x + C$ D. $6x - \cos x + C$

Câu 9: Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$ B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$

C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 10: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.
C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$. D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 11: Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$. B. $\int 2^x dx = 2^x + C$. C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 12: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

A. $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$. D. $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

A. $\cos x + C$. B. $-\cos x + C$. C. $-\sin x + C$. D. $\sin x + C$.

Câu 14: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$. B. $x^4 + x^2 + C$. C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. D. $x^5 + x^3 + C$.

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x - x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C$. D. $e^x - 2 + C$.

Câu 16: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. B. $\sin x + x^2 + C$. C. $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $-\sin x + x^2 + C$.

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln |x| + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln |x| + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln |x| + \cos x + C$. D. $\ln |x| - \cos x + C$.

Câu 19: Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $f(x) = 3x^2$. B. $f(x) = x^3$. C. $f(x) = x^2$. D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

Câu 21: Tính $\int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

A. $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$

B. $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$

C. $F(x) = e^2 x + C$

D. $F(x) = 2ex + C$

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$

C. $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$

D. $\ln|2x-1| + C$

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$

B. $2^x + x^2 + C$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$

D. $2^x + \frac{x^2}{2} + C$

Câu 24: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

A. $1 + \cos x + C$

B. $1 - \cos x + C$

C. $x + \cos x + C$

D. $x - \cos x + C$

Câu 25: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2022$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2022x + C$

D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2022x + C$

Câu 26: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$

B. $\ln(1-3x) + C$

C. $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$

D. $\ln(3x-1) + C$

Câu 27: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$

B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

D. $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x)dx$.

A. $\int f(x)dx = 2^x + x^2 + x + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$

C. $\int f(x)dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$

Câu 29: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$. B. $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$. C. $f(x) = e^{2x}$. D. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Câu 30: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$ B. $-3^{-x} + C$ C. $3^{-x} \ln 3 + C$ D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Câu 31: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. B. $x^4 + x^3 + C$. C. $3x^2 + 2x + C$. D. $\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$

Câu 32: Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

A. $\frac{x^{2020}}{2020} + 1$. B. $\frac{x^{2020}}{2020}$. C. $y = 2019x^{2018}$. D. $\frac{x^{2020}}{2020} - 1$.

Câu 33: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$. B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$. D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$ B. $2e^x - \tan x + C$ C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 35: họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$. B. $\ln|5x+4| + C$. C. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$. D. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

Câu 36: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$.
Tìm $F(x)$.

A. $2 \ln(x-1) + 2$ B. $\ln(x-1) + 3$ C. $4 \ln(x-1)$ D. $\ln(x-1) - 3$

Câu 37: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2 + \ln 2$. B. $\ln 2$. C. $2 + \ln(-2)$. D. $\ln(-2)$.

Câu 38: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. B. $F(1) = \ln 3 + 2$. C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$. D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

- Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.
 Tính $S = f(3) - f(-1)$.
 A. $S = \ln 4035$. B. $S = 4$. C. $S = \ln 2$. D. $S = 1$.
- Câu 40:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng
 A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.
- Câu 41:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là
 A. $\frac{1}{2}e + 200$ B. $2e + 100$ C. $\frac{1}{2}e + 50$ D. $\frac{1}{2}e + 100$
- Câu 42:** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1$, $\forall x$, $f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là
 A. $y = 2e^x + 2x$. B. $y = 2e^x + 2$. C. $y = e^{2x} + x + 2$. D. $y = e^{2x} + x + 1$.
- Câu 43:** Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.
 A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018$. B. $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
 C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. D. $F(x) = e^x - 2019$.
- Câu 44:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.
 A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. B. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. C. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. D. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.
- Câu 45:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
 A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$. B. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.
 C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$. D. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.
- Câu 46:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.
 A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}$ B. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}$ C. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}$ D. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}$
- Câu 47:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.
 Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.
 A. 55. B. 44. C. 45. D. 0.
- Câu 48:** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.
 A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$. C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

DẠNG 2. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

“ Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó: $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

$$\square \int f(ax+b)^n x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b. \quad \square \int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}.$$

$$\square \int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx \xrightarrow{PP} t = \ln x. \quad \square \int_a^b f(e^x) e^x dx \xrightarrow{PP} t = e^x.$$

$$\square \int_a^b f(\sin x) \cos x dx \xrightarrow{PP} t = \sin x. \quad \square \int_a^b f(\cos x) \sin x dx \xrightarrow{PP} t = \cos x.$$

$$\square \int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} t = \tan x. \quad \square \int_a^b f(\sin x \pm \cos x) (\sin x \pm \cos x) dx \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x.$$

$$\square \int_a^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2}) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \sin t. \quad \square \int_a^\beta f((\sqrt{x^2 + a^2})^m) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \tan t.$$

$$\square \int_a^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \xrightarrow{PP} x = a \cos 2t. \quad \square \int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}.$$

$$\square \int_a^\beta R\left[\sqrt{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}\right] dx \Rightarrow t^n = ax+b. \quad \square \int_a^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}.$$

2. Đổi biến số với hàm ẩn

□ **Nhận dạng tương đối:** Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.

