SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH DƯƠNG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC
NĂM HỌC: 2013-2014
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian phát đề)*

Câu 1: (2,5 điểm)

Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ với a, b, c $\neq$ 0 và $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$

Chứng minh rằng M= 3abc.

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $(x+2)^3 > 1 + x + x^2 + x^3$ với mọi giá trị x.
b) Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Câu 3: (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A=\frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

a) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên.
b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 3: (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC. Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F. Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành BEMF có diện tích lớn nhất.

------------Hết------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BÌNH DƯƠNG	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC Năm học 2013-2014 Môn: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (2,5 điểm)

Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ với a, b, c $\neq 0$ và $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$.

Chứng minh rằng M = 3abc.

Đặt $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z$ thì $x+y+z=0$	0.25
Ta có: $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=a^2b^2c^2(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3})$	0.5
$=a^2b^2c^2(x^3+y^3+z^3)$	0.25
Từ x + y + z = 0 suy ra $x+y=-z \Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=(-z)^3$	0.5
$\Rightarrow x^3+y^3-3xyz=-z^3$	0.25
$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$	0.25
Vậy $M=a^2b^2c^2.3xyz=a^2b^2c^2.3\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=3abc$.	0.5

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$ với mọi giá trị x.

b) Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1+x+x^2+x^3=y^3$

a) 1đ	
Ta có $(x+2)^3-(1+x+x^2+x^3)=5x^2+11x+7$	0.25
$=5(x+\frac{11}{10})^2+\frac{19}{20}>0$	0.5
Suy ra $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$	0.25
b) 1,5đ	
Ta nhận thấy $1+x+x^2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ với mọi x	0.25
Nên $x^3<1+x+x^2+x^3=y^3$	0.25
Theo câu a): $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$	
Suy ra: $x^3<y^3<(x+2)^3$	0.25
$\Rightarrow y^3=(x+1)^3$	0.25
Tức là: $1+x+x^2+x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0$	0.25
Với x = -1 thì y = 0; với x = 0 thì y = 1. Vậy phương trình có các nghiệm nguyên: (-1;0) và (0;1)	0.25

Câu 3: (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \dfrac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

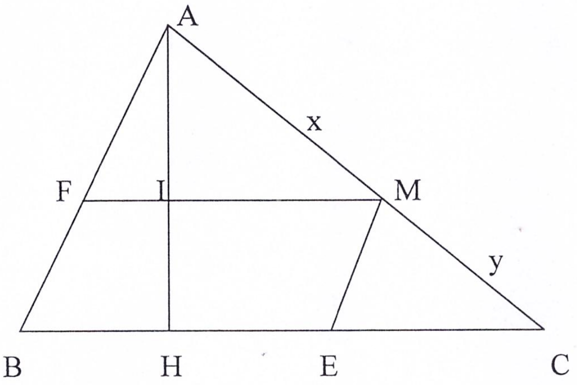
a) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

a) 1,5đ	
Ta có: $\dfrac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{3(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)} = \dfrac{3}{x^2+1}$	0.25
Muốn A nhận giá trị nguyên thì $x^2 + 1$ phải là ước của 3. Mà ước của 3 là: $\pm 1; \pm 3$	0.25
- Nếu $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ thì $A = 3$	0.25
- Nếu $x^2 + 1 = -1$: không có giá trị nào của x thoả mãn	0.25
- Nếu $x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ thì $A = 1$ - Nếu $x^2 + 1 = -3$: không có giá trị nào của x thoả mãn	0.25
Vậy tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là: $\{-\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}\}$	0.25
b)1đ	
$A = \dfrac{3}{x^2+1}$ nhận giá trị lớn nhất khi $x^2 + 1$ nhận giá trị nhỏ nhất.	0.25
Mà $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi x	0.25
Tức $x^2 + 1 = 1$ là nhỏ nhất. Khi đó $A = 3$	0.25
$x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$. Vậy khi $x = 0$ thì A đạt giá trị lớn nhất là 3.	0.25

Câu 3: (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC. Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F. Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành BEMF có diện tích lớn nhất.

 Ta có tứ giác BEMF là hình bình hành. Kẻ $AH \perp BC$, AH cắt MF tại I, $AI \perp MF$. Gọi S' là diện tích hình bình hành BEMF và S là diện tích tam giác ABC	0.25

$S' = IH.MF$ và $S = \frac{1}{2}BC.AH$	0.25
Ta có $\frac{S'}{S} = \frac{IH.MF}{\frac{1}{2}BC.AH} = 2\frac{MF}{BC}.\frac{IH}{AH}$ (1)	0.25
Đặt AM = x và MC = y Vì MF // BC nên ta có: $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{x+y}$; $\frac{IH}{AH} = \frac{MC}{AC} = \frac{y}{x+y}$	0.25
Thay vào (1) ta có: $\frac{S'}{S} = 2.\frac{x}{x+y}.\frac{y}{x+y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$	0.25
Vì x, y là 2 số không âm nên ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$	0.25
$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{2xy}{4xy} = \frac{1}{2}$	0.25
$\Rightarrow \frac{S'}{S} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S' \leq \frac{1}{2}S$	0.25
$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}S$ là lớn nhất.	0.25
Dấu "=" xảy ra khi x = y, tức là khi M là trung điểm của cạnh AC thì diện tích hình bình hành BEMF đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}S$ không đổi.	0.25