

**ỨNG DỤNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**BẬC NHẤT BA ẨN**

**2**

❶. Giáo viên Soạn: Nguyễn Thị Thủy. FB: Thủy Nguyễn

|  |  |
| --- | --- |
| **Thuật ngữ**   * Hàm cung * Hàm cầu * Cân bằng cung – cầu | **Kiến thức, kĩ năng**   * Vận dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn vào giải một số bài toán vật lí, hóa học và sinh học. * Vận dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn để giải quyết một số vấn đề thực tiễn cuộc sống. |

**.**

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn được vận dụng để giải quyết rất nhiều bài toán khác nhau. Trong bài này, ta sẽ gặp một số ví dụ vận dụng như vậy trong các lĩnh vực vật lí, hóa học, sinh học, kinh tế học, … Chúng ta cũng sẽ được làm quen với một số dạng toán giải bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

1. **GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬT LÍ, HÓA HỌC VÀ SINH HỌC**

**ỨNG DỤNG TRONG SINH HỌC**

Trong sinh học có nhiều bài toán dẫn đến việc giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn. Dưới đây giới thiệu hai ví dụ đơn giản trong ngành chăn nuôi và ngành sinh thái.

|  |  |
| --- | --- |
| *Bài toán sản xuất gà giống*. Trong trang trại sản xuất gà giống, việc lựa chọn tỉ lệ giữa gà trống và gà mái rất quan trọng. Nếu quá nhiều gà trống thì không hiệu quả kinh tế, nếu ít gà trống quá thì ảnh hưởng đến hiệu quả sản xuất gà giống. Các nghiên cứu chỉ ra rằng tỉ lệ giữa gà trống và gà mái để sản xuất gà giống hiệu quả nhất là 1:10,5. Một đàn gà trưởng thành có tổng số 3000 con. Trong đó tỉ lệ giữa gà trống và gà mái là 5:3. Cần chuyển bao nhiêu gà trống cho mục đích nuôi lấy thịt để hiệu quả cao nhất? | *Trang trại sản xuất gà giống* |

**HĐ1:** Gọi số gà trống trong đàn gà là x, số gà mái trong đàn gà là y, số gà trống cần chuyển

sang mục đích nuôi lấy thịt là z.

1. Điều kiện của x, y và z là gì?
2. Từ giả thiết của bài toán. Hãy tìm ba phương trình bậc nhất ràng buộc x, y và z, từ đó có một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.
3. Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn thu được. Từ đó đưa ra câu trả lời cho bài toán.

**Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, ta tiến hành theo ba bước sau:**

***Bước 1***. Lập hệ phương trình:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn.

- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

- Lập các phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

***Bước 2.*** Giải hệ phương trình nói trên.

***Bước 3***. Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1.** Một khu rừng ngập mặn có diện tích là 1ha**.** Bằng kĩ thuật viễn thám, người ta ước lượng sinh khối trên mặt đất của rừng này là 87,2 tấn/ha. Người ta đếm được trong các ô tiêu chuẩn 100 m2 có tổng số 161 cây, trong đó số cây bần bằng 15% tổng số cây mắm và cây đước. Khối lượng trung bình của một cây bần là 10kg, cây đước là 5kg và cây mắm là 1kg. Hãy tính sinh khối của từng loài trên 1 ha rừng.  **Giải**  Đổi: 87,2 tấn = 87 200 kg; 1ha = 10 000m2.  Gọi  theo thứ tự là số cây bần, cây đước và cây mắm trong 1 ha rừng ngập mặn nói trên.  100 m2 có tổng số 161 cây nên 10 000  có số cây là  .  Do đó  Số cây bần bằng tổng số cây mắm và cây đước nên ta có  hay .  Khối lượng trung bình cây bần là 10kg, cây đước là 5kg và cây mắm là 1kg nên ta có    Vậy theo bài ta có hệ phương trình | Việc giải nhiều bài toán trong thực tiễn dẫn đến phải đặt ẩn và giải hệ phương trình. Cách làm như vậy được gọi là giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.    Sinh khối (còn gọi là sinh khối loài) là tổng trọng lượng của sinh vật sống trong sinh quyển hoặc số lượng sinh vật sống trong một đơn vị diện tích.  Theo SGK sinh học 12. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam , 2017 |

Dùng máy tính cầm tay ta giải được 

Vậy sinh khối bần là tấn/ha; sinh khối đước là tấn/ha; và sinh khối mắm là tấn/ha.

