

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP CỤM TRƯỜNG
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: Toán

Ngày thi: 26/11/2023

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x}$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị nguyên của x sao cho A cũng có giá trị nguyên.

Câu 2: (4,0 điểm)

a. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 + 12x + 16} + \sqrt{y^2 - 4y + 13} = 5$

b. Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Câu 3: (3,0 điểm) Cho Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d) có phương trình

$$y = mx + \frac{1}{2}$$

a. Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

Câu 4: (6,0 điểm) Cho đường tròn tâm O và đường thẳng d cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B, C (d không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm p và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a. Chứng minh: Bốn điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn và AK. $AI = AM^2$

b. Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh: P là trung điểm ME.

Câu 5: (2,0 điểm) Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số khác 0 thỏa mãn:

$$a + b + c = 2019 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2019} \text{ thì một trong ba số a, b, c phải có một số bằng}$$

2019.

-----Hết-----

(Đề thi gồm 01 trang, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.)

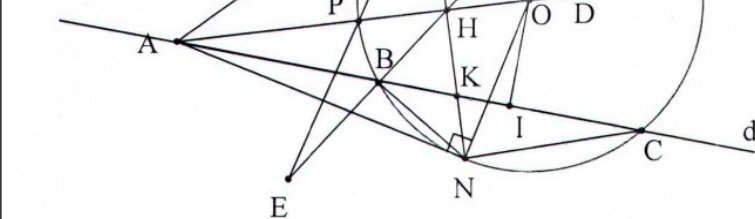
HƯỚNG DẪN
CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP CỤM TRƯỜNG
NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán

Ngày thi: 26/11/2023

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1		5
a	$A = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x} = \sqrt{\frac{x^4 - 6x^2 + 9 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 8x}$	0,5
	$= \sqrt{\frac{(x^2+3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x-2)^2} = \left \frac{x^2+3}{x} \right + x-2 $	0,5
	Nếu $x \geq 2$ $A = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x}$	0,5
	Nếu $0 < x < 2$ thì $A = \frac{2x+3}{x}$	0,5
	Nếu $x < 0$ thì $A = \frac{2x^2 - 2x + 3}{-x}$	0,5
b	Ta thấy $A = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x} = 2x - 2 + \frac{3}{x}$	0,5
	$A = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$	0,75
	$A = \frac{2x^2 - 2x + 3}{-x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}$	0,75
	Vậy để A có giá trị nguyên thì x là ước của 3 hay: $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$.	0,5
Câu 2		4
a	Ta có:	
	$\sqrt{3x^2 + 12x + 16} + \sqrt{y^2 - 4y + 13}$	0,5
	$= \sqrt{3(x+2)^2 + 4} + \sqrt{(y-2)^2 + 9} \geq 2 + 3 = 5$	0,75
	Dấu bằng xảy ra khi $x = -2; y = 2$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-2; 2)$	0,75
b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$ Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$	0,25

	Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$ với $u \geq 0; v \geq 0$ ta có $\begin{cases} u^2 = x+1 \\ v^2 = y \end{cases}$ $\Rightarrow u^2 + v^2 = x + y + 1$. Khi đó hệ đã cho trở thành. $\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ u \cdot v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases}$ Với $u = 2, v = 2$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là (3 ;4)	
Câu 3		3
a	$y = mx + \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 2mx + 1$ Gọi $C(x_0, y_0)$ là điểm cố định của (d) $\Rightarrow C \in (d)$ với mọi m. $\Rightarrow 2y_0 = 2mx_0 + 1$ với mọi m $\Leftrightarrow 2mx_0 = 2y_0 - 1$ với mọi m. $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 0 \\ 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy (d) luôn đi qua một điểm cố định $C(0 ; \frac{1}{2})$	0,5 0,25 0,25 0,5
b	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $\frac{x^2}{2} = mx + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$ Có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ với mọi m $\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N Gọi I là trung điểm của MN thì $X_1 = \frac{1}{2}(X_M + X_N)$ $I \in (d) \Leftrightarrow y_1 = mx_1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(2m) = m \\ y_1 = x_1^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy I thuộc Parabol (P₁): $y = \frac{x^2}{2}$	0,5 0,5 0,5

Câu 4		6đ 0,5
a)	a) Ta có I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA} = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AO (1) Ta có $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (do AM là hai tiếp tuyến (O)) $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AO (2) $\widehat{ANO} = 90^\circ$ (do AN là hai tiếp tuyến (O)) $\Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính AO (3) $\Rightarrow 5$ điểm A, M, N, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính AO. Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác $\widehat{MON}$ mà $\triangle OMN$ cân tại O nên $OA \perp MN$ $\triangle AMO$ vuông tại M đường cao MH nên ta có $AH.AO = AM^2$ $\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO$ (vì $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^\circ$ và $\widehat{OAI}$ chung) Suy ra $AK.AI = AH.AO \Rightarrow AK.AI = AM^2$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,5
b)	Ta có M thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{PMQ} = 90^\circ$ Xét $\triangle MHE$ và $\triangle QDM$ có $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$) $\Rightarrow \triangle MHE$ đồng dạng $\triangle QDM$ $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$ $\triangle PMH$ đồng dạng với $\triangle MQH$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ}$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \frac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow ME = 2MP \Rightarrow P$ là trung điểm ME.	0,25 0,5 0,25 0,25 0,5 0,25

Câu 5		2điểm
--------------	--	--------------

	Từ giả thiết suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{c(a+b+c)}\right) = 0 \Leftrightarrow (a+b) \frac{ac+bc+c^2+ab}{abc(a+b+c)} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow c=2019 \\ b+c=0 \Rightarrow a=2019 \\ c+a=0 \Rightarrow b=2019 \end{cases}$	0,5
	Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	

Lưu ý: Học sinh giải cách khác vẫn có điểm tối đa.

-----Hết-----