

MỤC LỤC

I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài.....	Trang 1
2. Mục đích nghiên cứu.....	Trang 1
3. Đối tượng nghiên cứu.....	Trang 1
4. Phương pháp nghiên cứu.....	Trang 1

II. NỘI DUNG

1. Cơ sở lý luận

1.1. Kiến thức véc tơ.....	Trang 2
1.2. Kiến thức về hình học không gian.....	Trang 2

2. Thực trạng.....

	Trang 3
--	---------

3. Nội dung phương pháp và vận dụng..

3.1. Nội dung phương pháp.....	Trang 3
3.2. Các bài toán.....	Trang 4
3.2.1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	Trang 4
3.2.2. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.....	Trang 12
3.3. Bài tập và đáp số.	
3.3.1. Bài tập tự luyện.....	Trang 15
3.3.2. Đáp số	Trang 16

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.....

	Trang 16
--	----------

III. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

	Trang 18
--	----------

1. Kết luận	Trang 18
2. Đề xuất.....	Trang 18

I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài.

Bài toán tính thể tích của khối đa diện và tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là câu hỏi thường xuất hiện trong đề thi THPT quốc gia hiện nay.

Trong chương trình môn Toán THPT, phần hình học học không gian tập trung nhiều ở lớp 11 và lớp 12. Từ đó hình thành cho học sinh hai phương pháp giải đó là giải bằng công cụ hình học thuần túy hoặc giải bằng phương pháp tọa độ không gian. Tuy nhiên để giải bằng phương pháp tọa độ học sinh còn phải phụ thuộc vào yếu tố của bài toán. Vì vậy, phần nhiều học sinh sử dụng phương pháp hình học không gian thuần túy, phương pháp này đòi hỏi học sinh có tư duy nhạy bén và nắm chắc các yếu tố trong hình học, điều này là một trong những khó khăn đối với học sinh có học lực ở mức khá trở xuống.

Bên cạnh đó, vectơ là nội dung được học từ lớp 10 nhưng để áp dụng nó thì học sinh còn khá lúng túng, vì kể cả các sách tham khảo cũng ít khi hướng dẫn nội dung này trong khi đó đây là một công cụ rất hữu hiệu trong hình học. Từ những vấn đề trên tôi thiết nghĩ áp dụng vectơ vào hình học là một hướng đi rõ ràng hơn cho học sinh đặc biệt là học sinh khá trở xuống. Vì vậy tôi chọn đề tài:

“ Vận dụng phương pháp vectơ giải quyết các bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian”

2. Mục đích nghiên cứu.

Nội dung sáng kiến nhằm mục đích hướng tới giải quyết các vấn đề sau:

- Việc giải toán hình học không gian bằng phương pháp vectơ giúp học sinh rèn luyện kỹ năng, tư duy sáng tạo và sự logic của các phép toán vectơ.
- Giúp học sinh đặc biệt là học sinh khá, trung bình có hướng đi rõ ràng hơn trong việc giải quyết bài toán khoảng cách.

3. Đối tượng nghiên cứu.

Các bài toán khoảng cách trong hình học không gian lớp 11 và lớp 12.

4. Phương pháp nghiên cứu.

Để thực hiện mục đích chọn đề tài, trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp quan sát (quan sát hoạt động dạy và học của học sinh).
- Phương pháp điều tra, khảo sát thực tế (khảo sát thực tế học sinh).
- Phương pháp thực nghiệm.

II. Nội dung sáng kiến.

1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Để sử dụng tốt phương pháp véc tơ vào việc giải quyết các bài toán khoảng cách học sinh cần nắm vững các kiến thức cơ bản của vectơ lớp 10 và kiến thức hình học không gian phần quan hệ vuông góc lớp 11. Cụ thể như sau:

1.1. Kiến thức vectơ.

Trong chương trình lớp 10 học sinh được học về vectơ. Qua đó, học sinh đã nắm được các yếu tố sau:

- Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, vectơ không.
- Tổng và hiệu của 2 vectơ, tích của một số với một vectơ.
- Tính chất trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác:
 - + Nếu I là trung điểm của AB, M là điểm bất kỳ : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
 - + Nếu G là trọng tâm tam giác ABC, M là điểm bất kỳ : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$
- Điều kiện để A,B,C thẳng hàng : $\vec{AB} = k\vec{AC}$ ($k \neq 0$).
- Phân tích một vectơ qua hai vectơ không cùng phương.