**ỨNG DỤNG TRONG HÓA HỌC**

Ứng dụng đơn giản nhất của hệ phương trình bậc nhất trong môn Hóa học là để cân bằng phương trình phản ứng hóa học. Các hệ phương trình trong trường hợp này thường có vô số nghiệm và người ta thường chọn nghiệm nguyên dương nhỏ nhất. Đầu tiên là xét phản ứng giữa khí hydrogen tác dụng với oxygen ở nhiệt độ cao để tạo thành nước.

**Ví dụ 2.** Cân bằng phương trình phản ứng hóa học 

**Giải**

Giả sử  là ba số nguyên dương thỏa mãn cân bằng phản ứng



Vì số nguyên tử hydrogen và oxygen ở hai vế phải bằng nhau nên ta có hệ

.

Về mặt toán học, hệ này có vô số nghiệm, tuy nhiên người ta thường chọn bộ nghiệm nguyên dương nhỏ nhất. Cụ thể chọn  ta được . Từ đó ta được phương trình cân bằng



Ta xét một phản ứng nữa rất quan trọng trong hóa sinh là phản ứng quang hợp, tức là quá trình thu nhận và chuyển hóa năng lượng ánh sáng mặt trời của thực vật tạo ra hợp chất hữu cơ (glucose) làm nguồn thức ăn cho hầu hết sinh vật trên Trái Đất.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 3.** Cân bằng phương trình phản ứng quang hợp (dưới điều kiện ánh sáng và chất diệp lục):    **Giải**  Giả sử  là bốn số nguyên dương thỏa mãn cân bằng phản ứng    Vì số nguyên tử carbon, hydrogen và oxygen ở hai vế phải bằng nhau nên ta có hệ    Đặt  ta được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn  hay | Quang hợp là quá trình thu nhận và chuyển hóa năng lượng ánh sáng mặt trời của thực vật, tảo và một số vi khuẩn để tạo ra hợp chất hữu cơ (đường glucose) phục vụ bản thân cũng như làm nguồn thức ăn cho hầu hết các sinh vật trên Trái Đất.  Theo SGK sinh học 11. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2017 |

Dùng máy tính cầm tay giải hệ sau cùng ta được, từ đây suy ra .

Chọn  ta được . Từ đó ta được phương trình cân bằng



**ÚNG DỤNG TRONG VẬT LÍ**

Nhiều bài toán tính điện trở, cường độ dòng điện trong Điện học; tính vận tốc, gia tốc trong Cơ học cũng dẫn đến giải hệ phương trình bậc nhất.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 4.** *(Bài toán tính cường độ dòng điện)*Cho đoạn mạnh như Hình 1.1. Biết rằng  và hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch . Gọi  là cường độ dòng điện của mạch chính,  và  là cường độ dòng điện mạch rẽ. Tính , và .  **Giải**  Từ sơ đồ mạch điện, ta thấy , và  là nghiệm của hệ phương trình | ***Hình 1.1*** |

**** hay ****

**Dùng máy tính cầm tay giải hệ ta được** .

**Luyện tập 1.** Cân bằng phương trình phản ứng hóa học đốt cháy octane trong oxygen



**Giải**

Giả sử  là bốn số nguyên dương thỏa mãn cân bằng phản ứng



Vì số nguyên tử carbon, hydrogen và oxygen ở hai vế phải bằng nhau nên ta có hệ



Đặt  ta được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

hay 

Chọn  ta được . Từ đó ta được phương trình cân bằng





**ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN**

**2**

❶. Giáo viên Soạn: Quách Đăng Thăng FB: Thang Quach

❷. Giáo viên phản biện:………Trương Văn Tâm…...……..FB:……Van Tam Truong….……….

**2. GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG CUNG-CẦU**

Các nhà kinh tế học đã chỉ ra rằng, giá cả của một mặt hàng bán trên thị trường phụ thuộc vào ba yếu tố chính. Thứ nhất, phụ thuộc vào giá trị của bản thân hàng hoá đó. Thứ hai, phụ thuộc vào giá trị đồng tiền. Thứ ba, phụ thuộc vào quan hệ cung và cầu về mặt hàng đó.

