

1. MỞ ĐẦU

- **Lí do chọn đề tài**

Trong các đề thi Đại học những năm gần đây, chủ đề hệ phương trình đại số ngày càng đa dạng và khó hơn. Đây là câu phân loại học sinh khá và giỏi, vì thế học sinh đại trà, trung bình không dám học, ôn và luyện chủ đề này. Nguyên do là, chủ đề hệ phương trình tương đối đa dạng với nhiều phương pháp giải, với lực học bản thân, các em không dám học và ngại học. Hơn nữa, thời lượng phân phối chính khóa cho “Một số ví dụ về hệ phương trình bậc hai hai ẩn” trong Đại số 10 là tiết 38-39 (ghép với ‘ Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III’), có thể nói là rất ít và một đến hai tiết tự chọn để luyện tập thêm cũng vẫn còn làm các em bỡ ngỡ, sợ sệt với chủ đề hệ phương trình. Để giúp các em tự tin, tiếp cận và nâng cao năng lực giải toán chủ đề hệ phương trình, tôi đã nghiên cứu và viết sáng kiến kinh nghiệm với đề tài ***“Một số kinh nghiệm phát huy tính sáng tạo cho học sinh đại trà lớp 10 nhận diện cách giải, sáng tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc và phát triển bài toán mới”***.

- **Mục đích nghiên cứu**

Giúp học sinh nhận dạng, giải được các hệ phương trình có yếu tố đồng bậc, sáng tạo thêm nguồn bài tập thuộc dạng này, khai thác và phát triển thành dạng khác của hệ phương trình. Bước đầu tiếp cận đa dạng với chủ đề hệ phương trình.

Bồi dưỡng cho học sinh các kĩ năng của toán học, nâng cao năng lực tư duy, sáng tạo của bản thân trong học toán nói chung và nâng cao khả năng giải bài toán hệ phương trình trong các đề thi Quốc gia nói riêng.

- **Đối tượng nghiên cứu**

Các hệ phương trình có yếu tố đồng bậc (đẳng cấp): có phương trình đồng bậc, hệ đồng bậc, hệ quy được về đồng bậc. Một số hệ phương trình bậc hai, hệ có phương trình bậc cao, có căn thức áp dụng được cách giải của hệ có yếu tố đồng bậc.

- **Phương pháp nghiên cứu**

Để nghiên cứu và viết đề tài, tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp điều tra khảo sát thực tế và thu thập thông tin, đàm thoại, vấn đáp (nghiên cứu phân phối chương trình, lấy ý kiến của giáo viên và học sinh thông qua trao đổi trực tiếp).

- Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lí thuyết (nghiên cứu các loại tài liệu sư phạm, chuyên môn liên quan đến đề tài.)

- Phương pháp thống kê và xử lí số liệu (tiến hành thực hiện đề tài trên một số lớp giảng dạy, phân tích và đánh giá kết quả đề tài qua việc thống kê và xử lí số liệu bài kiểm tra).

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Toàn ngành giáo dục hiện nay đã và đang thực hiện nhiệm vụ học tập và giảng dạy với phương pháp dạy học tích cực lấy người học là trung tâm. Các em học sinh tiếp thu tri thức, phát triển bản thân trở thành chủ thể tích cực, sáng tạo. Các em biết vượt qua khó khăn, sự thiếu tự tin(sợ sai), hứng thú tiếp cận tri thức, biết dựa trên kiến thức đã biết, tìm hiểu, khai thác, sáng tạo tìm ra những vấn đề mới. Các em có khả năng tự học, tự nghiên cứu và tìm ra kiến thức dựa trên những kĩ năng toán học như đặc biệt hóa, tương tự hóa, khái quát hóa,..

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

Qua thực tiễn học tập và giảng dạy, bản thân tôi thấy chủ đề hệ phương trình có yếu tố đồng bậc tương đối dễ tiếp cận đối với học sinh đại trà lớp 10, nhưng do chủ quan các em thấy dạng toán hệ phương trình đại số đa dạng, đề thi câu hệ phương trình tương đối khó nên các em không có ý định tiếp cận chủ đề này và bỏ qua luôn chủ đề hệ phương trình có yếu tố đồng bậc. Nếu làm, các em cũng dừng lại ở những bài toán đơn giản, áp dụng máy móc, chưa linh hoạt, chưa sáng tạo khi học nên không thể kết nối dạng toán hệ phương trình có yếu tố đồng bậc với các dạng khác của hệ phương trình.

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

2.3.1. Giải pháp tổ chức thực hiện

- Bổ sung, hệ thống các kiến thức cơ bản, liên quan mà học sinh cần sử dụng.
- Yêu cầu học sinh nhận diện dạng toán thông qua ví dụ, phân tích hình thành phương pháp giải.
- Đưa ra các bài toán mới để học sinh củng cố kiến thức và kĩ năng. Học sinh phân tích, trình bày lời giải. Hướng dẫn các em hình thành, sáng tạo bài toán tương tự.
- Áp dụng kĩ năng đặc biệt hóa, hướng dẫn các em sáng tạo bài toán mới.
- Thực hiện nghiên cứu và ứng dụng vào thực tiễn giảng dạy tôi chia nội dung thành ba phần dạy cho học sinh vào ba buổi, mỗi buổi ba tiết.

2.3.2. Nhận diện hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.

1. Phương trình có yếu tố đồng bậc (đẳng cấp)

Phương trình có yếu tố đồng bậc (đồng bậc n) là phương trình có dạng

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y^1 + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x^1 y^{n-1} + a_0 y^n = 0$$

Thực hiện cách giải theo các bước:

Bước 1: xét $x = 0$ (hoặc $y = 0$) thay vào phương trình kiểm tra trực tiếp và kết luận.

