|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **HÀ NỘI AMSTERDAM**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT**  *(Đề thi gồm:01 trang)* | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **Năm 2023**  **MÔN: TOÁN - LỚP 10**  Thời gian làm bài : 180 phút |

**Bài 1**. Giải hệ phương trình:



**Bài 2.** Cho các số thực dương  thỏa mãn 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:



**Bài 3.** Cho đoạn thẳng  cố định, trung điểm . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  lấy điểm  thay đổi sao cho tam giác  cân tại . Gọi  đối xứng  qua .  là điểm thuộc miền trong của góc  sao cho  và đường tròn ngoại tiếp các tam giác ,  tiếp xúc với nhau. Chứng minh  luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

**Bài 4.** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  thỏa mãn  chia hết 

**Bài 5.** Cho một dãy 2023 số  có các số hạng đôi một khác nhau. Lấy ra khỏi dãy 4 số hạng bất kỳ rồi lại xếp chúng vào 4 vị trí đó nhưng theo thứ tự ngược lại.

Ví dụ, lấy ra  rồi xếp lại vào các vị trí tương ứng .

Với dãy nhận được lại tiếp tục làm như vậy… Hỏi sau hữu hạn bước thực hiện thuật toán trên, ta có thể nhận lại được dãy  không?

-------------------- HẾT --------------------

|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **HÀ NỘI AMSTERDAM** | **KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **MÔN: TOÁN - LỚP 10**  Thời gian làm bài : 180 phút |

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ ĐỀ XUẤT KHỐI 10**

**Bài 1**. Giải hệ phương trình:

Lời giải:

Điều kiện xác định: .

Phương trình (2) .

(vì (3;1) không thỏa phương trình(1))

Thay vào phương trình (1), ta được :

.

Vậy tập nghiệm .

**Bài 2.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn. Tìm GTNN của biểu thức:



Lời giải Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng bộ các số dương, ta có:

**

**

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được:



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

Do đó 

**Bài 3.** Cho đoạn thẳng *BC* cố định, trung điểm *M*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *BC* lấy điểm *A* thay đổi sao cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Gọi *A*’ đối xứng *A* qua *BC*. *P* là điểm thuộc miền trong của góc *A*’*MB* sao cho  và đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BPC*, *A*’*PA* tiếp xúc với nhau. Chứng minh *P* luôn nằm trên một đường thẳng cố định

****

Lời giải:

Gọi *O*1 và *O*2 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác *BPC* và *A*’*PA* => *P*, *O*1 và *O*2 thẳng hàng.

Vì *AA*’ là trung trực *BC* nên *O*1 thuộc *AA*’. Vì *BC* là trung trực *AA*’ nên *O*2 thuộc *BC*.

Ta có biến đổi góc 

Suy ra  và đồng dạng =>  và  là tứ giác nội tiếp.

Từ đó .

Ta có biến đổi 

(áp dụng định lý sin cho đường tròn ngoại tiếp )

Vì *PH* = *PK* nên *P* luôn thuộc tia phân giác của góc *A*’*MB*. Suy ra đpcm.

**Bài 4.** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p,q) thỏa mãn: .

Lời giải:

Nếu một trong hai số nhận giá trị 2, chẳng hạn , thì . Theo định lý Fermat  và vì vậy  hoặc . Hiển nhiên  không thỏa mãn. Vì vậy trường hợp này ta có đáp án là (2;7) và (7;2).

Nếu một trong hai số nhận giá trị 7, có một trường hợp riêng là  dẫn đến đáp án (7;7) được chấp nhận. Còn lại nếu chỉ có đúng một trong hai số bằng 7, chẳng hạn . Ta có  và theo định lý Fermat . Ta có các đáp án.

Xét các trường hợp còn lại . Dẫn tới  , theo địnl lý Fermat . Chọn *k, l* là các số nguyên không âm, và *r, s* là các số lẻ dương sao cho  và .

Nếu  ta sẽ có:, vì vậy , mâu thuẫn. Do đó . Lập luận tương tự ta cũng suy ra , vì vậy không có đáp số trong trường hợp này.

Vậy tập các cặp (p,q) thỏa mãn đề là:



**Bài 5.** Cho một dãy 2023 số *a*1, *a*2,…, *a*2023 có các số hạng đôi một khác nhau. Lấy ra khỏi dãy 4 số hạng bất kỳ rồi lại xếp chúng vào 4 vị trí đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Với dãy nhận được lại tiếp tục làm như vậy… Hỏi bằng cách đó ta có thể nhận lại được dãy *a*2023, *a*2022,…, *a*1 không?

Lời giải:

Ta sẽ giải bài toán trên cho trường hợp dãy có n số hạng đôi một khác nhau: *a*1, *a*2,…, *a*n

Giả sử sau m bước ta nhận được dãy *a*n, *a*n-1,…, *a*1. Ta gọi cặp số (*a*i, *a*j) là một cặp số tốt nếu thỏa mãn hai tính chất sau: i<j và *a*i đứng trước *a*j trong dãy. T(k) là số cặp tốt ở bước thứ k. Mỗi lần thực hiện thuật toán có thể xem như thực hiện một số chẵn lần việc đổi chố hai số hạng liên tiếp. Mỗi lần đổi chỗ hai số hạng liên tiếp thì số cặp tốt sẽ tăng 1 hoặc giảm 1. Do đó 

Mà 

Do đó 

Từ đó suy ra n chia 4 dư 0 hoặc 1.

Mặt khác 2023 chia 4 dư 3 nên không có cách nào nhận được dãy *a*2023, *a*2022,…, *a*1

…………………………………………………………………………………