

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Trên bản thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): 6x + 5y + z + 2 = 0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và song song với (P) . Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax + by + cz - 12 = 0$. Tính $a + b + c$



Lời giải

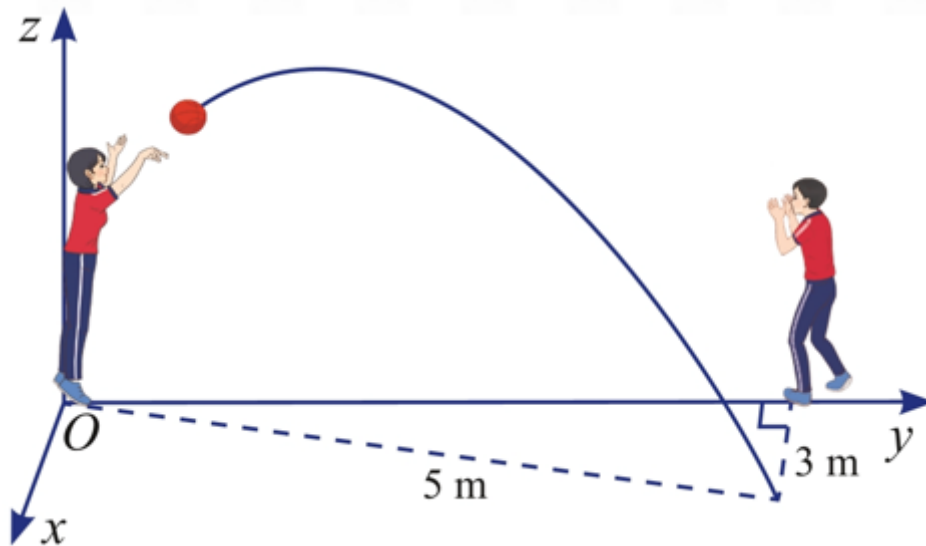
Trả lời: 12

Vì $(Q) \parallel (P)$ nên (Q) có vector pháp tuyến là $n = (6; 5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là $6(x - 1) + 5(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x + 5y + z - 12 = 0$.

Vậy $a + b + c = 12$

Câu 2. Hai học sinh đang chuyền bóng. Bạn nữ ném bóng cho bạn nam. Quả bóng bay trên không, lệch sang phải và rơi xuống tại vị trí cách bạn nam $3m$, cách bạn nữ $5m$ (Hình). Cho biết quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt đất. Phương trình của (P) trong không gian $Oxyz$ được mô tả như trong hình vẽ có dạng $ax + 3y = 0$. Tìm a



Lời giải

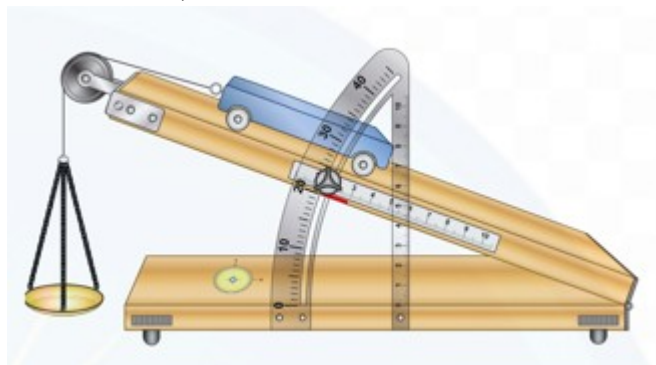
Trả lời: -4

Gọi M là điểm mà quả bóng rơi trên mặt đất.

Khi đó $M(3; 4; 0)$. Mặt phẳng (P) có cặp vector chỉ phương là $k = (0; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OM} = (3; 4; 0)$ nên mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n = (-4; 3; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-4x + 3y = 0$.

Câu 3. Để làm thí nghiệm về chuyển động trong mặt phẳng nghiêng, người làm thí nghiệm đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng nghiêng $(P): 4x + 11z + 5 = 0$ và mặt sàn $(Q): z - 1 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Lời giải

Trả lời: 20

(P) và (Q) có vector pháp tuyến lần lượt là $n = (4; 0; 11)$, $n' = (0; 0; 1)$.

Ta có $\cos((P), (Q)) = \frac{|4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 11 \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 11^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{137}}$. Suy ra $((P), (Q)) \approx 20^\circ$.

Câu 4. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 2,3

Lấy $A(2; 1; 3) \in (P)$. Do (P) song song với (Q) nên Ta có

$$d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3} \approx 2,3$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): 6x + 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + 8 = 0$

Lời giải

Trả lời: 7

$\frac{6}{1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} \neq \frac{-1}{8} \Rightarrow$
 Vì $(P) \not\parallel (Q)$ nên $d((P); (Q)) = d(M; (Q))$ với $M(0; 1; -1) \in (P)$

$$d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{\left| x_M + \frac{1}{2}y_M + \frac{1}{3}z_M + 8 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left| 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 8 \right|}{\sqrt{\frac{49}{36}}} = 7$$