Trong thị trường nhiều mặt hàng, giá cả của mặt hàng này có ảnh hưởng tới giá cả của mặt hàng khác và giá cả của hàng hoá có ảnh hưởng đến lượng cung và lượng cầu của thị trường. Khi phân tích hoạt động của thị trường hàng hoá, các nhà kinh tế học sử dụng hàm cung và hàm cầu để biểu thị sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá cả hàng hoá. Người ta thường phải giải bài toán cân bằng giữa cung và cầu. Bài toán này thường dẫn đến việc giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn.

Để đơn giản, ta xét thị trường thực phẩm gồm ba loại mặt hàng là thịt lợn, thịt bò và thịt gà. Khi thịt lợn đắt, thịt bò và thịt gà rẻ thì người tiêu dùng có xu hướng giảm mua thịt lợn, tăng mua thịt bò và thịt gà.

Kí hiệu  lần lượt là giá của  thịt lợn,  thịt bò và  thịt gà, ở đây  và đơn vị là nghìn đồng. Kí hiệu:

**HĐ2:**

 là lượng thịt lợn mà người bán chấp thuận bán với giá .

 là lượng thịt bò mà người bán chấp thuận bán với giá .

 là lượng thịt gà mà người bán chấp thuận bán với giá .

 là lượng thịt lợn mà người mua chấp thuận mua với giá .

 là lượng thịt bò mà người mua chấp thuận mua với giá .

 là lượng thịt gà mà người mua chấp thuận mua với giá .

1. Mức giá thịt lợn , thịt bò  và thịt gà  phải thỏa mãn điều kiện gì để người bán và người mua cùng hài lòng, tức là mức giá hợp lí nhất?
2. Viết hệ phương trình ràng buộc giữa  để người bán và người mua cùng hài lòng.

|  |
| --- |
| Trong kinh tế học người ta gọi:   * Các hàm ,  và  phụ thuộc vào ba biến giá  là hàm cung (supply function); * Các hàm ,  và  phụ thuộc vào ba biến giá  là hàm cầu (demand funtion); * Hệ phương trình  gọi là hệ phương trình cân bằng cung – cầu. |

Cho biết

**Ví dụ 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| Hàm cung thịt lợn là | Hàm cầu thịt lợn là |
| Hàm cung thịt bò là | Hàm cầu thịt bò là |
| Hàm cung thịt gà là | Hàm cầu thịt gà là |

Hãy giải hệ phương trình cân bằng cung – cầu.

**Giải**

Hệ phương trình cân bằng cung – cầu là 

Thu gọn ta được hệ phương trình .

Dùng máy tính cầm tay giải hệ, ta được .

Vậy giá thịt lợn 90 nghìn đồng/kg, thịt bò 240 nghìn/kg và thịt gà 100 nghìn/kg là giá bán hợp lí nhất.

**Chú ý.** Trong thực tế, thị trường hàng hóa rất phức tạp vì có nhiều mặt hàng. Khi đó, hệ phương trình cân bằng cung – cầu là một hệ phương trình nhiều ẩn, nhiều phương trình và do đó rất khó giải. Ngoài ra, giá cả của hàng hóa còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác nữa, cứ không phải chỉ là quan hệ cung – cầu.

Xét thị trường hải sản gồm ba mặt hàng là cua, tôm và cá. Kí hiệu  lần lượt là giá 1 kg cua, 1 kg tôm và 1 kg cá (đơn vị nghìn đồng). Kí hiệu ,  và  là lượng cua, tôm và cá mà người bán bằng lòng bán với giá  và . Kí hiệu ,  và  tương ứng là lượng cua, tôm và cá mà người mua bằng lòng mua với giá  và . Cụ thể các hàm này được cho bởi

**Luyện tập 2.**

; 

; 

; 

Tìm mức giá cua, tôm và cá mà người bán và người mua cùng hài lòng.

**Giải**

Hệ phương trình cân bằng cung – cầu là 

Thu gọn ta được hệ phương trình .

Dùng máy tính cầm tay giải hệ, ta được .