□ **Phương pháp:** Đặt $t = (\neq x)$.

□ **Lưu ý:** Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: “**Tích phân không phụ thuộc**

vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận”, nghĩa là
$$\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(x)dx = \dots$$

Câu 49: Biết $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$?

A. $\int f(x)dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$

B. $\int f(x)dx = 2\sin^2 2x + 2\ln x + C$

C. $\int f(x)dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C$

D. $\int f(x)dx = 2\sin^2 x + 2\ln x + C$

Câu 50: Cho $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C$

B. $\int f(x+2)dx = x^2 + 7x + C$

C. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C$

D. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$

Câu 51: Cho $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2)dx$

A. $I = 2x^6 + x^2 + C$

B. $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$

C. $I = 4x^6 + 2x^2 + C$

D. $I = 12x^2 + 2$

Câu 52: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$

B. $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C$

C. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$

Câu 53: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$

B. $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$

C. $e^{\sin^2 x} + C$

D. $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$

Câu 54: Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

D. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$

Câu 55: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$ và $F(0) = 1$.

A. $F(x) = \ln(x^4 + 1) + 1$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{4}$

C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1$

D. $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1$

Câu 56: Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$

với $a, b \in \mathbb{R}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b$

B. $b = 2a$

C. $a = 2018b$

D. $b = 2018a$

$$f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$$

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}$. C. $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 58: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là:

- A. $S = \{3\}$ B. $S = \{2; 3\}$ C. $S = \{-2; 3\}$ D. $S = \{-3; 3\}$

Câu 59: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{2019}$ là

- A. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right]$ B. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020}$
C. $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} + C$ D. $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C$

Câu 60: Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là:

- A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$ B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C$
C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$ D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$

Câu 61: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3 + 1}$

- A. $\int f(x) dx = e^{x^3 + 1} + C$ B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3 + 1} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3 + 1} + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3 + 1} + C$

Câu 62: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x + 1}$ là

- A. $\int f(x) dx = (3x + 1)\sqrt[3]{3x + 1} + C$ B. $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x + 1} + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x + 1} + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x + 1)\sqrt[3]{3x + 1} + C$

Câu 63: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x + 2}$ là

- A. $\frac{2}{3} (3x + 2)\sqrt{3x + 2} + C$ B. $\frac{1}{3} (3x + 2)\sqrt{3x + 2} + C$
C. $\frac{2}{9} (3x + 2)\sqrt{3x + 2} + C$ D. $\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x + 2}} + C$

Câu 64: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

D. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

Câu 66: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du$

B. $\int (u^2 - 4) du$

C. $\int (u^2 - 3) du$

D. $\int 2u(u^2 - 4) du$

Câu 67: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$

Câu 68: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ là

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1} + C$

B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

D. $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

Câu 69: Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Câu 70: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

B. $\int f(x) dx = \ln|1+3\cos x| + C$

C. $\int f(x) dx = 3 \ln|1+3\cos x| + C$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

Câu 71: Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\sin x)^2} + C$

B. $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)} + C$

C. $f(x) = -\frac{1}{2+\sin x} + C$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x} + C$

- Câu 72:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.
- A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$. C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$. D. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$.
- Câu 73:** Biết $\int f(x)dx = 3x \cos(2x - 5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.
- A. $\int f(3x)dx = 3x \cos(6x - 5) + C$. B. $\int f(3x)dx = 9x \cos(6x - 5) + C$.
C. $\int f(3x)dx = 9x \cos(2x - 5) + C$. D. $\int f(3x)dx = 3x \cos(2x - 5) + C$.
- Câu 74:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.
- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.
B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.
D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.
- Câu 75:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.
- Câu 76:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$.
- Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng
- A. $3\ln 2 + 2$. B. $\ln 2 + 2$. C. $\ln 2 + 1$. D. $2\ln 2 + 1$.
- Câu 77:** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:
- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 1 - \sqrt{3}$.
- Câu 78:** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là
- A. $\frac{217}{8}$. B. 27 . C. $\frac{215}{24}$. D. $\frac{215}{8}$.
- Câu 79:** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là
- A. $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$. B. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$.
C. $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. D. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$.

DẠNG 3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ

1. Công thức thường áp dụng

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{ax+b} + C.$$

$$\int \ln a + \ln b = \ln(ab). \int \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$\int \ln a^n = n \ln a. \int \ln 1 = 0.$$

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ

☐ Nếu bậc của tử số $P(x)$ $\geq$ bậc của mẫu số $Q(x)$ thì chia đa thức.