Câu 6. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha): x - 2y - 2z + 4 = 0$ và $(\beta): -x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $M(0;1;1) \in (\alpha)$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ là:

$$h = d(M, (\beta)) = \frac{|-0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$$

Câu 7. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

Lời giải

Trả lời: 6

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$1 \cdot m - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow m = 6$$

Câu 8. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$; $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q) ; phương trình của $(R): m(x - 2y - z + 3) + (2x + y + z - 1) = 0$. Khi đó giá trị của m là

Lời giải

Trả lời: -3

Vì $(R): m(x - 2y - z + 3) + (2x + y + z - 1) = 0$ đi qua điểm $M(1;1;1)$ nên ta có:

$$m(1 - 2 \cdot 1 - 1 + 3) + (2 \cdot 1 + 1 + 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x + y + 4z - 2024 = 0$ và $(Q): x + 3y - 4z - 2025 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 67

Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có vector pháp tuyến là $n_1 = (3; 1; 4)$ và $n_2 = (1; 3; -4)$.

Ta có:
$$\cos((P), (Q)) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{13}$$

Suy ra $((P), (Q)) \approx 67^\circ$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(5;3;6)$, $B(1;1;4)$, $C(2;1;2)$ và $D(0;0;4)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (1;0;-2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;-1;0)$ nên $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-2;2;-1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) . Vậy phương trình mặt phẳng (BCD) là: $-2x + 2y - z + 4 = 0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm $A(5;3;6)$ đến mặt phẳng (BCD) bằng: $\frac{|-2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 6 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2$.

Câu 11. Khi gắn hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có toạ độ $(2;0;4)$, $(4;0;3)$ và $(4;9;3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 27

Mặt phẳng (ABC) và (Oxy) có vector pháp tuyến lần lượt là: $n_1 = (1;0;2)$, $n_2 = (0;0;1)$. Từ đó, góc có α giữa mái nhà bên phải và nền nhà có $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Suy ra $\alpha \approx 27^\circ$.

Câu 12. Khi gắn hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3;-2;3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8;8;0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 15

Đường thẳng AB có vector chỉ phương là $u = (5;10;-3)$, mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến là $n = (0;0;1)$. Từ đó, góc α giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) có $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{134}}$. Suy ra $\alpha \approx 15^\circ$.

Câu 13. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3;4;33)$, $D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà là: $z - 33 = 0$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà bằng: $\frac{|35 - 33|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 2$.

Vậy độ dày của mái nhà đó là 2 dm .

Câu 14. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) , biết (P_1) và (P_2) có hai vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (\sqrt{3}; 0; -1)$, $n_2 = (1; 0; -\sqrt{3})$.

Lời giải

Trả lời: 30

Ta có:
$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $((P_1), (P_2)) = 30^\circ$.

Câu 15. Tính góc giữa hai mặt phẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):
 $(P_1): 5x + 12y - 13z + 14 = 0$ và $(P_2): 3x + 4y + 5z - 6 = 0$.

Lời giải

Trả lời: 89

Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (5; 12; -13)$, $n_2 = (3; 4; 5)$.

Ta có:
$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + (-13) \cdot 5|}{\sqrt{5^2 + 12^2 + (-13)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{1}{65}$$

Suy ra $((P_1), (P_2)) \approx 89^\circ$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, sàn của một căn phòng thuộc mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 1 = 0$ và trần của căn phòng đó thuộc mặt phẳng $(\beta): x + 2y + 2z - 3 = 0$. Tính khoảng cách giữa mặt sàn và trần căn phòng? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67

Phương trình mặt phẳng chứa mặt sàn căn phòng là: $x + 2y + 2z - 1 = 0$.

Phương trình mặt phẳng chứa trần căn phòng là: $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Lấy điểm $M(3; 0; 0)$ thuộc mặt phẳng trần căn phòng.

Khoảng cách giữa mặt sàn và trần căn phòng là:
$$d = \frac{|3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt sàn nằm ngang của một ngôi nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , một mái của ngôi nhà thuộc mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Hỏi mái nhà có độ dốc bằng bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 54,7

Mặt phẳng nằm ngang (Oxy) có một vector pháp tuyến là $k = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $n = (1; 1; 1)$.

$$\cos((Oxy), (\alpha)) = \cos(k, n) = \frac{|k \cdot n|}{|k| \cdot |n|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ((Oxy), (\alpha)) \approx 54,7^\circ$$

Ta có:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, tại một phạm vi hẹp, (Oxy) là mặt phẳng nằm ngang. Một đường ống nước thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(1; 2; 1)$. Hỏi đường ống nước nói trên nghiêng bao nhiêu độ (so với mặt phẳng nằm ngang)?