Bước 2: xét $x \neq 0$ (hoặc $y \neq 0$), đặt $y = tx$, chia hai vế của phương trình cho x'' (hoặc y''), giải phương trình ẩn t , tìm được y theo x .

Ví dụ 1. Phương trình $x^3 + 2xy^2 + x^2y + 8y^3 = 0$ là phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc 3.

Khi $y = 0$ thì $x = 0$,

Khi $y \neq 0$ đặt $x = ty$, phương trình có dạng $x^3 + 2x^3t^2 + x^3t + 8x^3t^3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3(8t^3 + 2t^2 + t + 1 = 0) \Leftrightarrow (8t^3 + 2t^2 + t + 1 = 0) \Leftrightarrow (t + 2)(t^2 - t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

hay $x = -2y$.

Ví dụ 2. Phương trình $2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$ là phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc bốn.

Khi $x = 0$ thì $y = 0$.

Khi $x \neq 0$ đặt $y = tx$, phương trình có dạng $2x^4 + 3tx^4 - 2t^2x^4 - t^3x^4 - 2t^4x^4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4(2 + 3t - 2t^2 - t^3 - 2t^4) = 0 \Leftrightarrow 2 + 3t - 2t^2 - t^3 - 2t^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(2t + 1)(-t^2 - t - 2) = 0 \quad (\text{dùng máy tính Casio fx-570VN PLUS tìm nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \cup t = -\frac{1}{2} \quad (\text{phương trình đồng bậc bậc bốn viết được dưới dạng } (x - y)(x + 2y)(-y^2 - yx - 2x^2) = 0).$$

2. Hệ phương trình đồng bậc (đẳng cấp)

là hệ có dạng $\begin{cases} P^k(x, y) = c_1 \\ Q^k(x, y) = c_2 \end{cases} (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$, trong đó $P^k(x, y), Q^k(x, y)$ là các đa

thức bậc k , không chứa thành phần nhỏ hơn bậc k : $P^k(x, y) = \sum_{i=0}^k p_i x^{k-i} y^i$; $Q^k(x, y)$

$$= \sum_{i=0}^q q_i x^{k-i} y^i (p_i, q_i \in \mathbb{R}).$$

Cách giải.

- Xét $x = 0$ (hoặc $y = 0$), tìm các nghiệm dạng $(0; y)$ (hoặc $(x; 0)$) của hệ (nếu có).
- Xét $x \neq 0$. Đặt $y = tx$ ($\Leftrightarrow t = \frac{y}{x}$), đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} P^k(x, tx) = c_1 \\ Q^k(x, tx) = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^k P^k(t, 1) = c_1 & (1) \\ x^k Q^k(t, 1) = c_2 & (2) \end{cases} \text{ Suy ra } c_2 P^k(t, 1) = c_1 Q^k(t, 1) \text{ là phương trình ẩn } t.$$

Tìm được t thay vào (1) hoặc (2) tìm được x , từ đó có y .

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 & (2). \end{cases}$

Giải.

- Xét $x = 0$ thay vào (2) được $y = 0$, thay vào (1) không thỏa mãn.
- Xét $x \neq 0$. Đặt $y = tx$, phương trình (2) có dạng

$$2x^2 - 13tx^2 + 15t^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2 - 13t + 15t^2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \cup t = \frac{2}{3}. \text{ Do đó } y = \frac{2}{3}x \cup y = \frac{1}{5}x.$$

Với $y = \frac{2}{3}x$ thay vào (1) ta có $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Khi đó $(x; y) = (3; 2), (-3; -2)$.

Với $y = \frac{1}{5}x$ thay vào (1) ta có $x^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$. Khi đó $(x; y) = (\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 2), (-3; -2), (\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 & (1) \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 & (2). \end{cases}$$

Giải.

- Xét $y = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} x^3 = 13 \\ x^3 = 25 \end{cases}$. Vô lí.
- Xét $y \neq 0$. Đặt $x = ty$, hệ trở thành $\begin{cases} y^3(t-1)(t^2+1)=13 \\ y^3(t+1)(t^2-1)=25. \end{cases}$

Chia tương ứng các vế của hai phương trình ta được $\frac{(t-1)(t^2+1)}{(t+1)(t^2-1)} = \frac{13}{25}$

$$\Leftrightarrow 25(t^2+1)=13(t+1)^2 \Leftrightarrow 12t^2-26t+12=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \cup t=\frac{3}{2}.$$

Với $t = \frac{2}{3}$ hay $x = \frac{2}{3}y$ thay vào phương trình (1) ta có $y^3 = -27 \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow x = -2$.

Vậy $(x; y) = (-2; -3)$.

Với $t = \frac{3}{2}$ hay $x = \frac{3}{2}y$ thay vào phương trình (1) ta có $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3$. Vậy $(x; y) = (3; 2)$.

Hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (-2; -3), (3; 2)$.

Chú ý. Trong thực hành ta viết ở dạng sau nhanh và gọn hơn :

Từ $x \neq y, x \neq -y$, nhân chéo các vế của hai phương trình ta có :

$$\begin{aligned} 25(x-y)(x^2+y^2) &= 13(x+y)(x^2-y^2) \Leftrightarrow 25(x^2+y^2) = 13(x+y)^2 \Leftrightarrow 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (2x-3y)(3x-2y) &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y \cup x = \frac{3}{2}y. \end{aligned}$$

3. Hệ quy về đồng bậc

a. Hệ có dạng
$$\begin{cases} P^m(x, y) = a \\ Q^n(x, y) = R^k(x, y) \end{cases} \text{ trong đó } a \neq 0, m+n=k.$$

Cách 1: Khi đó rút được một phương trình đẳng cấp bậc k bằng cách thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai của hệ. Tìm được x theo y , thay vào phương trình thứ nhất tìm được y , từ đó tìm được nghiệm của hệ.