Đến chương trình lớp 11, học sinh được học thêm các tính chất của vectơ và các mối quan hệ giữa đường thẳng, mặt phẳng, góc trong không gian.

- Khái niệm góc giữa hai vectơ, mối quan hệ về góc giữa hai vectơ chỉ phương và góc giữa hai đường thẳng.
- Tích vô hướng của 2 vectơ: $a.b = |a||b|.cos(a;b)$
- Điều kiện 3 vectơ đồng phẳng.

Định lý Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$. Khi đó, với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được bộ ba số m, n, p sao cho : $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ 3 số m, n, p là duy nhất.

1.2. Kiến thức về hình học không gian.

Học sinh cần nắm chắc các định nghĩa và định lý, nội dung quan trọng của hình học không gian :

- Đường thẳng vuông góc đường thẳng, đường thẳng vuông góc mặt phẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc, khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, đường thẳng; khoảng cách giữa đường thẳng với mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau,.

Định nghĩa:

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Tính chất:

- a) Khoảng cách từ một đường thẳng a đi qua A và song song với (P) .
 b) Khoảng cách từ một đường thẳng a đi qua A và song song với (P) bằng khoảng cách từ điểm A tới một mặt phẳng (P) .
 c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

$$d) MN \text{ là đường vuông góc chung của } a, b \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

Như vậy, với các kiến thức vector lớp 10 và kiến thức vector và hình học không gian lớp 11 giáo viên có đủ cơ sở để hướng dẫn học sinh giải quyết các bài toán khoảng cách dựa vào phương pháp vector.

2. Thực trạng của vấn đề.

Trong những năm học trước, trong quá trình dạy học sinh tôi đã dùng phương pháp khảo sát thực tế từ học sinh và quan sát công việc dạy và học của giáo viên và học sinh trong nội dung hình học không gian mà cụ thể là bài toán khoảng cách. Tôi thấy nhiều học sinh lúng túng không biết bắt đầu từ đâu để tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng phương pháp hình học thuần túy. Từ đó dẫn đến học sinh ngại học hình học không gian và thường mất điểm ở những câu hỏi này. Khi đó, tôi đã hướng dẫn học sinh vận dụng phương pháp vector vào giải quyết các bài toán khoảng cách, tuy nhiên học sinh gặp rất nhiều trở ngại sau:

- Một số học sinh còn mơ hồ các kiến thức vector.
- Chưa hình thành kỹ năng chọn hệ vector cơ sở sao cho phù hợp bài toán.
- Chưa diễn dịch được ngôn ngữ tổng hợp (hình học thuần túy) thành ngôn ngữ vector.
- Chưa tự giác, tự nghiên cứu và chưa làm nhiều bài tập theo phương pháp vector.

Từ những vấn đề trên, khi áp dụng vào dạy học sinh năm học 2015 – 2016 tôi đã có những biện pháp khắc phục như sau:

- Rèn luyện kiến thức vector một cách kĩ càng.
- Rèn luyện các bài toán hình học không gian cơ bản để học sinh nắm vững các kiến thức về không gian từ đó chuyển sang ngôn ngữ vector.
- Có hệ thống bài tập đầy đủ, từ đó hướng dẫn học sinh làm bài.

3. Nội dung phương pháp và vận dụng.

3.1. Nội dung phương pháp.

Để hướng dẫn học sinh giải quyết các bài toán khoảng cách dựa vào phương pháp vector, tôi hướng dẫn học sinh thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 Lựa chọn một số vector mà ta gọi là “*hệ vector cơ sở*”; “*phiên dịch*” các giả thiết, kết luận của bài toán hình học không gian đã cho thành “*ngôn ngữ*” vector.

- Đây là một trong những bước rất quan trọng của bài toán, yêu cầu khi chọn vectơ cơ sở ta phải chọn hệ gồm 3 vectơ không đồng phẳng và một điều thuận lợi trong phương pháp này đó là 3 vectơ này không cần chung một gốc.