Lời giải

Trả lời: 45

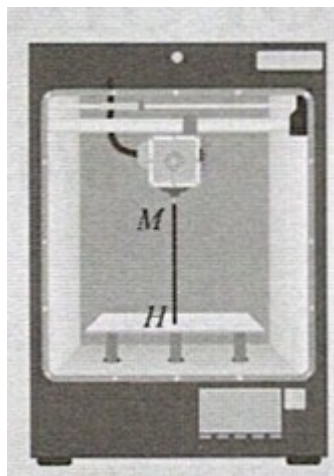
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 1; -1)$, mặt phẳng nằm ngang (Oxy) có một vector pháp tuyến là $k = (0; 0; 1)$.

$$\sin(AB, (Oxy)) = \cos(\overrightarrow{AB}, k) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot k|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |k|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (AB, (Oxy)) = 45^\circ$$

Ta có:

Vậy ống nước nghiêng 45° so với mặt phẳng nằm ngang.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục tọa độ là centimét), đầu in phun của một máy in 3D đang đặt tại điểm $M(5; 0; 35)$. Tính khoảng cách từ đầu in phun đến khay đặt vật in có phương trình $z - 5 = 0$.



Lời giải

Trả lời: 30

Ta có phương trình của mặt phẳng (P) chứa khay đặt vật in là $z - 5 = 0$, suy ra:
 $d(M, (P)) = |35 - 5| = 30(\text{cm})$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 8 = 0$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Tính giá trị của $a + b + c$.

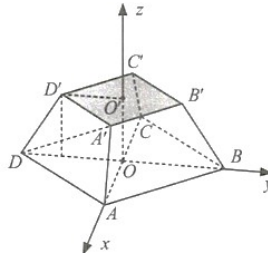
Lời giải

Trả lời: 2

I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.

M là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow M(0;3;-1)$. Suy ra $a+b+c=2$.

Câu 21. Một vật trang trí có dạng khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 3 cm, $AB=8\sqrt{2}$ cm, $A'B'=6\sqrt{2}$ cm (Hình).



Gọi O là giao điểm của AC và BD , O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Với hệ trục tọa độ như Hình, mặt phẳng $(CDD'C')$ cắt tia Oz tại điểm $M(0;0;m)$. Tìm giá trị của m .

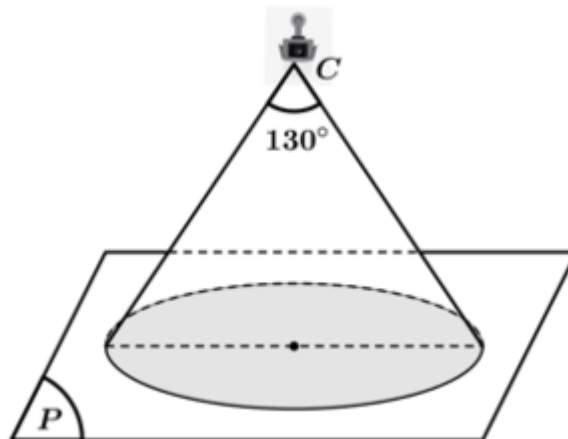
Lời giải

Trả lời: 12

$C(-8;0;0), D(0;-8;0), D'(0;-6;3)$.

$(CDD'C'): 3x+3y-2z+24=0$. Suy ra $m=12$.

Câu 22. Góc quan sát ngang của một camera là 130° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(1;2;2)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): x+2y-2z+5=0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có diện tích bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Trả lời: 57,8

Khoảng cách từ điểm C tới mặt phẳng (P) là $d(C;(P))=CH=\frac{|1+4-4+5|}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=2$

Vùng quan sát là diện tích hình tròn tâm H bán kính HA và vùng quan sát có diện tích $\pi \cdot (CH \cdot \tan 65^\circ)^2 \approx 57,8$

Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 4; 1); B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$?

Lời giải

Trả lời: 5

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vtcp $\vec{n} = (1; -3; 2)$ của (P) làm vtcp

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên (Q) nhận $\vec{AB} = (-3; -3; 2)$ làm vtcp

(Q) nhận $\vec{n}_Q = [\vec{n}, \vec{AB}] = (0; 8; 12)$ làm vtcp

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 0(x+1) + 8(y-1) + 12(z-3) = 0$, hay $(Q): 2y + 3z - 11 = 0$

Vậy $a + b + c = 5$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1), B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: -4

$\vec{AB} = (-6; 3; 1)$

$\vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1)$ là VTPT của mp (Q) .

Mp (P) chứa hai điểm $A(3; 2; 1), B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

$\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{AB}, \vec{n}_{(Q)}] = (2; 9; -15)$ là VTPT của mp (P)

$A(3; 2; 1) \in (P)$

$\Rightarrow (P): 2x + 9y - 15z - 9 = 0$ hoặc $(P): -2x - 9y + 15z + 9 = 0$

Mặt khác $(P): ax + by + cz - 9 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 9; c = -15$.

Vậy $S = a + b + c = 2 + 9 + (-15) = -4$.

Câu 25. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 1)$. Gọi các điểm A, B, C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó hoành độ điểm A là?