Cách 2: Xét $x = 0$ (hoặc $y = 0$) thay vào hệ tìm nghiệm dạng $(0; y)$ (hoặc nghiệm $(x; 0)$). Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$ thay vào hệ. Chia tương ứng các vế của hai phương trình trong hệ được phương trình ẩn t , tìm t , tìm x và suy ra y .

b. Hệ có dạng $\begin{cases} P_1^k(x, y) = P_2^m(x, y) \\ Q_1^q(x, y) = Q_2^n(x, y) \end{cases}$, với $k - q = m - n$; $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

Cách giải. Như cách 2 mục a.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - x(y - 1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y. \end{cases}$

(Trích “ 90 đề thi thử Toán tập 2 - Gia sư trực tuyến ”.

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = -x + 3y \quad (1) \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y. \end{cases}$$

Nhân chéo các vế của hai phương trình lại với nhau ta được

$$\begin{aligned} (2x^2 - xy + y^2)(x - 2y) &= (x^2 + xy - 3y^2)(-x + 3y) \\ \Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2y - 3xy^2 + 7y^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y)(3x - 7y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \\ x = \frac{7}{3}y \end{cases}.$$

Với $x = y$ thì (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \cup x = 1$. Khi đó $(x; y) = (0; 0), (1; 1)$.

Với $x = -y$ thì (1) $\Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \cup x = -1$. Khi đó $(x; y) = (0; 0), (-1; 1)$.

Với $x = \frac{7}{3}y$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{86}{49}x^2 - \frac{2}{7}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \cup x = \frac{7}{43}$. Khi đó $(x; y) = (0; 0), (\frac{7}{43}; \frac{3}{43})$.

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 1), (-1; 1), (\frac{7}{43}; \frac{3}{43})$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2). \end{cases}$

Giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(4x - y) & (1) \\ y^2 - 5x^2 = 4 & (2). \end{cases}$

Thế hệ số 4 ở (2) vào (1) ta có $x^3 - y^3 = (y^2 - 5x^2)(4x - y)$

$$\Leftrightarrow 21x^3 - 5x^2y - 4xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x + y)(7x - 4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3x \\ x = \frac{4}{7}y \end{cases}$$

Với $x = 0$ thì hệ có dạng $\begin{cases} 4y = y^3 \\ 1 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$. Vậy $(x; y) = (0; 2), (0; -2)$.

Với $y = 3x$ thì hệ có dạng $\begin{cases} x^3 - 12x = -27x^3 + 16x \\ 1 + 9x^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x(x^2 - 1) = 0 \\ 4(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $(x; y) = (1; -3), (-1; 3)$.

Với $x = \frac{4}{7}y$ thì hệ có dạng
$$\begin{cases} \frac{64}{343}y^3 + 4y = y^3 + \frac{74}{7}y \\ 1 + y^2 = 5(1 + \frac{16}{49}y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{279}{343}y^3 + \frac{46}{7}y = 0 \\ \frac{31}{49}y^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \emptyset.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 2), (0; -2), (1; -3), (-1; 3)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 2(4\sqrt{x} + \sqrt{y}) & (1) \\ x - 3y = 6 & (2). \end{cases}$$

Phân tích: Vế trái của (1) có bậc $3/2$, vế phải của (1) có bậc $1/2$.

Vế trái của (2) có bậc 1, vế phải của (2) có bậc 0. Hệ thuộc dạng quy về hệ đồng bậc **a**.

Giải.

Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$.

Thế hệ số $2 = \frac{x - 3y}{3}$ từ phương trình (2) vào phương trình (1) ta được (phương trình đồng bậc bậc $3/2$):

$$x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = \frac{x - 3y}{3}(4\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(x + \sqrt{xy} - 12y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + 4\sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9y \\ x = y = 0. \end{cases}$$

Với $x = 0$ thì từ (2) suy ra $y = -2$ (loại).

Với $x = 9y$ thì từ (2) suy ra $y = 1$, khi đó $x = 9$.

Với $x = y = 0$ thì từ (2) suy ra $0 = 6$ (loại).

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (9; 1)$.

Nhận xét. Phần nhận diện và thực hiện cách giải hệ phương trình có yếu tố đồng bậc, học sinh đại trà khối 10 tiếp cận một cách tự nhiên, thực hiện tốt bài giải, các em tự tin và hoàn toàn chủ động tiếp nhận kiến thức.

Bài tập tự luyện :

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (1; 1), (-1; -1)$).

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (1; 2)$).

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0. \end{cases}$$

(Đề đề nghị Olympic 30/4/2009).

(Đáp số : $(x; y) = (1; 0), (0; \frac{1}{2}), (1; \frac{1}{2}), (\frac{3}{\sqrt[3]{25}}; \frac{1}{2\sqrt[3]{25}})$).

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - xy + x = 3y \\ x^2 - 3y^2 + xy = x - 2y. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (0; 0), (1; 1), (-1; 1), (\frac{7}{43}; \frac{3}{43})$).

Bài 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7}. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (-2; 1), (2; -1), (1; -2), (-1; 2)$).

Bài 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2x^2y^2 \\ 2y + x = 3xy. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (0; 0), (1; 1), (\frac{11 + \sqrt{37}}{8}; \frac{4 + \sqrt{37}}{9}), (\frac{11 - \sqrt{37}}{8}; \frac{4 - \sqrt{37}}{9})$).