- Các vectơ cơ sở khi chọn phải tính được tích vô hướng, khi chọn ưu tiên chọn các cặp vectơ khi nhân vô hướng lại bằng 0 nhằm đơn giản bài toán.

- Phiên dịch chính xác ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ vectơ.

Bước 2 Giả sử ta đang cần tìm khoảng cách giữa hai đường chéo nhau AB, CD.

- Gọi M, N là 2 điểm nằm trên 2 đường thẳng chéo nhau AB, CD. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$ qua hệ vectơ cơ sở.

- M, N lần lượt thuộc AB, CD $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD} \end{cases}$

- Sử dụng tính chất tìm điều kiện để MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD. Từ đó tìm x, y.

Bước 3. Chuyển các kết luận vectơ sang các tính chất hình học không gian tương ứng.

3.2. Các bài toán.

3.2.1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Ví dụ 1 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a. (Trích đề thi tuyển sinh Đại học môn toán khối A, A₁ năm 2012.)

Lời giải

***Tính thể tích hình chóp:**

Sử dụng định lý cosin trong tam giác AHC

$$HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2.AH.AC.\cos 60^\circ$$

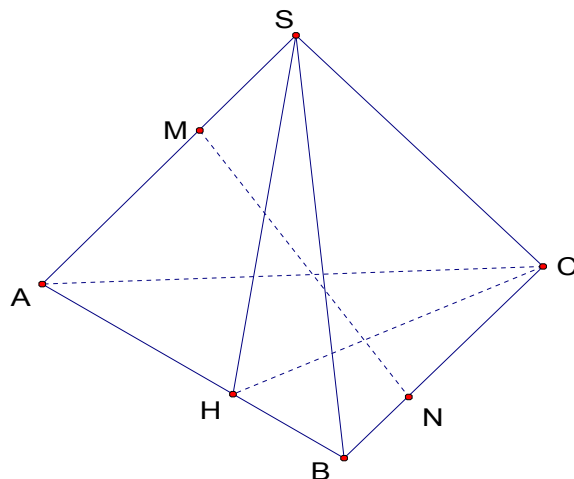
$$HC^2 = \frac{4a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}$$

$$\Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Mặt khác HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là $\angle SHC = 60^\circ$

$$\Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$



Cách 1 Sử dụng phương pháp hình học không gian thuần túy.

Kẻ Ax song song BC. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax, SN. Ta có:

SN. Ta có:

$$\begin{cases} BC \parallel (SAN) \\ BA = \frac{3}{2}HA \end{cases} \Rightarrow d(SA; BC) = d(B; (SAN)) = \frac{3}{2}d(H; (SAN))$$

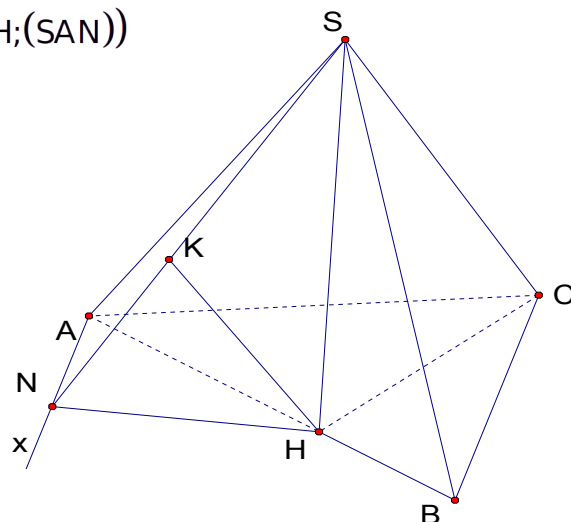
Ta lại có:

$$\begin{cases} Ax \perp (SHN) \Rightarrow Ax \perp HK \\ SN \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H; (SAN)) = HK$$

Trong tam giác SHN ta có:

$$AH = \frac{2a}{3}; HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$



Vậy khoảng cách giữa SA và BC là :

$$d(SA; BC) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{12} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

Cách 2 (Sử dụng phương pháp vectơ)

***Tính khoảng cách giữa SA và BC**

- Chọn hệ vectơ cơ sở: $\vec{BC} = \vec{a}; \vec{BA} = \vec{b}; \vec{SH} = \vec{c}$.