Lời giải

Trả lời: 3

Giả sử $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. Khi đó mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (2-a; 1; 1); \overrightarrow{BH} = (2; 1-b; 1) \\ \overrightarrow{BC} &= (0; -b; c); \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H \in (ABC) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ -b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 6 \end{cases}$$

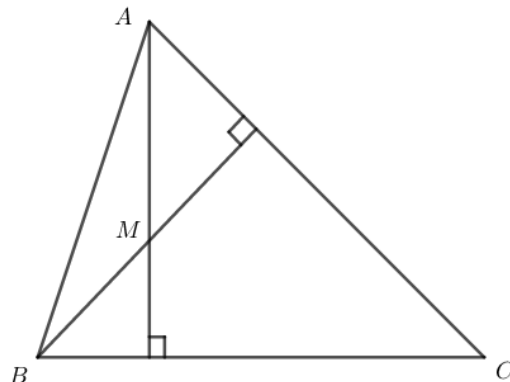
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

Vậy $A(3;0;0)$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by + cz - 14 = 0$. Tính tổng $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 6



Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$, $m, n, p \neq 0$. Ta có phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Mà $M \in (\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{m} + \frac{2}{n} + \frac{3}{p} = 1$ (1)

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1-m; 2; 3)$, $\overrightarrow{BM} = (1; 2-n; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -n; p)$, $\overrightarrow{AC} = (-m; 0; p)$.

M là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p - 2n = 0 \\ 3p - m = 0 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $m=14; n=7; p=\frac{14}{3}$.

Suy ra (α) có phương trình $\frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Vậy $T=a+b+c=1+2+3=6$.

Câu 27. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 40,5

$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ $a, b, c > 0$

Giả sử với

(P) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt phẳng có phương trình (theo đoạn chắn):

(P) $M(9;1;1)$ $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Vì mặt phẳng đi qua điểm nên

$$1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt{\frac{9}{a.b.c}} \Rightarrow a.b.c \geq 243$$

Ta có

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} a.b.c \geq \frac{243}{6} = \frac{81}{2}.$$

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{81}{2}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C mà $OA=OB=OC \neq 0$ là

Lời giải

Trả lời: 4

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $abc \neq 0 \Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mà $OA=OB=OC \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |b|=|a| \\ |c|=|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm a \\ c=\pm a \end{cases}$

Trường hợp 1: $b=a; c=a$

$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ $M(1;2;5) \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a=8$
mà

Trường hợp 2: $b=a; c=-a$

$$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1 \quad M(1; 2; 5) \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = -2$$

mà

Trường hợp 3: $b = -a; c = a$

$$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \quad M(1; 2; 5) \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = -4$$

mà

Trường hợp 4: $b = -a; c = -a$

$$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} - \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1 \quad M(1; 2; 5) \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = -6$$

mà

Vậy có 4 mặt phẳng (α)

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2; 1; 3)$, $A(0; 0; 4)$ và cắt hai trục Ox , Oy lần lượt tại B , C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $B(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy .

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{4} = 1$.

Vì $M(2; 1; 3)$ thuộc (P) nên ta có $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4a + 8b = ab$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| = \frac{1}{2} |ab| = 1 \Leftrightarrow |ab| = 2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 8b = ab \\ ab = 2 \end{cases}, (I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 2 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 1 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 - 4b \\ (1 - 4b)b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 - 4b \\ 4b^2 - b + 4 = 0, (vn) \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 8b = ab \\ ab = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = -2 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -1 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 - 4b \\ (-1 - 4b)b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 - 4b \\ 4b^2 + b - 4 = 0 \end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 30. (THPT Thực Hành - TPHCM - 2018) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1; -3; 8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox , Oy . Giả sử

$(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c, d là các số nguyên). Tính $S = \frac{a+b+c}{d}$.

Lời giải

Trả lời: - 1,25

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(m; 0; 0), B(0; n; 0), C(0; 0; p)$ (với $m, n, p > 0$)

Theo giả thiết có $OC = 2OA = 2OB \Rightarrow p = 2m = 2n$ (1)

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Do mặt phẳng (α) đi qua $M(1; -3; 8)$ nên $\frac{1}{m} - \frac{3}{n} + \frac{8}{p} = 1$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $\frac{1}{m} - \frac{3}{m} + \frac{8}{2m} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow m = n = 2, p = 4$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 4 = 0$

Từ đó suy ra $a = 2t, b = 2t, c = t, d = -4t$ ($t \neq 0$)

$$\text{Vậy } S = \frac{a+b+c}{d} = -\frac{5}{4}.$$

Câu 31. (THPT Nghĩa Hưng ND-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + y - z + d = 0$. Tính $a + d$

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; -2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 6; -6)$$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$$x + y - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0. \text{ Vậy } a = 1, d = 1.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Tìm giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \quad (1)$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) : $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2)$

Đề $AB = d(A, (P)) \Rightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 33. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$.

Lời giải.

Trả lời: 4

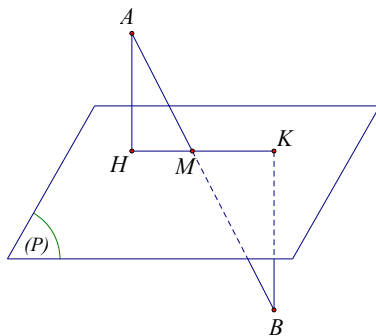
Vì $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\vec{BI} = -2\vec{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5 = -2(a - 1) \\ b + 4 = -2(b - 2) \\ c + 1 = -2(c - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4$$

Câu 34. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 12z + 5 = 0$ và điểm $A(2; 4; -1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M . Gọi B là điểm sao cho $\vec{AB} = 3\vec{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P) .

