

DẠNG 2**Tích vô hướng và ứng dụng****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A. $3\sqrt{3}$. B. 11. C. $\sqrt{11}$. D. 27.
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(-2;3;-1)$; $\vec{b}(2;-1;3)$. Sin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. $-\frac{2}{7}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$. C. $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$. D. $\frac{2}{7}$.
- Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(4;2;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A. $\sqrt{22}$. B. 4. C. 2. D. 22.
- Câu 4.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u}(-\sqrt{3};0;1)$ là
- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 150° .
- Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$; $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài AM là
- A. $\sqrt{29}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.
- Câu 6.** Cho hai vec tơ $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (-2;1;2)$. Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (5;3;-2)$ và $\vec{b} = (m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.
- Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng:
- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là
- A. $3|a|$. B. $\frac{3|a|}{2}$. C. $2|a|$. D. $|a|$.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ và $B(m;m-1;-4)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để độ dài đoạn $AB = 3$.
- A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. B. $m = 1$ hoặc $m = 4$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 2$. D. $m = 3$ hoặc $m = 4$.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 3 = 0$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục Ox, Oz . Tính diện tích tam giác OMN .

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$.

B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$.

C. $m = 2 - \sqrt{6}$.

D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ Oxyz góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 150° .

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$; $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$.

B. $2|a|$.

C. $3|a|$.

D. $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 15. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; -1; 3)$, $B(3; 2; -4)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1; -3; -7)$.

B. $(1; 3; -7)$.

C. $(-1; 3; -7)$.

D. $(-1; -3; -7)$.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, tính bán kính đường tròn đó?

A. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ và đỉnh $D(a; b; c)$. Biết rằng hình thang có diện tích là $6\sqrt{2}$, tính $a + b + c$?

A. $a + b + c = 6$.

B. $a + b + c = 8$.

C. $a + b + c = 12$.

D. $a + b + c = 7$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1; 2; 5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{10}{6}$.

B. 450.

C. 10.

D. 45.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax - y + cz + d = 0$. Giá trị của biểu thức $T = a + c + d$ bằng

A. $T = 0$.

B. $T = 3$.

C. $T = -\frac{13}{4}$.

D. $T = -6$.

Câu 20. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 1; -2)$, $B(-1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B . Cao độ của điểm C bằng

- A. 1 hoặc $-\frac{2}{3}$. B. -1 hoặc $\frac{2}{3}$. C. -3 hoặc $\frac{1}{3}$. D. -1 hoặc $-\frac{1}{3}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm

$A(0; 2; 0), B(2; -6; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (S) thỏa mãn tích $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Tổng $a + b + c$ bằng

- A. -1 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 9$ và hai điểm

$A(-2; 0; -2\sqrt{2}), B(-4; -4; 0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho

$MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn C

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (3; -1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$$

Câu 2. Chọn D

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-4}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{4+1+9}} = -\frac{2}{7}; \sin(\vec{a}; \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}; \vec{b})} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Câu 3. Chọn A

$$\text{Với } A(1; 0; 1), B(4; 2; -2) \text{ ta được } AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{22}.$$

Vậy độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{22}$.

Câu 4. Chọn D

Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$, ta có :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

Câu 5. Chọn A

$$\text{Giả sử } M(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (a; b-3; c-1); \overrightarrow{BC} = (-3; 3; 3).$$

Ta có M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1 \\ b-3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ c-1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2).$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AM} = (-3; 4; 2) \Rightarrow AM = \sqrt{29}.$$

Câu 6. Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 11.$$

Câu 7. Chọn A

Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi

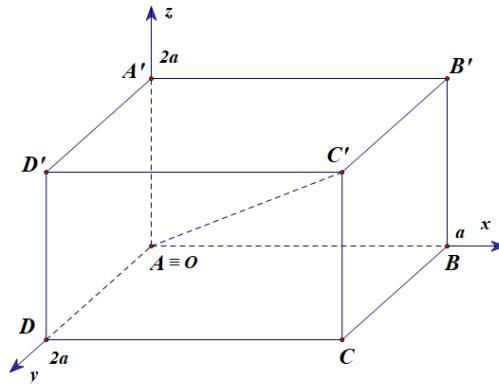
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 5m + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (m+3) < 0 \Leftrightarrow 3m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị m nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-1; 2; -1) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 9. Chọn A



Từ giả thiết ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (a; 2a; 2a)$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a) \Rightarrow AC' = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3|a|.$$

Câu 10. Chọn B

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow A(3; 1; -2)$$

$$AB = \sqrt{(m-3)^2 + (m-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2m^2 - 10m + 17}.$$

$$AB = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 - 10m + 17} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}.$$

Câu 11. Chọn A

Cách 1.