Vậy giá cua 600 nghìn đồng/kg, tôm 300 nghìn/kg và cá 400 nghìn/kg là giá bán hợp lí nhất.

**BÀI TẬP**

**1.7.** Cho hàm cung và hàm cầu của ba mặt hàng như sau:

; 

; 

; 

Hãy xác định giá cân bằng cung – cầu của ba mặt hàng.

**Giải**

Hệ phương trình cân bằng cung – cầu là 

Thu gọn ta được hệ phương trình .

Dùng máy tính cầm tay giải hệ, ta được .

Vậy giá của ba mặt hàng là .

**1.8.** Em Hà so sánh tuổi của mình với chị Mai và anh Nam. Hiện tại, tuổi của anh Nam gấp ba lần tuổi của em Hà. Bảy năm trước, tuổi của chị Mai bằng nửa số tuổi của anh Nam. Ba năm sau, tuổi của anh Nam bằng tổng số tuổi của chị Mai và em Hà. Hỏi tuổi hiện tại của mỗi người là bao nhiêu?

**Giải**

Gọi  lần lượt là số tuổi hiện tại của anh Nam, chị Mai và em Hà.

Ta có hệ .

Vậy số tuổi hiện tại của anh Nam là 39 tuổi, chị Mai là 23 tuổi và em Hà là 13 tuổi.

**1.9.** Bác Việt có 330 740 nghìn đồng, bác chia số tiền này thành ba phần và đem đầu tư vào ba hình thức: Phần thứ nhất bác đầu tư vào chứng khoán với lãi thu được 4% một năm; phần thứ hai bác mua vàng thu lãi 5% một năm và phần thứ ba bác gửi tiết kiệm với lãi suất 6% một năm. Sau một năm, kể cả gốc và lãi bác thu được ba món tiền bằng nhau. Hỏi tổng số tiền cả gốc và lãi bác thu được sau một năm là bao nhiêu?

**Giải**

Gọi  lần lượt là số tiền Bác Việt đầu tư vào chứng khoán, mua vàng và gửi tiết kiệm.

Sau một năm, số tiền cả gốc lẫn lãi của đầu tư chứng khoán là .

Sau một năm số tiền cả gốc lẫn lãi của mua vàng là .

Sau một năm số tiền cả gốc lẫn lãi của gửi tiết kiệm là .

Theo bài ra ta có .

Vậy số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau một năm của Bác Việt là  nghìn đồng.

**1.10.** Một tuyến cáp treo có ba loại vé sau đây: vé đi lên giá 250 nghìn đồng; vé đi xuống giá 200 nghìn đồng và vé hai chiều giá 400 nghìn đồng. Một ngày nhà ga cáp treo thu được tồng số tiền là 251 triệu đồng. Tìm số vé bán ra mỗi loại, biết rằng nhân viên quản lí cáp treo đếm được 680 lượt người đi lên và 520 lượt người đi xuống.

**Giải**

Gọi  lần lượt là số vé đi lên, đi xuống và hai chiều của cáp treo.

Ta có .

Vậy có 220 vé đi lên, 60 vé đi xuống và 460 vé hai chiều.

**1.11.** Ba lớp 10A, 10B, 10C của một trường trung học phổ thông gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Tính trung bình, mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây xoan và 4 cây bạch đàn; mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây xoan và 5 cây bạch đàn; mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây xoan. Cả ba lớp trồng được tổng cộng 476 cây xoan và 375 cây bạch đàn. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu em?

**Giải**

Gọi  lần lượt là số học sinh lớp 10A, 10B và 10C.

Ta có 

Vậy lớp 10A có 40 học sinh, lớp 10B có 43 học sinh và lớp 10C có 45 học sinh.

**1.12.** Cân bằng phương trình phản ứng hoá học đốt cháy methane trong oxygen



**Giải**

Giả sử  thỏa mãn phương trình cân bằng



Vì số nguyên tử carbon, hydrogen và oxygen ở hai vế phải bằng nhau nên ta có hệ

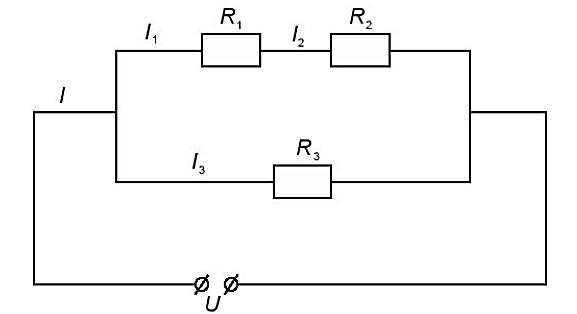


Đặt  ta có hệ .