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (3; 1), (-3; -1), (-\frac{4\sqrt{6}}{13}; \frac{\sqrt{6}}{13}), (\frac{4\sqrt{6}}{13}; -\frac{\sqrt{6}}{13})$).

Bài 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3. \end{cases}$$

(Trích đề thi thử Đại học năm 2013-Trường THPT Chuyên Amsterdam Hà Nội.)

(Đáp số : $(x; y) = (0; 0), (-1; 1), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$).

Bài 9. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy + 2y \\ 2x^3 + 3xy^2 = 2y^2 + 3x^2y. \end{cases}$$

(Đáp số : $(x; y) = (0; 0), (1; 1)$).

2.3.3. Một số cách sáng tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc

1. Từ một nghiệm chọn trước của hệ tạo ra các phương trình trong hệ.

Ví dụ 1. Với $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 15 \\ 3x^2y + xy^2 - y^3 = -6. \end{cases}$ Do $y = -2x$ nên trong khi

giải hệ ta sẽ giải một phương trình bậc ba ẩn t (với $t = \frac{x}{y}$), phương trình này có nghiệm đẹp $t = -2$. Vậy ta có bài toán sau.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 15 \\ 3x^2y + xy^2 - y^3 = -6. \end{cases}$$

Giải.

Xét $x = 0$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 2y^3 = 15 \\ -y^3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \emptyset$.

Xét $x \neq 0$, từ hệ đã cho ta có: $2(x^3 + 2y^3) + 5(3x^2y + xy^2 - y^3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - y^3 + 15x^2y + 5xy^2 = 0 \Leftrightarrow -(\frac{y}{x})^3 + 5(\frac{y}{x})^2 + 15(\frac{y}{x}) + 2 = 0$, đặt $t = \frac{y}{x}$, khi đó có:

$$-t^3 + 5t^2 + 15t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(-t^2 + 7t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2} \end{cases}.$$

Với $y = tx$ thì phương trình thứ nhất trong hệ trở thành $x^3 + 2t^3x^3 = 15$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{15}{1+2t^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{15}{1+2t^3}}.$$

Vậy ứng với ba nghiệm t tìm được ở trên thì hệ đã cho có nghiệm là

$$(x; y) = (-1; 2), \left(\sqrt[3]{\frac{15}{1+2(\frac{7-\sqrt{53}}{2})^3}}; \sqrt[3]{\frac{15(\frac{7-\sqrt{53}}{2})^3}{1+2(\frac{7-\sqrt{53}}{2})^3}} \right), \left(\sqrt[3]{\frac{15}{1+2(\frac{7+\sqrt{53}}{2})^3}}; \sqrt[3]{\frac{15(\frac{7+\sqrt{53}}{2})^3}{1+2(\frac{7+\sqrt{53}}{2})^3}} \right).$$

Nhận xét. Khi tạo hệ đồng bậc bậc ba từ một nghiệm đã chọn của hệ thì phương trình ẩn t thu được luôn giải được nghiệm, do đó cũng tìm được tất cả các nghiệm của hệ.

Ví dụ 2. Tương tự, với $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = -2 \end{cases}$.

Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = -2 \end{cases}$.

Chú ý. Để tạo ra hệ phương trình có yếu tố đồng bậc cần xây dựng các phương trình trong hệ sao cho độ chênh lệch về bậc của mỗi số hạng tương ứng ở các vế của hai phương trình trong hệ là bằng nhau.

Ví dụ 3. Với $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^3 + 2x^2y = 3 & (1) \\ x^4 + y^4 + x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$.

Từ phương trình (1) ta xây dựng (2) không có hệ số tự do, bậc của mỗi số hạng tương ứng ở các vế của hai phương trình có độ lệch bằng nhau là một bậc. Ta có bài toán sau.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2x^2y = 3 & (1) \\ x^4 + y^4 + x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$.

Phân tích.

Với $x = 0$, hệ trở thành $\begin{cases} 0 = 3 \\ y^3 - 8y = 0 \end{cases}$. Vậy hệ không có nghiệm dạng $(0; y)$.

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$ thay vào hệ được

$$\begin{cases} x^3 + 2tx^3 = 3 \\ x^4 + t^4x^4 + x - 8tx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1+2t) = 3 \\ x^4(1+t^4) = x(8t-1). \end{cases}$$

Chia tương ứng các vế của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất ta có $\frac{1+t^4}{1+2t} = \frac{8t-1}{3}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3t^4 + 3 = 16t + 6t - 1 \\ &\Leftrightarrow 3t^4 - 16t^2 - 6t + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+2)(3t^3 - 6t^2 - 4t + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ 3t^3 - 6t^2 - 4t + 2 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) khó khăn trong việc tìm nghiệm đúng.

Nhận xét. Như vậy, khi tạo các hệ phương trình có yếu tố đồng bậc, cần lưu ý tạo phương trình ẩn t mà tìm được tất cả các nghiệm của nó. Nếu chọn phương trình bậc cao ẩn t (bậc ba, bậc bốn,...) có nghiệm vô tỉ thì nên chọn t là hai nghiệm vô tỉ của một phương trình bậc hai. Ta có thể tham khảo cách tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc từ phương trình bậc cao sau.