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 3 = 0$ cắt các trục Ox , Oz lần lượt tại $M = \left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$, $N = (0; 0; -3)$.

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{OM} = \left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right), \overrightarrow{ON} = (0; 0; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = \left(0; -\frac{9}{2}; 0\right).$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } OMN \text{ là } S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] \right| = \frac{9}{4}.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có } OM = \frac{3}{2}, ON = 3.$$

Vì hai điểm M , N lần lượt thuộc trục Ox , Oz nên tam giác OMN vuông tại O .

$$\text{Do đó, diện tích tam giác } OMN \text{ là: } S = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{9}{4}.$$

Câu 12. Chọn C

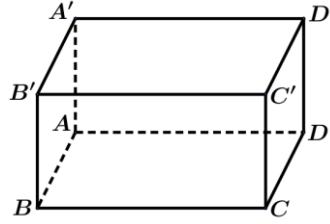
$$+ (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = 1-2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ 3m^2+3=1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Câu 13. Chọn D

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(\vec{u}, \vec{i}) = 150^\circ$.

Câu 14. Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 15. Chọn B

$\overrightarrow{AB} = (3 - 2; 2 - (-1); -4 - 3)$. Vậy $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -7)$.

Câu 16. Chọn D

- Trước tiên, ta xét bài toán phụ sau:

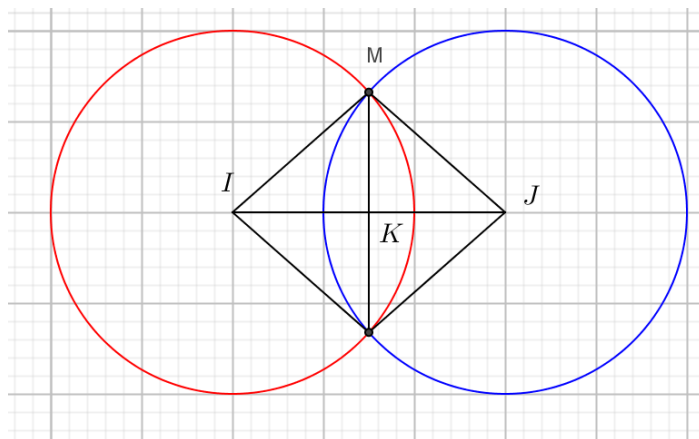
“Trong không gian cho đoạn thẳng AB bất kì, có trung điểm I . Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k > 0$ là một mặt cầu tâm I và bán kính $R = \sqrt{k + IA^2}$ ”.

Thật vậy:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k + IA^2 \text{ hay } IM = \sqrt{k + IA^2}.$$

Suy ra M thuộc mặt cầu tâm I , bán kính $R = \sqrt{k + IA^2}$.



- Áp dụng: Có $I(1; -2; 1)$ và $J(-1; 0; 2)$ lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD

Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có:

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I , bán kính $R_1 = 2$. (1)

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm J , bán kính $R_2 = 2$. (2)

Ta có $|R_1 - R_2| = 0 < IJ = 3 < R_1 + R_2 = 4$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu nêu trên.

+ Gọi K là tâm của đường tròn giao tuyến.

Suy ra bán kính cần tìm $r = KM = \sqrt{IM^2 - IK^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow AB = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác, hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , suy ra

$$S_{ABCD} = \frac{AB(AD + BC)}{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Với } \overrightarrow{AD} = (a-1; b-2; c-1) \text{ ta được } \begin{cases} a-1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \\ b-2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \\ c-1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Vậy $a + b + c = 6$.