☐ Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x)$ thì phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.

☐ Nếu mẫu không phân tích được thành tích số thì thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 80: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$

Câu 81: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$.
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$.

B. $a+b=8$.

C. $2a-b=8$.

D. $a-b=8$.

Câu 82: Cho biết $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b$.

A. 0.

B. -1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Câu 83: Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^2+ab+b^2$.

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a+b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 85: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

A. $\frac{2019}{2020}$. B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$. C. $2018 \frac{1}{2020}$. D. $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 86: Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. 2.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. B. $\ln 80 + 1$. C. $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. D. $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

A. $S = 1$. B. $S = 1 + \ln^2 2$. C. $S = 2 \ln 2$. D. $S = \ln^2 2$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

A. $\ln \frac{6}{5} + 1$. B. $\ln \frac{6}{5} - 1$. C. $\ln \frac{4}{5} + 1$. D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

DẠNG 4. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:
$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$.

Tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ để tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.
Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du. (*)$

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2. Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ để tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \sin(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) \cos(ax+b) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \end{cases}$$

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) \cdot dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{cases}$$

- **Dạng 4.** $I = \int P(x) \ln g(x) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$$
.

- **Dạng 5.** $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt
$$\begin{cases} u = \frac{\sin x}{\cos x} \\ dv = e^x dx \end{cases}$$
.

Câu 91: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.
C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$. D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Câu 92: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

- A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$ D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 93: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

- A. $(2x - 3)e^x + C$. B. $(2x + 3)e^x + C$. C. $(2x + 1)e^x + C$. D. $(2x - 1)e^x + C$.

Câu 94: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

- A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$.
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$. D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

Câu 95: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

- A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C$ B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C$
C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C$ D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C$

Câu 96: Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính tích $P = abc$.

- A. -4. B. 1. C. -5. D. -3.

Câu 97: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

- A. $(2x - 1)e^x + x^2$. B. $(2x + 1)e^x + x^2$. C. $(2x + 2)e^x + x^2$. D. $(2x - 2)e^x + x^2$.

Câu 98: Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

- A. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C$

Câu 99: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$

A. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C$

B. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$

C. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$

D. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$

Câu 100: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$

Câu 101: Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

A. $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$

B. $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$

C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$

D. $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

Câu 102: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$

B. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$

D. $4x^3 + (x+1)e^x + C$

Câu 103: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot e^{2x}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 104: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C$

Câu 105: Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$

A. $x \sin x - \cos x + C$

B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x + C$

D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Câu 106: Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

A. $(x^2 + x + 1)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$

B. $(x^2 + x - 1)\ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$

C. $(x^2 + x + 1)\ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$

D. $(x^2 + x - 1)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 3$

B. $f(1) = e$

C. $f(1) = 5 - e$

D. $f(1) = 8 - 2e$

Câu 108: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x - 2)e^x + e^x + C$

B. $(x + 2)e^{2x} + e^x + C$

C. $(x - 1)e^x + C$

D. $(x + 1)e^x + C$

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x + 1)e^x$, $f(0) = 0$ và $\int f(x)dx = (ax + b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

A. $a + b = 2$.

B. $a + b = 3$.

C. $a + b = 1$.

D. $a + b = 0$.

Câu 110: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x + 1)e^{-x} + 2$

B. $F(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$

C. $F(x) = (x + 1)e^{-x} + 2$

D. $F(x) = -(x + 1)e^{-x} + 1$

Câu 111: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$

B. $ab = \frac{1}{4}$

C. $ab = -\frac{1}{8}$

D. $ab = -\frac{1}{4}$

Câu 112: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$

B. 0

C. $\frac{7}{3} \ln 2$

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$

Câu 113: Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x - 1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

A. $T = 8$

B. $T = -17$

C. $T = 2$

D. $T = -13$

Câu 114: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$

B. $ab = \frac{1}{4}$

C. $ab = -\frac{1}{8}$

D. $ab = -\frac{1}{4}$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN HOẶC LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH $f(x), f'(x), f''(x)$

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Để dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = - \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. (12;13). B. (9;10). C. (11;12). D. (13;14).

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -1. D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là
A. $\frac{27}{4}$. B. 9. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng
A. $-\frac{2020}{2021}$. B. $-\frac{2015}{2019}$. C. $-\frac{2019}{2020}$. D. $-\frac{2016}{2021}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

- A. $T = \frac{-3}{16}$. B. $T = \frac{21}{16}$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = 0$.

Câu 6: Cho hs $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

- A. e^2 . B. $2e$. C. $e+1$. D. e^3 .

