

CD3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

Dạng 1. So sánh hai lũy thừa

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021-2022)

Cho hai số $a = 2^{333}$ và $b = 3^{222}$. Khẳng định nào đúng

- A. $a = b$ B. $a > b$ C. $a < b$ D. $3a = 2b$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần $2^{100}; 3^{75}; 5^{50}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

So sánh: 222^{333} và 333^{222}

Câu 4. (HSG 7 huyện, trường 2022 - 2023)

So sánh hai số: 3^{30} và 5^{20}

Câu 5. (HSG 7 huyện, 2017 - 2018)

So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Câu 6. (HSG 7 huyện)

So sánh hai A và B, biết: $A = 3^{21}; B = 2^{31}$

Câu 7. (HSG 7 huyện)

So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$

Câu 8. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018)

So sánh hai số 3^{50} và 5^{20} .

Câu 9. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018; trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

So sánh hợp lý:

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{200}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) $(-32)^{27}$ và $(-18)^{39}$

Câu 10. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là

- A. $N < \frac{3}{16}$ B. $N > \frac{3}{16}$ C. $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$ D. $N > \frac{3}{4}$

Câu 2. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3 2022 - 2023)

Cho biểu thức $a = (-2)^{2020}$; $b = -3 \cdot (-2)^{2021}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a < -b$ D. $-a > b$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Ninh Giang (Đợt 1), tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Câu 4. (HSG 7 thành phố Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1.$$

Chứng minh rằng

Câu 5. (HSG 7 thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Câu 7. (HSG 7 thị xã Điện Bàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$. Hãy so sánh P với 1.

Câu 8. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, trường TH và THCS Kỳ Đồng 2022 - 2023)

Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$. So sánh B với 50

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Hưng 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}$. So sánh A và $\frac{3}{4}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thái Tông 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}; N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$. Hãy so sánh M và N .

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bình Lăng 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Thai Hưng 2022 - 2023)

$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}} < \frac{1}{2}$
Chứng minh rằng:

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kính Ân 2022 - 2023)

$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$. Chứng minh: $B < \frac{1}{2}$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Diệp Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots;$
 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Câu 20. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$.

Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Ninh, trường 2021 - 2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Câu 22. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Câu 23. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Câu 25. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Câu 26. (HSG 7 Huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2}$

Câu 27. (HSG 7 trường Hương Điền 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Câu 28. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Câu 29. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

So sánh các số sau: $A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1}$ và $B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$

Câu 30. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Câu 31. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Câu 32. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Câu 33. (HSG 7 huyện Tri Thức, tỉnh Đồng Nai, 2022 - 2023)

Chứng minh:
$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Tiêu Du, tỉnh Bắc Ninh, 2022 - 2023)

1. Cho
$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$
. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

2. Cho
$$A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$$
. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Cho
$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$$
. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

a) Chứng minh rằng:
$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

b) Chứng minh rằng
$$\frac{2n \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot (n + 1)}{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Cho
$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n - 1}{(n - 1)^2 \cdot n^2}$$
 (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh $B < 1$

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lê Nam Đê 2022 - 2023)

Chứng minh rằng:
$$A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Phương 2022 - 2023)

Cho
$$S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; S_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2 S_2^2} + \frac{1}{5^3 S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^n S_n^2} < \frac{1}{4}$$

Câu 40. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường2022 - 2023)

Chứng minh rằng
$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$
.

Câu 41. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho
$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$$
. Chứng minh rằng $A < \frac{25}{36}$.

Dạng 3: Một số bài toán khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 21x^2y + xy^2$ với x, y thỏa mãn: $(x - 2)^2 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$

Câu 2. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng $2C + 3 = 3^n$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Cho $a; b; x; y$ thỏa mãn $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ ($a \neq 0; b \neq 0; a + b \neq 0$)

Chứng minh rằng:
$$\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn:
$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a biết $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2.

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)

Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$

Câu 7. (HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Câu 8. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Tìm số tự nhiên n để: $2C + 1 = 3^{2023}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>