Câu 18. Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox , Oy , Oz tại A , B , C . Gọi $A(a, 0, 0)$;

$B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1).$$

Do $M(1; 2; 5)$ thuộc mặt phẳng (P) nên thay vào (1) ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1 \quad (2)$.

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1-a; 2; 5)$; $\overrightarrow{BM} = (1; 2-b; 5)$; $\overrightarrow{CB} = (0; b; -c)$; $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Khi đó: $\begin{cases} 2b-5c=0 \\ -a+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{5}{2}c \\ a=5c \end{cases}$. Thay vào (2) ta có:

$$\frac{1}{5c} + \frac{4}{5c} + \frac{5}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 15 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 15 \cdot 6 = 450$ (đơn vị thể tích).

Câu 19. Chọn B

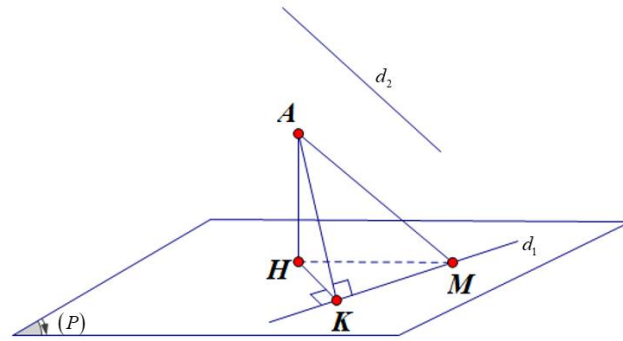
Ta xét bài toán tổng quát như sau:

Bài toán: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 không song song. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Giả sử d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

Trước hết ta xét trường hợp d_1 và d_2 chéo nhau.



Gọi M là một điểm nào đó thuộc d_1 , dựng đường thẳng qua M và song song với d_2 . Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng P , K là hình chiếu của A lên đường thẳng d_1 .

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là $\angle AMH$.

Ta có $\sin(d_2, P) = \sin(\angle HMA) = \frac{AH}{AM} \leq \frac{AK}{AM}$ (do $AH \leq AK$). Góc (d_2, P) lớn nhất khi $\sin(d_2, P)$ lớn nhất. Do $\frac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin(d_2, P)$ lớn nhất $H \equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (AKM) , hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vectơ $\vec{u}_1$ và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1, [\vec{u}_1, \vec{u}_2]]$.

Trường hợp d_1 và d_2 cắt nhau tại M , bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1, [\vec{u}_1, \vec{u}_2]]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$; $\vec{u}_2 = (2; -1; 2)$.

$$\Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (3; -4; -5) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1; [\vec{u}_1; \vec{u}_2]] = (-14; 2; -10) = -2(7; -1; 5).$$

Mặt phẳng (P) chứa d_1 nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$. Suy ra $a + c + d = 7 + 5 - 9 = 3$.

Câu 20. Chọn A

Gọi tọa độ $C(a; b; c)$.

Vì điểm C thuộc $(P): x + y + z + 1 = 0$ nên $a = -b - c - 1$ hay tọa độ C có dạng

$$C(-b - c - 1; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-b - c; b - 1; c) \Rightarrow BC^2 = (b + c)^2 + (b - 1)^2 + c^2.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 2) \Rightarrow AB^2 = 5$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BC^2 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ (b + c)^2 + (b - 1)^2 + c^2 = 5 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 6c^2 - 2c - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(-3; 1; 1) \\ C\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

Vậy cao độ của điểm C là 1 hoặc $-\frac{2}{3}$.

Câu 21. Chọn B

Cách 1:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-a; 2 - b; -c) \\ \overrightarrow{MB} = (2 - a; -b - 6; -c - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -a(2 - a) + (2 - b)(-b - 6) - c(-c - 2) = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 12 = P$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 12 - P = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 2)^2 + (c + 1)^2 = P + 18$$

Nếu $P + 18 < 0 \Leftrightarrow P < -18$ thì không tồn tại điểm M .

Nếu $P + 18 = 0 \Leftrightarrow P = -18$ thì $M(1; -2; -1)$ không thỏa mãn $M \in (S)$.