2. Từ phương trình bậc cao giải được tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.

Ví dụ 1. Muốn có hai nghiệm vô tỉ t trong phương trình bậc cao, ta lấy chúng là nghiệm từ phương trình bậc hai có nghiệm vô tỉ sau $4t^2 + 6t - 1 = 0$, sau đó ghép tam thức bậc hai $4t^2 + 6t - 1$ nhân với nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai khác,... Từ đó tạo ra các phương trình bậc ba, bậc bốn ẩn t giải được các nghiệm. Chẳng hạn, phương trình $(4t^2 + 6t - 1)(t+1) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4t^3 + 10t^2 + 5t - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^4 + 1 = t^4 + 4t^3 + 10t^2 + 5t \\ &\Leftrightarrow t^4 + 1 = t(t^3 + 4t^2 - 10t + 5) \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{t^4 + 1} = \frac{1}{t^3 + 4t^2 - 10t + 5} = y^3 \quad (\text{đặt bằng } y^3, \text{ do bậc của mẫu thức và tử thức} \end{aligned}$$

hơn nhau ba bậc.)

Ta có
$$\begin{cases} t = y^3(t^4 + 1) \\ 1 = y^3(t^3 + 4t^2 - 10t + 5). \end{cases}$$

Đặt $x = ty$, ta có hệ
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = x \\ x^3 + 4x^2y - 10xy^2 + y^3 = 1. \end{cases} \quad \text{Ta có bài toán sau.}$$

Bài toán 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = x \\ x^3 + 4x^2y - 10xy^2 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Phương trình $(4t^2 + 6t - 1)(4t^2 + 22t + 39) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 16t^4 + 112t^3 + 284t^2 + 212t - 39 = 0 \\ &\Leftrightarrow 17t^4 + 112t^3 + 284t^2 + 212t = 39 + t^4 \\ &\Leftrightarrow t(17t^3 + 112t^2 + 284t + 212) = 39 + t^4 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \frac{t}{t^4 + 39} = \frac{1}{17t^3 + 112t^2 + 284t + 212} = y^3$ (đặt bằng y^3 , do bậc của mẫu thức và tử thức hơn nhau ba bậc.)

Ta có $\begin{cases} t = y^3(t^4 + 39) \\ 1 = y^3(17t^3 + 112t^2 + 284t + 212) \end{cases} (y \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yt = (yt)^4 + 39y^4 \\ 1 = 17(yt)^3 + 112y \cdot (yt)^2 + 284y^2 \cdot (yt) + 212y^3. \end{cases}$$

Đặt $x = ty$, ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x^4 + 39y^4 \\ 1 = 17x^3 + 112yx^2 + 284y^2x + 212y^3. \end{cases}$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = x^4 + 39y^4 \\ 1 = 17x^3 + 112yx^2 + 284y^2x + 212y^3. \end{cases}$

Nhận xét. Khi giải **bài toán 2**, học sinh phải giải phương trình ẩn t (chỉ có nghiệm vô tỉ) $16t^4 + 112t^3 + 284t^2 + 212t - 39 = 0$ (*). Học sinh cần sử dụng máy tính Casio (Fx-570VN PLUS) để tìm được nhân tử $(4t^2 + 6t - 1)$ của vế trái (*). Thực hiện trên máy tính Fx-570VN PLUS theo trình tự sau :

16/ ALPHA /) / x[□]/4/+112/ ALPHA/) / x[□]/3/+284/ ALPHA/) /x²/+/212/
ALPHA/) /-39/ ALPHA/CALC(SOLVE)/0

(để được phương trình $16t^4 + 112t^3 + 284t^2 + 212t - 39 = 0$)

SHIFT/ CALC(SOLVE)/(-)/9/=

(chờ máy tính cho nghiệm $t \approx -7,026348198$)

ALPHA/) /SHIFT/RCL/(-)/

(để gán nghiệm t trên cho biến A)

16/ALPHA/) /x[□]/4/=112/ALPHA/x[□]/3/+284/ALPHA/) /x²/
+/212/ALPHA/) /-39/ALPHA/CALC(SOLVE)/0

(để nhập phương trình $16t^4 + 112t^3 + 284t^2 + 212t - 39 = 0$ vào máy)

SHIFT/CALC(SOLVE)/9/=

(chờ máy tính cho nghiệm thứ hai $t \approx 0,1513878198$)

ALPHA/) /SHIFT/RCL/°... /

(để gán nghiệm thứ hai của t cho B)

ALPHA/(-)/+/ALPHA/°... /=

(để có $A + B = -\frac{3}{2}$)

ALPHA/(-)/x/ALPHA/°... /=

(để có $A.B = -\frac{1}{4}$)

Từ đó vế trái (*) có nhân tử là $(t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(4t^2 - 6t - 1)$. Vậy phương trình (*)

tương đương: $(4t^2 + 6t - 1)(4t^2 + 22t + 39) = 0$. Từ đó tìm được nghiệm chính xác của t , suy ra nghiệm của hệ phương trình trong **bài toán 2**.

Chú ý. Chúng ta nên tạo ra các phương trình bậc cao từ tích của các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai để chắc chắn rằng phương trình bậc cao đó giải được nghiệm đúng bằng máy tính Casio. Từ đó, ta sẽ xây dựng được hệ phương trình có yếu tố đồng bậc và giải được nghiệm đúng của hệ.

3. Từ các hằng đẳng thức cơ bản xây dựng hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.

Học sinh đã biết:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Suy ra:

- $(x + y)^4 = (x + y)^3(x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(x - y)^4 = (x - y)^3(x - y) = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
- $(x + y)^5 = (x + y)^4(x + y) = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
- $(x - y)^5 = (x - y)^4(x - y) = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$
- ...