Lời giải

Trả lời: 6



Ta có: $\vec{AB} = 3\vec{AM} \Rightarrow BM = 2AM \Rightarrow \frac{d(B, (P))}{d(A, (P))} = \frac{BM}{AM} = 2$

$$\Rightarrow d(B, (P)) = 2d(A, (P)) = 2 \cdot \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 12 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Câu 35. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 46 = 0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: - 6

Ta có $AB = 3 < d(B, (P))$ suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P) .

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B xuống mặt phẳng (P) .

Ta có $6 = AH + BK \geq AK \geq AH = 6$. Do đó A, B, H, K thẳng hàng.

Từ đó suy ra $AB \perp (P)$ và B là trung điểm của AH nên $H(5; 6; -1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng

$$(P): 2(x - 5) + 2(y - 6) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 23 = 0 \Leftrightarrow -4x - 4y + 2z + 46 = 0$$

Vậy $a + b + c = -6$.

Câu 36. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 45

(P) qua O và nhận $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 2)$ làm VTPT

$(Q): x + y - 11 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 0)$

$$\cos(\overrightarrow{(P)}, (Q)) = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{OH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{(P)}, (Q)) = 45^\circ$$

Ta có

Câu 37. (THPT Quang Trung Đống Đa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tổng tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Trả lời: 5

Mặt phẳng $(P), (Q)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_P = (1; -2; 2)$, $\vec{n}_Q = (1; 0; 2m - 1)$

Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} &= \left| \cos(\vec{n}_p; \vec{n}_Q) \right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|1+2(2m-1)|}{3\sqrt{1+(2m-1)^2}} \\ &\Leftrightarrow 2(4m-1)^2 = 9(4m^2 - 4m + 2) \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=4 \end{cases}\end{aligned}$$

Câu 38. (THPT Ba Đình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,6

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc 60° nên $\cos((P), (Oyz)) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ (*).

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c = 2 - \sqrt{2} \approx 0,6$.

Câu 39. (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q): x - y + 2 = 0$. Trên (P) có tam giác ABC ; Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên (Q) . Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 2,8

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,8$$

Ta có:

Câu 40. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 8y - 6z + 2 = 0$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Xác định được m, n để (P) song song với (Q) . Tính $n+m$

Lời giải

Trả lời: 0

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(2; m; 3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(n; -8; -6)$

$$(P) // (Q) \Rightarrow \vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = kn \\ m = -8k \\ 3 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = 4 \\ n = 4 \end{cases}$$

Mặt phẳng

Câu 41. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $(Q): 4x + (2 - m)y + mz - 3 = 0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Trả lời: 2

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; -2)$.

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (4; 2 - m; m)$.

Ta có: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 + 2 - m - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Nên $m = 2$.

Câu 42. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax - y + 2z + b = 0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - y - z + 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 1 = 0$. Tính $a + 4b$.

Lời giải

Trả lời: -16

Trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ ta lấy lần lượt 2 điểm A, B như sau:

Lấy $A(x; y; 1) \in \Delta$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow A(0; 0; 1)$$

Lấy $B(-1; y; z) \in \Delta$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 2; -2)$$

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $A, B \in (\alpha)$. Do đó ta có:
$$\begin{cases} 2 + b = 0 \\ -a + b - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy $a + 4b = -8 + 2 \cdot (-2) = -16$.

Câu 43. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x + y + z + 3 = 0$, cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a; b; c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a + b + c < -2$?

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có mặt phẳng cần tìm là $(P): x + y + z + d = 0$ với $d \neq 3$.

Mặt phẳng (P) cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|6+d|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -15 \end{cases}$ đôi chiều điều kiện suy ra $d = -15$. Khi đó $(P): x + y + z - 15 = 0$.

Theo giả thiết $X(a; b; c) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c = 15 > -2$ không thỏa mãn $a + b + c < -2$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng (P) .

Câu 44. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$. Tính $m + n$.

Lời giải

Trả lời: 3

$(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(m; 2; n)$.

$(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(1; -m; n)$.

$(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha(4; -1; -6)$.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases} (P_m) \perp (\alpha) \\ (Q_m) \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{n}_2 \perp \vec{n}_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 2 - 6n = 0 \\ 4 + m - 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 3$.

Câu 45. Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, người ta đưa ra một cách kiểm tra bốn nút lưới (đỉnh hình lập phương) bất kì có đồng phẳng hay không bằng cách gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và lập phương trình mặt phẳng đi qua ba nút lưới trong bốn nút lưới đã cho. Giả sử có ba nút lưới mà tọa độ lần lượt là $(1; 1; 10), (4; 3; 1), (3; 2; 5)$ và mặt phẳng đi qua ba nút lưới đó có phương trình $x + my + nz + p = 0$. Giá trị của $m + n + p$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: - 10

Xét ba điểm $A(1; 1; 10), B(4; 3; 1), C(3; 2; 5)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (3; 2; -9)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -5)$.