Nếu $P + 18 > 0 \Leftrightarrow P > -18$ thì M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1; -2; -1)$ và bán kính

$R' = \sqrt{18 + P}$. Khi đó M là điểm chung của hai mặt cầu:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \text{ có tâm } I(-1; 2; 1) \text{ và bán kính } R = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 12 - P = 0 \text{ có tâm } I'(1; -2; -1) \text{ và bán kính } R' = \sqrt{18 + P}.$$

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi hai mặt cầu (S) và (S') có điểm chung

$$\Leftrightarrow |R - R'| \leq II' \leq R + R' \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{18+P} \right| \leq 2\sqrt{6} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{18+P}.$$

$$\begin{cases} \sqrt{18+P} \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ -2\sqrt{6} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{18+P} \leq 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \geq \frac{-9}{2} \\ \sqrt{18+P} \leq \frac{5\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-9}{2} \leq P \leq \frac{39}{2} \text{ (thỏa mãn } P > -18 \text{)}$$

Khi đó $P = \frac{-9}{2}$ đạt được khi hai mặt cầu trên tiếp xúc ngoài tại $M(a; b; c)$ thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MI} = -\frac{R}{R'} \overrightarrow{MI'} = -\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} \overrightarrow{MI'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{MI'} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI'}}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Khi đó } \min P = \frac{-9}{2} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b + c = 1.$$

Cách 2:

$$M \in (S) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2a - 4b - 2c + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$M \in (S) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a + 4b + 2c - \frac{9}{2} \cdot \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-a; 2-b; -c) \\ \overrightarrow{MB} = (2-a; -b-6; -c-2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -a(2-a) + (2-b)(-b-6) - c(-c-2) = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b + 2c - 12.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2a + 4b + 2c - \frac{9}{2} - 2a + 4b + 2c - 12 = -4a + 8b + 4c - \frac{33}{2} = P.$$

$$P = -4a + 8b + 4c - \frac{33}{2} = -4(a+1) + 8(b-2) + 4(c-1) + \frac{15}{2}.$$

$$\Rightarrow P - \frac{15}{2} = -4(a+1) + 8(b-2) + 4(c-1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai bộ số $-4; 8; 4$ và $a+1; b-2; c-1$, ta có

$$\left(P - \frac{15}{2}\right)^2 = [-4(a+1) + 8(b-2) + 4(c-1)]^2 \leq (16 + 64 + 16) [(a+1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2] = 144$$

.

$$\Rightarrow -12 \leq P - \frac{15}{2} \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq P \leq \frac{39}{2}.$$

$$P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 8b + 4c - \frac{33}{2} = -\frac{9}{2} \\ \frac{a+1}{-4} = \frac{b-2}{8} = \frac{c-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 8b + 4c = 12 \\ 2a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \min P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b + c = 1.$$

Câu 22. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; -\sqrt{2})$, bán kính $R = 3$.

Với mọi điểm $M(x; y; z) \in (S)$ ta có $MI = 3$.

$$\text{Theo đề bài } MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 16.$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO}) + \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IB} = 16 (*).$$

$$\text{Có } \overrightarrow{IA} = (0; -1; -\sqrt{2}), \overrightarrow{IO} = (2; -1; \sqrt{2}), \overrightarrow{IB} = (-2; -5; \sqrt{2}), \overrightarrow{MI} = (-2 - x; 1 - y; -\sqrt{2} - z)$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO} = (0; -8; 0), \overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO}) = 8(y - 1), \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IB} = 3.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2.9 + 3 + 8(y - 1) + 3 = 16 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hay } M \text{ thuộc mặt phẳng } (P): y = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

$$\text{Do } d(I; (P)) = 1 \text{ suy ra bán kính của đường tròn } r = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Cách 2.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; -\sqrt{2})$, bán kính $R = 3$. Gọi $M(x; y; z)$.

$$M \in (S) \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \quad (1)$$

$$MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 + (z + 2\sqrt{2})^2 + x(x + 4) + y(y + 4) + z^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ hay } M \text{ thuộc mặt phẳng } (P): y = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

$$\text{Do } d(I; (P)) = 1 \text{ suy ra bán kính của đường tròn } r = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$