$$\text{Khi đó} \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = a; |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{21}}{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}; \vec{a} \cdot \vec{c} = 0; \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

- Biểu diễn $\vec{SA}; \vec{BC}$ qua hệ vectơ cơ sở $\begin{cases} \vec{BC} = \vec{a} \\ \vec{SA} = \vec{SH} + \vec{HA} = \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c} \end{cases}$

- Gọi $M \in SA; N \in BC$ sao cho: $\begin{cases} \vec{SM} = x\vec{SA} = \frac{2}{3}x\vec{b} + x\vec{c} \\ \vec{BN} = y\vec{BC} = y\vec{a} \end{cases}$

$$\vec{MN} = \vec{MS} + \vec{SB} + \vec{BN} = -\frac{2}{3}x\vec{b} - x\vec{c} + \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} + y\vec{a} = y\vec{a} - \frac{1}{3}(2x+1)\vec{b} + (1-x)\vec{c} \quad (1)$$

Để MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC thì:

$$\begin{cases} MN \perp SA \\ MN \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{3}ab - \frac{2}{9}(2x+1)b^2 + (1-x)c^2 = 0 \\ ya^2 - \frac{1}{3}(2x+1)ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{3}a^2 - \frac{2}{9}(2x+1)a^2 + (1-x)\frac{21a^2}{9} = 0 \\ ya^2 - \frac{1}{3}(2x+1)\frac{a^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{3}x + y = \frac{-19}{3} \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13/16 \\ y = 7/16 \end{cases}$$

Thế vào (1) ta được:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{7}{16}a - \frac{7}{8}b + \frac{3}{16}c$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\left(\frac{7}{16}a - \frac{7}{8}b + \frac{3}{16}c\right)^2} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

Vậy khoảng cách giữa SA và BC là MN.

Nhận xét: Trong những bài toán có câu thể tích, tôi không khuyến khích dùng phương pháp vector vì đa số các câu thể tích có thể giải quyết ngay bằng phương pháp hình học thông thường. Nhưng đối với nội dung khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nếu giải quyết bài toán theo phương pháp hình học thuần túy cần dựng thêm hình, đây là một việc khá khó khăn đối với học sinh khá. Khi đó, phương pháp vector đã giải quyết rất hiệu quả, ta còn xác định được chính xác vị trí của 2 điểm M, N.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD), SC tạo với đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB. (Trích đề thi THPT quốc gia 2015)

Lời giải

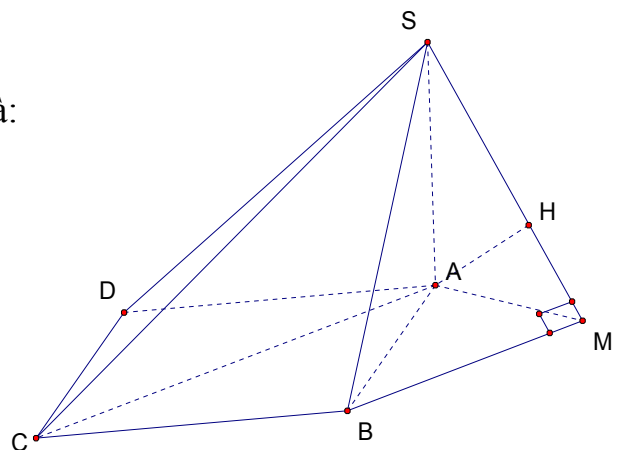
***Tính thể tích của khối chóp**

Góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) là:

$$\angle SCA = 45^\circ$$

$$\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$$

Vậy thể tích của khối chóp là :



$$V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} . a^2 . a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

***Tính khoảng cách giữa AC và SB.**

Cách 1: Phương pháp hình học không gian thuần túy.

Qua A kẻ đường thẳng d song song với AC. Gọi M là hình chiếu của S trên d, H là hình chiếu của A trên SM.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AM \perp BM \\ SA \perp BM \end{cases} \Rightarrow (SAM) \perp BM$$

$$\Rightarrow AH \perp BM$$

Mặt khác: $AH \perp SM$

$$\Rightarrow AH \perp (SBM)$$

$$\text{Ta có: } d(AC; SB) = d(AC; (SMB)) = d(A; (SMB)) = AH$$

Trong tam giác ABM vuông tại M, $\angle ABM = 45^\circ$

$$\Rightarrow AB = BM \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ABM có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy khoảng cách giữa AC và SB là $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Cách 2 Phương pháp vector.