Suy ra . Chọn .

Vậy .

**1.13.** Cho đoạn mạch như Hình 1.2. Gọi  là cường độ dòng điện của mạch chính, ,  và  là cường độ dòng điện mạch rẽ. Cho biết  và . Tính điện trở  và hiệu điện thế  giữa hai đầu đoạn mạch.



Hình 1.2

**Giải**

Từ sơ đồ mạch điện, ta thấy ,  và  là nghiệm của hệ phương trình 

Lại có .

Vậy .

**1.14.** Mỗi giai đoạn phát triển của thực vật cần phân bón với tỉ lệ  nhất định. Bác An làm vườn muốn bón phân cho một cây cảnh có tỉ lệ  cân bằng nhau. Bác An có ba bao phân bón, bao gồm:

Bao 1 có tỉ lệ  là 12:7:12.

Bao 2 có tỉ lệ  là 6:30:25.

Bao 3 có tỉ lệ  là 30:16:11.

Hỏi phải trộn ba loại phân bón trên với tỉ lệ bao nhiêu để có hỗn hợp phân bón với tỉ lệ  là 15:15:15?

Chú ý rằng trên mỗi bao phân bón người ta thường viết một tỉ lệ  nhất định. Chẳng hạn trên bao phân 1 ghi tỉ lệ  là 12:7:12 nghĩa là hàm lượng đạm  (nitơ) chiếm , lân  (tức là ) chiếm  và kali  (tức là ) chiếm , còn các loại khác chiếm .

**Giải**

Gọi  là tỉ lệ phải trộn ba loại phân bón trên để có hỗn hợp phân bón với tỉ lệ  là 15:15:15.

Ta có hệ .

Vậy phải trộn ba loại phân bón trên với tỉ lệ  hay .

**Em có biết?**

Wassily Leontief (1906 - 1999) là nhà kinh tế học người Mĩ, gốc Nga. Ông đã đóng góp một số lí thuyết sâu sắc cho kinh tế học, trong đó mô hình kinh tế Leontief đưa ông đến với giải thưởng Nobel năm 1973. Mô hình kinh tế Leontief biểu thị sự phụ thuộc giữa các ngành sản xuất trong một nền kinh tế bởi một hệ phương trình bậc nhất: Xét một nền kinh tế gồm  ngành sản xuất hàng hoá . Để sản xuất, mỗi ngành cần tiêu thụ hàng hoá của bản thân ngành mình và các ngành khác của nền kinh tế đó. Giả sử để sản xuất ra một đơn vị hàng hoá, ngành  cần tiêu thụ  đơn vị hàng hoá của ngành . Vấn đề đặt ra là tính số đơn vị hàng hoá mà mỗi ngành trên cần sản xuất để sau tiêu thụ do sản xuất, ngành   có thể xuất ra ngoài nền kinh tế nói trên  đơn vị hàng hoá.



**Wassily Leontief (1906 - 1999)**

Gọi  tương ứng là số đơn vị hàng hoá mà các ngành  cần sản xuất. Để sản xuất  đơn vị hàng hoá, ngành  cần tiêu thụ  đơn vị hàng hoá của ngành . Do đó, sau tiêu thụ do sản xuất, số đơn vị hàng hoá ngành  còn lại là .

Sau tiêu thụ do sản xuất, ngành  còn  đơn vị hàng hoá nên ta có hệ phương trình (với  ẩn là  ):

 hay là 

Trong trường hợp , hệ trên sẽ trở thành hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Trong Bài 1, em đã được học phương pháp Gauss để giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn. Phương pháp Gauss còn được áp dụng cho hệ phương trình bậc nhất  ẩn, do đó hệ phương trình gắn với mô hình kinh tế Leontief là hoàn toàn có thể giải quyết được.

**(Theo sách: Wassily Leontief (1986), Input-output Economics, Oxford University Press).**