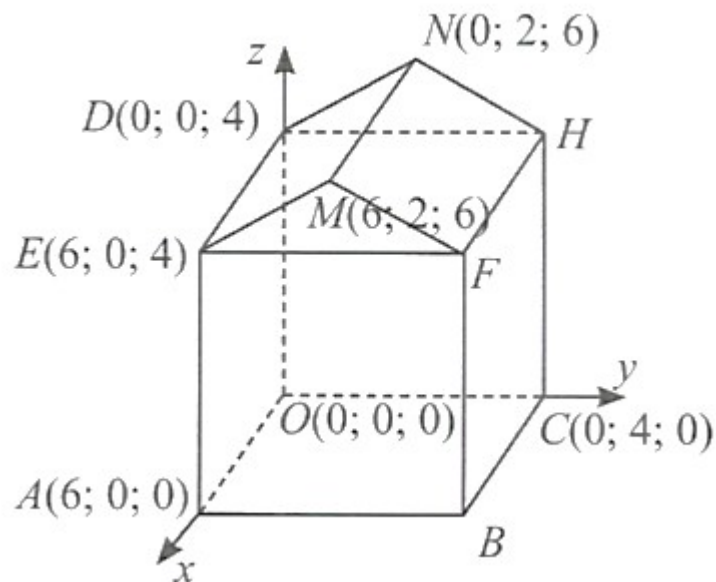
Suy ra
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -9 & 3 \\ 1 & -5 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1; -3; -1)$$

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -3; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) nên phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$(-1)(x-1) + (-3)(y-1) + (-1)(z-10) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + z - 14 = 0$$

Suy ra $m=3, n=1, p=-14$. Vậy $m+n+p=-10$.

Câu 46. Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như Hình nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.



Khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tìm a

Lời giải

Trả lời: 4

Mặt phẳng $(DEMN)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{DE} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{DN} = (0; 2; 2)$. Ta có $[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DN}] = (0; -12; 12)$, suy ra $(DEMN)$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = -\frac{1}{12}[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DN}] = (0; 1; -1)$.

Phương trình của mặt phẳng $(DEMN)$ là $y - z + 4 = 0$.

Ta có $B(6; 4; 0)$, suy ra
$$d(B, (DEMN)) = \frac{|4 + 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5; 4; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz các đoạn bằng nhau có phương trình là $x + ay + bz + c = 0$. Tìm giá trị của c .

Lời giải

Trả lời: - 12

Gọi $A(m; 0; 0), B(0; m; 0), C(0; 0; m)$ với $m > 0$ là giao điểm của mặt phẳng (α) và các tia Ox, Oy, Oz .

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B, C là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m} = 1$.

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(5; 4; 3)$, suy ra $m = 12$.

Ta có $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 12 = 0$. Suy ra $c = -12$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1), B(1; 1; 2), C(1; -1; 0), D(0; 0; 1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$ là $ax + y - z + m = 0$. Tìm giá trị của $a - m$.

Lời giải

Trả lời: 1

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right)$$

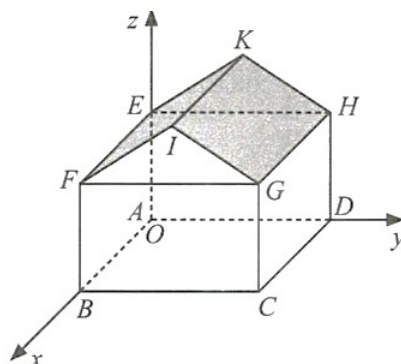
Ta có $\overrightarrow{BC} = (0; -2; -2), \overrightarrow{BD} = (-1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua M và có vector pháp tuyến $n = (0; 1; -1)$ nên có phương trình là

$$0 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot (z - 0) = 0 \quad \text{hay} \quad (P): y - z - 1 = 0$$

Suy ra $a - m = 1$.

Câu 49. Hình minh họa một nhà kho trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai mái $EFIK, HGIK$ có kích thước bằng nhau. Biết rằng chiều cao của nhà kho là 9m và các bức tường của nhà kho tạo thành hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 10m, AC = 24m, AE = 7m$. Mặt phẳng $(EFIK)$ có phương trình $ax + y + bz + c = 0$.



Tìm giá trị của $a - bc$

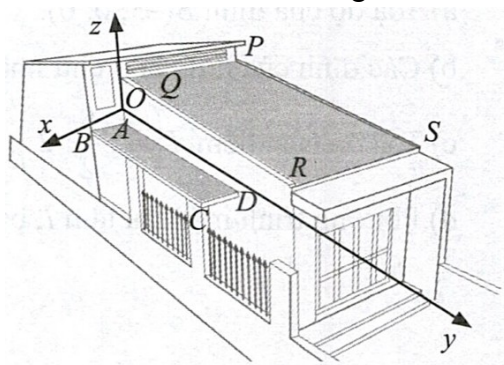
Lời giải

Trả lời: 252

$$E(0; 0; 7), F(10; 0; 7), I(10; 12; 9)$$

($EFIK$): $y - 6z + 42 = 0$. Suy ra $a - bc = 252$.