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$ với $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $a - b = 2019$. B. $ab > 2019$. C. $2a + b = 2022$. D. $b \leq 2020$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

- A. 24. B. 14. C. 4. D. 16.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) < 2$ B. $2 < f(x) < 4$ C. $f(x) > 6$ D. $4 < f(x) < 6$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- A. $\frac{40\sqrt{5} - 1}{2}$. B. $\frac{20\sqrt{5} - 1}{4}$. C. $\frac{20\sqrt{5} - 1}{2}$. D. $\frac{40\sqrt{5} - 1}{4}$.

Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{e}$. B. $\frac{1}{e}$. C. e . D. $\frac{e}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

- A. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$. B. $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$. C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. D. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$

- A. $\frac{43}{30}$ B. $\frac{16}{15}$ C. $\frac{43}{15}$ D. $\frac{26}{15}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$.
 $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$
 Biết rằng trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng

- A. $\frac{14}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

- A. $f(8) = 49$ B. $f(8) = 256$ C. $f(8) = \frac{1}{16}$ D. $f(8) = \frac{49}{64}$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0, \forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.

- A. $\frac{2021}{2020}$ B. $\frac{2020}{2019}$ C. $\frac{2019}{2020}$ D. $\frac{2018}{2019}$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là

- A. $2\sqrt[3]{42}$ B. $2\sqrt[3]{15}$ C. $\sqrt[3]{42}$ D. $\sqrt[3]{15}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 5 B. 10 C. 20 D. 15

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

- A. $\sqrt{26}$ B. $\sqrt{24}$ C. $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{23}$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A. 28 B. 22 C. $\frac{19}{2}$ D. 10

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.
 Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = \frac{e}{3}$. B. $f(2) = \frac{e}{6}$. C. $f(2) = \frac{e^2}{3}$. D. $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 24: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2 < f(5) < 3$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $3 < f(5) < 4$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 3029$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) \neq 0$, $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(80)$.

- A. $-\frac{3240}{6481}$. B. $\frac{6480}{6481}$. C. $-\frac{6480}{6481}$. D. $\frac{3240}{6481}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. $e^{\frac{3}{2}}$. B. e^3 . C. $e^{\frac{5}{2}}$. D. e^2 .

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = e^2$. B. $f(1) = -\frac{1}{e}$. C. $f(1) = \frac{1}{e^2}$. D. $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

- A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. B. $f^2(2) = \frac{332}{15}$. C. $f^2(2) = \frac{324}{15}$. D. $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$.

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

C. $(x-1)e^x + C$.

D. $(x+1)e^x + C$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\frac{25}{6}$.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 7.

D. -7.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 8.

C. 10.

D. 4.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \cdot \ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$.

B. $\left(13; \frac{27}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$.

D. $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $f(0) = 1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{e}} x \cdot f(x) dx$.

A. $\frac{11}{2}$.

B. $\frac{15}{4}$.

C. $\frac{45}{8}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x) + 1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b + c$

A. $a + b + c = 7$.

B. $a + b + c = 4$.

C. $a + b + c = 6$.

D. $a + b + c = 5$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{21}{16}$.

B. $T = \frac{3}{2}$.

C. $T = 0$.

D. $T = -\frac{3}{16}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$. B. $\frac{21}{10}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 39: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 40: Cho $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi; 9\pi)$. B. $(2\pi; 4\pi)$. C. $(4\pi; 6\pi)$. D. $(0; 2\pi)$.

Câu 41: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

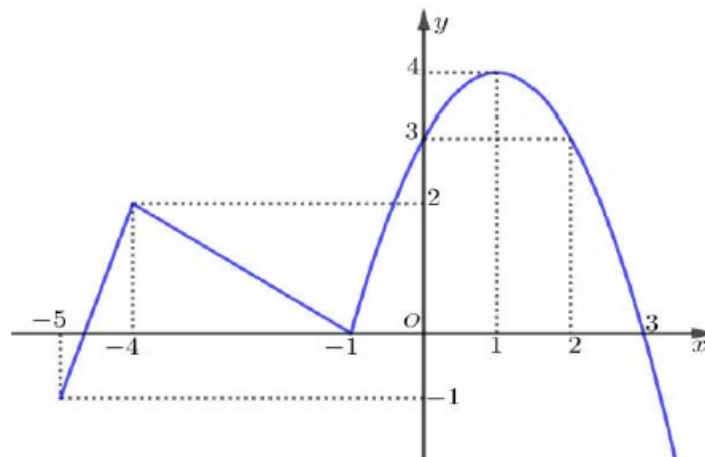
Câu 42: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 4\pi)$?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 43: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. B. 2. C. vô số điểm. D. 0.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

A. 33.

B. $\frac{109}{3}$.

C. $\frac{35}{3}$.

D. 11.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -16x - 20$.

B. $y = 16x - 20$.

C. $y = 16x + 20$.

D. $y = -16x + 20$.