Ví dụ 1. Ta có
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^3 = 27 \\ (x - y)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27 \\ x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1 \end{cases}$$

Cộng tương ứng các vế của hai phương trình trong hệ có $2x^3 + 6xy^2 = 28$

Trừ tương ứng các vế của hai phương trình trong hệ có $2y^3 + 6x^2y = 26$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14 \\ y^3 + 3x^2y = 13 \end{cases} \quad (\text{Suy ra } xy \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 = \frac{14}{x} & (1) \\ y^2 + 3x^2 = \frac{13}{y} & (2) \end{cases}$$

Cộng tương ứng các vế của hai phương trình (1) và (2) có: $2x^2 + 2y^2 = \frac{7}{x} + \frac{13}{2y}$

Trừ tương ứng các vế của hai phương trình (1) và (2) có: $y^2 - x^2 = \frac{7}{x} - \frac{13}{2y}$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = \frac{7}{x} + \frac{13}{2y} \\ y^2 - x^2 = \frac{7}{x} - \frac{13}{2y} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Ta có
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^5 = 243 \\ (x - y)^5 = -32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 243 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 & (1) \\ -32 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 & (2) \end{cases}$$

Cộng tương ứng các vế của hai phương trình (1) và (2) có:

$$211 = 10x^4y + 20x^2y^3 + 2y^5$$

Trừ tương ứng các vế của hai phương trình (1) và (2) có:

$$275 = 2x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4$$

Ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} 275 = 2x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4 \\ 211 = 10x^4y + 20x^2y^3 + 2y^5 \end{cases} (\Rightarrow xy \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{275}{2x} = x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 & (3) \\ \frac{211}{2y} = 5x^4 + 10x^2y^2 + y^4 & (4) \end{cases}$$

Cộng, trừ tương ứng các vế của phương trình (3), (4) ta được hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{275}{2x} + \frac{211}{2y} = 6x^4 + 20x^2y^2 + 6y^4 & (3) \\ \frac{275}{2x} - \frac{211}{2y} = -4x^4 + 4y^4 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{275}{4x} + \frac{211}{4y} = 3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4 \\ \frac{275}{8x} - \frac{211}{8y} = -x^4 + y^4 \end{cases}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{275}{4x} + \frac{211}{4y} = 3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4 \\ \frac{275}{8x} - \frac{211}{8y} = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2). \end{cases}$$

2.3.4. Một số cách phát triển bài toán mới từ hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.

1. Đặc biệt hóa yếu tố trong phương trình đồng bậc.

Ví dụ 1. Ta có phương trình đồng bậc : $(x - y)(x + 2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 3x^4 - y^4 + 3x^3y - xy^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = (x + y)(3x^3 - y^3) .$$

Đặt $x^2 + y^2 = 1$ ta có $3x^3 - y^3 = \frac{1}{x + y} .$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x + y}. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Ta có phương trình đồng bậc : $24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (24x^2 + 17xy - 7y^2) + 21xy = 0$$

$$\Leftrightarrow 21xy = 7y^2 - 17xy - 24x^2$$

$$\Leftrightarrow 21xy = (7y - 24x)(y + x) .$$

Với $xy \neq 0$ có $\frac{1}{x+y} = \frac{7y-24x}{21xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y}$.

Giả thiết rằng $x > 0, y > 0$, lại có $\frac{1}{x+y} = (\frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}})(\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}})$.

Đặt $1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}$ (1) thì có $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}$ (2).

Cộng tương ứng các vế của phương trình (1), (2) ta có $1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}}$

Trừ tương ứng các vế của phương trình (1), (2) ta có $1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \frac{1}{x+y}) = 2 \\ \sqrt{7y}(1 - \frac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \frac{1}{x+y}) = 2 \\ \sqrt{7y}(1 - \frac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Đặt ẩn phụ mới từ ẩn phụ ban đầu của hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.

Ví dụ 1. Từ hệ phương trình đồng bậc : $\begin{cases} u^2 + uv - 2v^2 = 18 \\ 2u^2 - 3uv + v^2 = 21 \end{cases}$, đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y + 3 \end{cases}$.

Khi đó có hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (x-2)(y+3) - 2(y+3)^2 = 18 \\ 2(x-2)^2 - 3(x-2)(y+3) + (y+3)^2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy - x - 14y = 38 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy - 17x + 12y = -14. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy - x - 14y = 38 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy - 17x + 12y = -14 & (2). \end{cases}$$

Nhận xét. Như vậy, khi đặt $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 3 \end{cases}$ thì hệ phương trình trên đưa về hệ phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc hai. Tìm được $(u ; v)$ suy ra được nghiệm $(x ; y)$ của hệ ban đầu.

Vấn đề nêu ra là đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ trong bài toán 1, làm thế nào để biết $a = 2, b = -3$ thì hệ đã cho sẽ đưa được về hệ đồng bậc. Ta thay $x = u + a, y = v + b$ vào phương trình (1) của hệ, có

$$\begin{aligned} (u+a)^2 - 2(v+b)^2 + (u+a)(v+b) - (u+a) - 14(v+b) &= 38 \\ \Leftrightarrow u^2 - 2v^2 + uv + 2ua + a^2 - 4vb - 2b^2 + ub + va + ab - u - a - 14v - 14b &= 38. \end{aligned}$$

Để phương trình (1) là phương trình đồng bậc (đẳng cấp) cần có $\begin{cases} 2a + b - 1 = 0 \\ a - 4b - 14 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Từ đó đặt } \begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 3. \end{cases}$$

Lưu ý rằng, sau khi thay x, y vào phương trình (2) của hệ nếu thấy (2) không đưa được về phương trình đồng bậc thì hệ phương trình đã cho giải theo cách khác.