Câu 50. Hình vẽ minh họa mái hiên $ABCD$ song song với mái nhà $PQRS$ trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (mái hiên và mái nhà đều phẳng) có $Q(-10; 0; 200), P(-490; 0; 200), R(0; 1600; 0), A(0; 0; -65)$. Mặt phẳng $(ABCD)$ có phương trình $y + az + 65a = 0$. Tìm giá trị của a .

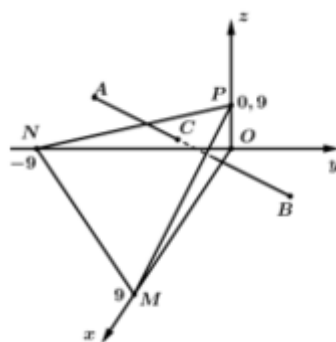


Lời giải

Trả lời: 8

($ABCD$): $y + 8z + 520 = 0$. Suy ra $a = 8$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 5; 0,5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3; 7; 5; 0)$ trên đường băng. Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9; 0; 0), P(0; 0; 9), N(0; -9; 0)$. Độ cao của máy bay khi xuyên qua đám mây để hạ cánh là bao nhiêu km?



Lời giải

Giả sử điểm $C(x_c; y_c; z_c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (\alpha)$. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta thấy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$\frac{x}{9} - \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow x - y + z = 9$$

. Suy ra $x_c - y_c + z_c = 9$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ là hai vector cùng hướng nên tồn tại số thực $t > 0$ sao cho $\overrightarrow{AC} = t \overrightarrow{AB}$.

$$\text{Do } \overrightarrow{AC} = (x_C - 3; y_C + 2,5; z_C - 0,5); \overrightarrow{AB} = (3 - 3; 7,5 + 2,5; 0 - 0,5) = (0; 10; -0,5) \text{ nên } \begin{cases} x_C - 3 = 0t \\ y_C + 2,5 = 10t \\ z_C - 0,5 = -0,5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 10t - 2,5 \\ z_C = -0,5t + 0,5 \end{cases}$$

Vì $C \in (\alpha)$ nên $3 - (10t - 2,5) + 10(-0,5t + 0,5) = 9 \Leftrightarrow t = 0,1$. Suy ra $C(3; -1,5; 0,45)$.

Vậy tại vị trí C , độ cao máy bay là $0,45 \text{ km}$.

Câu 52. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau $2m$, người ta thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài $4m; 4,4m; 4,8m$. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Viết kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Lời giải

Trả lời: 21,8

Gọi 3 điểm cách nhau $2m$ trên mặt nước là A, B, C .

Vị trí thả rơi xuống đáy bể lần lượt là A', B', C' sao cho $AA' = 4m, BB' = 4,4m, CC' = 4,8m$.

Chọn gốc tọa độ O tại trung điểm AB .

Khi đó, $A(0; 1; 0); B(0; -1; 0); C(\sqrt{3}; 0; 0); A'(0; 1; 4); B'(0; -1; 4,4); C'(\sqrt{3}; 0; 4,8)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB'} = (0; -2; -0,4); \overrightarrow{BC'} = (\sqrt{3}; 1; 0,4)$$

Mặt phẳng $A'B'C'$ nhận $\begin{bmatrix} \overrightarrow{AB'} & \overrightarrow{BC'} \end{bmatrix}$ làm một vectơ pháp tuyến.

$$\text{Ta có: } \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB'} & \overrightarrow{BC'} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -6; \frac{2\sqrt{3}}{5}; 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Mặt phẳng đáy bể là $mp(A'B'C')$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6; \frac{2\sqrt{3}}{5}; 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Mặt phẳng ngang (mặt nước) là $mp(Oxy)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

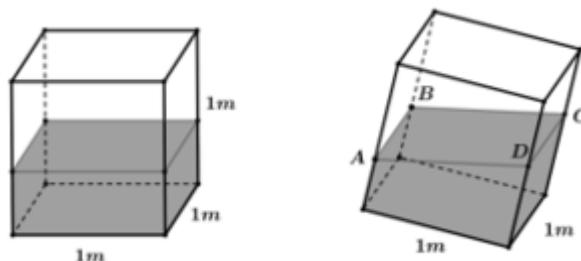
Nên góc giữa hai mặt phẳng đáy bể và mặt phẳng ngang là: $\cos((A'B'C'); (Oxy))$

$$= \frac{\left| \frac{-6}{5} \cdot 0 + \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

Suy ra $((A'B'C'); (Oxy)) \approx 21,8^\circ$.

Vậy đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc khoảng $21,8^\circ$.

Câu 53. Trong một bể hình lập phương cạnh $1m$ có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là $40cm, 44cm, 48cm$.

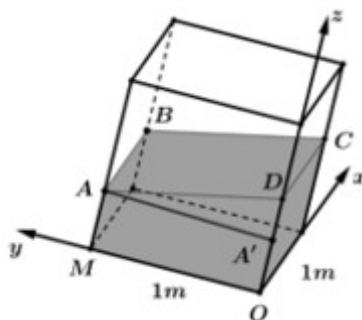


Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Viết kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Lời giải

Trả lời: 3,2

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó, $A(0; 1; 0, 4); B(1; 1; 0, 44); C(1; 0; 0, 48); D(0; 0; z)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(1; 0; 0, 04); \overrightarrow{DC}(1; 0; 0, 48 - z)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow 0, 48 - z = 0, 04 \Rightarrow z = 0, 44$

Do đó, $D(0; 0; 0, 44)$.