- Chọn hệ vector cơ sở: $\vec{AD} = \vec{a}; \vec{AB} = \vec{b}; \vec{SA} = \vec{c}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a\sqrt{2} \end{cases}$$

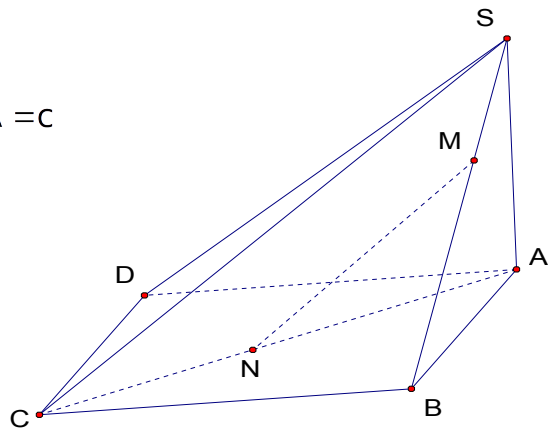
- Biểu diễn $\vec{SB}; \vec{AC}$ qua hệ vector cơ sở:

$$\begin{cases} \vec{SB} = \vec{SA} + \vec{AB} = \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$

Lấy điểm M thuộc SB; N thuộc AC sao cho:

$$\begin{cases} \vec{SM} = x\vec{SB} = x(\vec{b} + \vec{c}) = x.\vec{b} + x.\vec{c} \\ \vec{AN} = y.\vec{AC} = \frac{1}{2}y.\vec{a} + \frac{1}{2}y.\vec{b} \end{cases}$$

Ta có:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AN} = -x(b+c) + c + y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}y.\overrightarrow{a} + \left(\frac{1}{2}y - x\right)\overrightarrow{b} + (1-x)\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{MN}$ là đoạn vuông góc chung của AC và SB khi :
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}y.\overrightarrow{a}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y - x\right)b^2 = 0 \\ \left(\frac{1}{2}y - x\right)b^2 + (1-x)c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y.a^2 + \left(\frac{1}{2}y - x\right)a^2 = 0 \\ \left(\frac{1}{2}y - x\right)a^2 + (1-x)2a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ \frac{1}{2}y - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4/5 \\ y = 4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{a} - \frac{2}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{5}\overrightarrow{c} \Rightarrow MN = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a} - \frac{2}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{5}\overrightarrow{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là $MN = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Nhận xét Đối với bài toán này, việc kẻ thêm đường thẳng qua A và song song với AC không hề dễ dàng đối với học sinh khá trở xuống. Trong bài toán này mọi giả thiết đều rất phù hợp để ta lựa chọn phương pháp vector, với phương pháp này học sinh dễ dàng giải quyết bài toán.

Ví dụ 3 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Cạnh đáy có độ dài là a , biết góc giữa 2 đường thẳng AB' và BC' là 60° . Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB' và BC' theo a .

Lời giải

Chọn hệ vector cơ sở là: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}; \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{c}$.

Khi đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0; \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0; |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = a \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} = a^2 \end{cases}$$

- Biểu diễn $\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{BC'}$ qua hệ vector cơ sở:

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$$

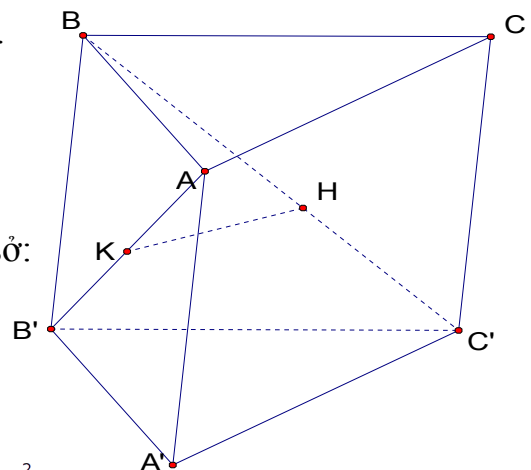
$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