Ví dụ 2. Từ hệ phương trình đồng bậc $\begin{cases} u^2 + 4uv + v^2 = 1 \\ 2u^2 + 2uv + 4v^2 = 1 \end{cases}$, đặt $\begin{cases} u = x + 5 \\ v = y - 7 \end{cases}$ ta

$$\text{có hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 3y^2 + 4xy - 18x - 22y + 31 = 0 \\ 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 46y + 175 = 0. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 4xy - 18x - 22y + 31 = 0 \\ 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 46y + 175 = 0. \end{cases}$

Nhận xét. Ngoài cách tìm a, b từ việc đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ như trong bài toán 1, học sinh sau khi học đạo hàm có thể tìm a, b bằng cách : Đạo hàm vế trái của phương trình thứ nhất lần lượt theo biến x, y ta được $\begin{cases} 2x + 4y - 18 = 0 \\ 6y + 4x - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 7 \end{cases}$.

$$\text{Do đó, đặt } \begin{cases} x = u - 5 \\ y = v + 7. \end{cases}$$

Với việc đặt ẩn phụ $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ thì sự tồn tại cặp $(u; v)$ và $(x; y)$ là tương đương. Như vậy, chúng ta có thể đặt ẩn phụ theo những cách khác mà vẫn đảm bảo được tương quan này.

Ví dụ 3. Từ hệ đồng bậc $\begin{cases} (3a^2 + 4b^2)b = 14 \\ (a^2 + 12b^2)a = 36 \end{cases}$ đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = \sqrt{xy}, (b \geq 0) \end{cases}$

(Khi đó x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - at + b^2 = 0$). Ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} [3(x+y)^2 + 4xy]\sqrt{xy} = 14 \\ [(x+y)^2 + 12xy](x+y) = 36 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2 + 3y^2 + 10xy)\sqrt{xy} = 14 \\ (x^2 + y^2 + 14xy)(x+y) = 36 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3y)(3x+y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+3y)(3x+y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36. \end{cases}$

Ví dụ 4. Từ $(a; b) = (4; 2)$ có hệ đồng bậc

$$\begin{cases} 3ab(a+b) + 6ab(a+b) = 432 (=2.216) \\ (a+b)^3 = 216 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ab(a+b) + 6ab(a+b) = 2(a+b)^3 \\ a+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ab(a+b) = 2(a+b)^3 - 6ab(a+b) \\ a+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ab(a+b) = 2[(a+b)^3 - 3ab(a+b)] \\ a+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ab(a+b) = 2(a^3 + b^3) \\ a+b=6. \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x} \\ b = \sqrt[3]{y} \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) = 2(x+y) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$

Ví dụ 5. Từ hệ đồng bậc $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ 2a^2 - b^2 = 1 \end{cases} (\Rightarrow a \neq 0)$ đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = y \end{cases}$ ta có hệ

phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + y^2 - \frac{y}{x} = 3 \\ \frac{2}{x^2} - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x^2y^2 - xy = 3x^2 \\ 2 - x^2y^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 - xy = 3x^2 - 1 \\ 2 = x^2(1 + y^2) \end{cases}.$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - xy = 3x^2 - 1 \\ x^2(1 + y^2) = 2. \end{cases}$

Ví dụ 6. Từ hệ có yếu tố đồng bậc $\begin{cases} a^3 - 4b^3 = 3a - 4b \\ 3a^2 - 4b^2 = 4 \end{cases}$ đặt $\begin{cases} a = x - 1 \\ b = y \end{cases}$ ta có hệ

phương trình $\begin{cases} (x-1)^3 - 3(x-1) - 4y^3 + 4y = 0 \\ 3(x-1)^2 - 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4y^3 - 3x^2 + 4y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 - 6x - 1 = 0. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 4y^3 - 3x^2 + 4y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 - 6x - 1 = 0. \end{cases}$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Ý tưởng ‘ Nhận dạng và phương pháp giải hệ phương trình có yếu tố đồng bậc ’ đã hình thành trong đầu tôi từ năm học ‘2011-2012’ Tôi đã áp dụng vào giảng dạy cho học sinh đại trà lớp 10 năm học đó và thấy các em hứng thú học tập, giải tốt các bài tập cô giáo đưa ra. Trải qua bốn năm sau, khóa học 2015-2016, tôi tiếp tục áp dụng kinh nghiệm trên cho các em học sinh đại trà lớp 10. Tôi thấy các em cũng vẫn hứng thú học tập kiến thức này nhưng các em mới phát triển được kỹ năng nhận dạng, thông hiểu và vận dụng thấp. Các em chưa phát triển tốt kỹ năng vận dụng cao. Tư duy các em vẫn đang theo một con đường mòn, chưa phát huy được hết năng lực của người học. Vì thế, tôi đã nghiên cứu và phát triển tiếp thành đề tài ‘ Một số kinh nghiệm phát huy tính sáng tạo cho học sinh đại trà lớp 10 nhận diện cách giải, sáng tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc và phát triển bài toán mới’ , áp dụng vào giảng dạy trong năm học 2015-2016 để phát triển tư duy cho các em. Tôi rất vui khi thấy các em có tư duy toán học linh hoạt, sáng tạo khi biết sáng tác ra những bài toán để mình giải quyết vấn đề đang học. Hơn nữa, các em còn biết khai thác dạng toán đang học để phát triển thành dạng toán mới. Có thể nói rằng, các em hoàn toàn chủ động, tích cực trong hoạt động học tập của mình và là trung tâm của quá trình giảng dạy của thầy, cô. Với cách thực hiện này, các em từng bước chinh phục được những đỉnh cao của kiến thức toán học và chủ đề ‘Hệ phương trình’ trong đề thi Quốc gia không còn quá xa với các em nữa.