Đáy bể nằm trong mặt phẳng có phương trình là $z = 0$

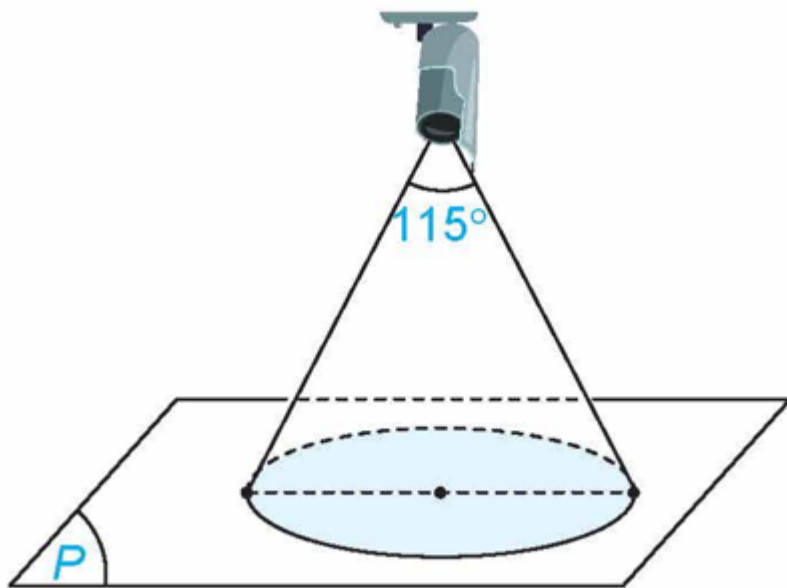
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0, 04); \overrightarrow{AC} = (1; -1; 0, 08)$

Suy ra $\overrightarrow{n_{(ABC)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (0, 04; -0, 04; -1)$

Do đó $\cos(ABCD; (Oxy)) = \frac{|-1|}{1 \cdot \sqrt{0, 04^2 + (-0, 04)^2 + (-1)^2}} = \frac{25}{\sqrt{627}}$

Suy ra $((ABCD); (Oxy)) \approx 3, 2^\circ$

Câu 54. Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(1; 2; 4)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)



Lời giải

Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) là $\frac{|1+4+8+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{16}{3}$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ C đến (P) . Khi đó, bán kính hình tròn là $R = CH \cdot \tan \frac{115^\circ}{2} = \frac{16}{3} \cdot \tan \frac{115^\circ}{2} \approx 8,4$ (đơn vị độ dài).

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A(0; 0; 0), B(6; 0; 0)$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng $D(0; x; 0)$ với $x > 0$ thỏa mãn $AD = 2AB = 2BC$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải

Trả lời: 3

Ta xác định được $D(0; 12; 0), C(6; 6; 0)$.

Vì góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° nên $AC = AS = 6\sqrt{2}$.

Suy ra $S(0; 0; 6\sqrt{2})$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) là $x + y + \sqrt{2}z - 12 = 0$.

Vậy $d(B; (SCD)) = \frac{|6+0+\sqrt{2} \cdot 0 - 12|}{2} = 3$.

Câu 56. (Chuyên KHTN 2019) Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục

tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

Lời giải

Trả lời: -9

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x + by + cz + d = 0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O .

Vì (α) đi qua $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + b + c + d = 0 \\ -2b + 2c + d = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại $M(-d; 0; 0), N\left(0; -\frac{d}{b}; 0\right)$.

Vì M, N cách đều O nên $OM = ON$. Suy ra: $|d| = \left|\frac{d}{b}\right|$.

Nếu $d = 0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d| = \left|\frac{d}{b}\right| \Leftrightarrow b = \pm 1$.

• Với $b = 1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = -2 \\ 2c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ d = -6 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P) : $x + y + 4z - 6 = 0$

• Với $b = -1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q) : $x - y - 2z + 2 = 0$

Vậy: $b_1b_2 + c_1c_2 = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -9$.

Cách 2

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 1)$$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x + by + cz + d = 0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O

lần lượt tại M, N . Vì M, N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a; 0; 0), N(0; a; 0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (P) . Ta có $\overrightarrow{MN} = (-a; a; 0)$, chọn $\overrightarrow{u_1} = (-1; 1; 0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\overrightarrow{n_p} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{u_1} \end{bmatrix} = (-1; -1; -4)$,

suy ra $(P): x + y + 4z + d_1 = 0$

TH2: $M(-a; 0; 0), N(0; a; 0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (Q) . Ta có $\overrightarrow{MN} = (a; a; 0)$, chọn $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_2}] = (-1; 1; 2)$,

suy ra $(Q): x - y - 2z + d_2 = 0$

Vậy: $b_1 b_2 + c_1 c_2 = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -9$.