Sau khi áp dụng ‘ Kinh nghiệm phát huy tính sáng tạo cho học sinh đại trà lớp 10 nhận diện cách giải, sáng tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc và phát triển bài toán mới’ tôi đánh giá kết quả học tập của học sinh bằng điểm số. Tôi chọn lớp 10C4 làm lớp dạy thực nghiệm và lớp 10C1 làm lớp dạy học đối chứng. Kết quả sau khi kiểm tra được thống kê qua bảng sau :

<i>Lớp</i>	<i>Sĩ số</i>	<i>Kết quả</i>									
		<i>Giỏi</i>		<i>Khá</i>		<i>Trung bình</i>		<i>Yếu</i>		<i>Kém</i>	
		<i>SL</i>	<i>%</i>	<i>SL</i>	<i>%</i>	<i>SL</i>	<i>%</i>	<i>SL</i>	<i>%</i>	<i>SL</i>	<i>%</i>
10C4	47	12	25,5	17	36,2	15	31,9	3	6,4	0	0
10C1	40	5	12,5	9	22,5	19	47,5	7	17,5	0	0

Như vậy, qua quá trình dạy học thực nghiệm và kết quả thống kê cho thấy đề tài nghiên cứu có tính khả thi và áp dụng rộng rãi trong việc dạy học chủ đề ‘ Hệ phương trình có yếu tố đồng bậc’ nói riêng và chủ đề ‘ Hệ phương trình’ nói chung.

Mặt khác, trong giai đoạn hiện nay, hệ thống bài tập trong các tài liệu tham khảo không phải là ít. Vấn đề là các bài tập này được bắt nguồn từ đâu ? tạo ra thế nào, nếu chỉ dừng ở việc sử dụng mà không biết khai thác, sáng tạo thêm thì cả thầy lẫn trò sẽ lúng túng trong việc sử dụng nguồn tài liệu, tạo nguồn kiến thức của chính mình. Thông qua cách áp dụng đề tài vào giảng dạy , các thầy cô càng phát huy được tính sáng tạo cùng học trò của mình, nâng cao năng lực chuyên môn và làm nhiều thêm kho tài liệu kiến thức của Nhà trường.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

- **Kết luận.**

Qua quá trình nghiên cứu và áp dụng đề tài vào giảng dạy, tôi nhận thấy đề tài có tính khả thi và ứng dụng cao. Học sinh đã nâng cao được năng lực tư duy toán học, các em linh hoạt hơn trong học toán, biết đặc biệt hóa, tương tự hóa,...một vấn đề toán học từ đó biết cách khai thác và phát triển thành vấn đề mới hơn, cao hơn. Với kinh nghiệm chưa nhiều, kiến thức còn hạn chế, tôi rất mong được sự góp ý của bè bạn đồng nghiệp để đề tài được hoàn thiện và áp dụng rộng hơn vào thực tiễn.

- **Kiến nghị.**

Sở Giáo dục và Đào tạo cần tập hợp các sáng kiến kinh nghiệm hay thành tạp san phổ biến tới các trường học để mỗi giáo viên cùng với tổ chuyên môn thảo luận, học tập kinh nghiệm và áp dụng linh hoạt vào thực tiễn ở trường mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 18 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. (Kí và ghi rõ họ tên) <i>Phạm Thu Hằng</i>
--------------------------------	--

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU.....	Trang 1
• Lí do chọn đề tài.....	Trang 1
• Mục đích nghiên cứu.....	Trang 1
• Đối tượng nghiên cứu	Trang 1
• Phương pháp nghiên cứu	Trang 1
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	Trang 2
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm.....	Trang 2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.	Trang 2
2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.	Trang 2
2.3.1. Giải pháp tổ chức thực hiện.....	Trang 2
2.3.2. Nhận diện hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.	Trang 2
1. Phương trình có yếu tố đồng bậc (đẳng cấp)	Trang 2
2. Hệ phương trình đồng bậc (đẳng cấp)	Trang 3
3. Hệ quy về đồng bậc.....	Trang 4
2.3.3. Một số cách sáng tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.....	Trang 7
1. Từ một nghiệm chọn trước của hệ tạo ra các phương trình trong hệ.....	Trang 7
2. Từ phương trình bậc cao giải được tạo hệ phương trình có yếu tố đồng bậc	Trang 9
3. Từ các hằng đẳng thức cơ bản xây dựng hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.....	Trang 10
2.3.4. Một số cách phát triển bài toán mới từ hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.	Trang 12
1. Đặc biệt hóa yếu tố trong phương trình đồng bậc.	Trang 12
2. Đặt ẩn phụ mới từ ẩn phụ ban đầu của hệ phương trình có yếu tố đồng bậc.....	Trang 13
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.	Trang 15
3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ.....	Trang 17
• Kết luận.....	Trang 17
• Kiến nghị.	Trang 17
TÀI LIỆU THAM KHẢO	Trang 18

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Tài Chung, Sáng tạo và giải phương trình hệ phương trình bất phương trình, NXB Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh.
- [2]. Lê Văn Đoàn, Tư duy sáng tạo tìm tòi lời giải phương trình bất phương trình hệ phương trình đại số vô tỷ, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [3]. Đặng Thành Nam, Những điều cần biết luyện thi Quốc gia kỹ thuật giải nhanh hệ phương trình, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [4]. Phạm Bình Nguyên - Nguyễn Ngọc Duyệt, Bí quyết chinh phục kì thi Quốc gia 2 trong 1 chủ đề phương trình bất phương trình hệ phương trình, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [5]. Mai Xuân Vinh - Phạm Kim Chung- Phạm Chí Tuân- Đào Văn Chung - Dương Văn Sơn, Tư duy logic tìm tòi lời giải hệ phương trình, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội
- [6]. Nhóm tác giả Lovebook, Chinh phục hệ phương trình, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.