- Dựa vào góc giữa 2 vector $\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{BC'}$

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}^2 = -\frac{a^2}{2} + c^2$$

$$|\overrightarrow{AB'}| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$|\overrightarrow{BC'}| = \sqrt{(-a + b + c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}} = \sqrt{a^2 + c^2}$$



$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{BC'}) = \left| \cos(\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{BC'}) \right| \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AB'}| |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\left| c^2 - \frac{a^2}{2} \right|}{a^2 + c^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = a\sqrt{2}; \quad c=0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } AA' = a\sqrt{2} \text{ hay } |c| = a\sqrt{2}$$

***Tính khoảng cách giữa AB' và BC'**

$$\text{- Lấy điểm } H \in AB'; K \in BC' \text{ sao cho: } \begin{cases} \overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB'} = x(a+c) \\ \overrightarrow{BK} = y\overrightarrow{BC'} = y(-a+b+c) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = -x(a+c) + a + y(-a+b+c) = -(x+y-1)a + yb + (y-x)c \quad (1)$$

$$\text{Để } HK \text{ là đoạn vuông góc chung của } AB' \text{ và } BC' \text{ thì: } \begin{cases} \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0 \\ \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+y-1)a^2 + ab.y + (y-x)c^2 = 0 \\ (x+y-1)a^2 + yb^2 + (y-x)c^2 - (x+2y-1)ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+y-1)a^2 + y \cdot \frac{a^2}{2} + (y-x)2a^2 = 0 \\ (x+y-1)a^2 + ya^2 + (y-x)2a^2 - (x+2y-1)\frac{a^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + \frac{3}{2}y = -1 \\ -\frac{3}{2}x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/9 \\ y = 4/9 \end{cases}$$

Thay x, y vào (1) ta được:

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{9}(4b - c) \Rightarrow HK = \frac{1}{9}\sqrt{(4b - c)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{16b^2 + c^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Nhận xét: Ở hai ví dụ trên ta thấy việc chọn hệ vector cơ sở sau đó giải quyết luôn góc giữa hai đường thẳng bằng phương pháp vector làm bài toán trở nên dễ dàng hơn đối với học sinh so với việc giải bài toán bằng phương pháp hình học không gian.

Ví dụ 4 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm SA, M là trung điểm AE, N là trung điểm BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC. (Trích đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2007)

Lời giải

Gọi O là tâm hình vuông ABCD $\Rightarrow SO$ vuông góc với (ABCD).

*Chọn hệ vector cơ sở: $\overrightarrow{OC} = a; \overrightarrow{OD} = b; \overrightarrow{SO} = c$. Khi đó:

$$\begin{cases} a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = 0 \\ |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

***Chứng minh MN vuông góc BD**

Vì K là trung điểm của SA nên SDAE là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{MA} = \frac{1}{2}\vec{SD} = \frac{1}{2}(\vec{SO} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \vec{AN} = \vec{AO} + \vec{ON} = \vec{AO} + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \\ \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}; \quad \vec{BD} = 2\vec{b} \end{cases}$$

Vậy $\vec{MN} \cdot \vec{BD} = 3.a.b + b.c = 0$

Vậy MN vuông góc với BD

***Tính khoảng cách giữa MN và AC**

Cách 1 Phương pháp hình học không gian thuần túy.

Ta có MNCK là hình bình hành vì MK // CN và MK = CN.

$$\Rightarrow \begin{cases} MN // CK \\ CK \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAC)$$

$$\Rightarrow d(MN; AC) = d(MN; (SAC)) = d(N; (SAC)) = \frac{1}{2}d(B; (SAC))$$

$$\Rightarrow d(MN; AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC là $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

***Cách 2: Phương pháp vector**

Gọi I thuộc MN, H thuộc AC sao cho:

$$\vec{MI} = x\vec{MN} = \frac{3}{2}x\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{c}; \vec{AH} = y\vec{AC} = 2y\vec{a}$$

Khi đó:

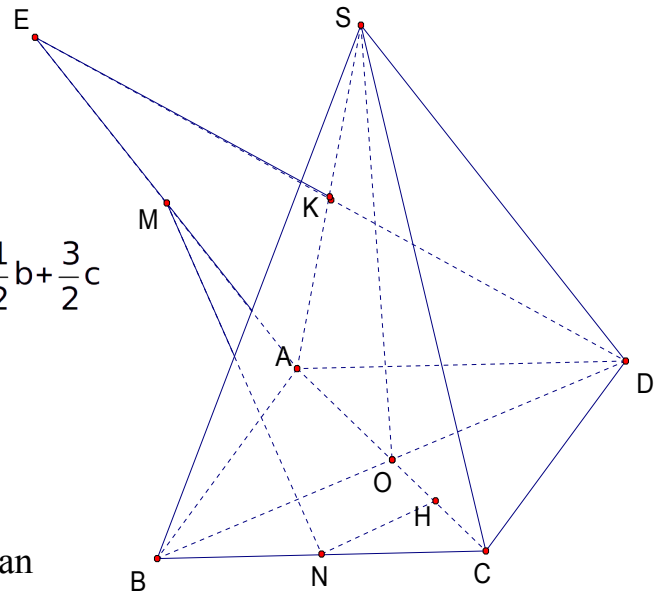
$$\vec{IH} = \vec{IM} + \vec{MA} + \vec{AH} = -\frac{x}{2}(3\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + 2y\vec{a} = \frac{1}{2}(-3x + 4y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}(x - 1)\vec{c}$$

Để IH là đoạn vuông góc chung của AC và MN thì :
$$\begin{cases} \vec{IH} \cdot \vec{MN} = 0 \\ \vec{IH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}(-3x + 4y)^2 - \frac{1}{4}(x - 1)^2 c^2 = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}(-3x + 4y)^2 - \frac{1}{4}(x - 1)^2 a^2 = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}b$$

$$\Rightarrow IM = |\vec{IM}| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là $IM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Nhận xét Ta thấy $x = 1$ nghĩa là $l \equiv N$; $y = \frac{3}{4}$ nghĩa là H là trung điểm của OC. Dễ dàng thấy được đoạn vuông góc chung của AC và MN là HN. Trong bài toán này, xuất hiện yêu cầu chứng minh vuông góc với mục đích để học sinh thấy rõ lợi thế của phương pháp vector.

Ví dụ 5 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN và khoảng cách giữa SM và DN.

Lời giải

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2$

$\Rightarrow$ Tam giác SAB là tam giác vuông tại S.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SAB:

$$AH = \frac{SA^2}{AB} = a ; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

***Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM, DN**

- Chọn hệ vector cơ sở:

$$\vec{AM} = \vec{a}; \vec{CN} = \vec{b}; \vec{SH} = \vec{c}$$

Khi đó:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- Biểu diễn SM, DN qua hệ vector cơ sở:

$$\begin{cases} \vec{SM} = \vec{SH} + \vec{HM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \\ \vec{DN} = \vec{DC} + \vec{CN} = 2\vec{a} + \vec{b} \end{cases}$$

$$\vec{SM} \cdot \vec{DN} = a^2$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{SM}, \vec{DN}) = \frac{\vec{SM} \cdot \vec{DN}}{|\vec{SM}| \cdot |\vec{DN}|} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

***Tính khoảng cách giữa SM và DN**

- Lấy I, K lần lượt thuộc DN, SM sao cho
$$\begin{cases} \vec{MK} = x\vec{SM} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} \right) \\ \vec{DI} = y\vec{DN} = y(2\vec{a} + \vec{b}) \end{cases}$$

Khi đó:

$$\vec{IK} = \vec{ID} + \vec{DM} + \vec{MK} = -y(2\vec{a} + \vec{b}) + 2\vec{b} + \vec{a} + x\vec{c} + \frac{1}{2}x\vec{a}$$

$$\vec{IK} = \left(-2y + 1 + \frac{1}{2}x \right) \vec{a} + (2 - y)\vec{b} + x\vec{c}$$

Để IK là đoạn vuông góc chung của SM và DN thì:
$$\begin{cases} \vec{IK} \cdot \vec{SM} = 0 \\ \vec{IK} \cdot \vec{DN} = 0 \end{cases}$$

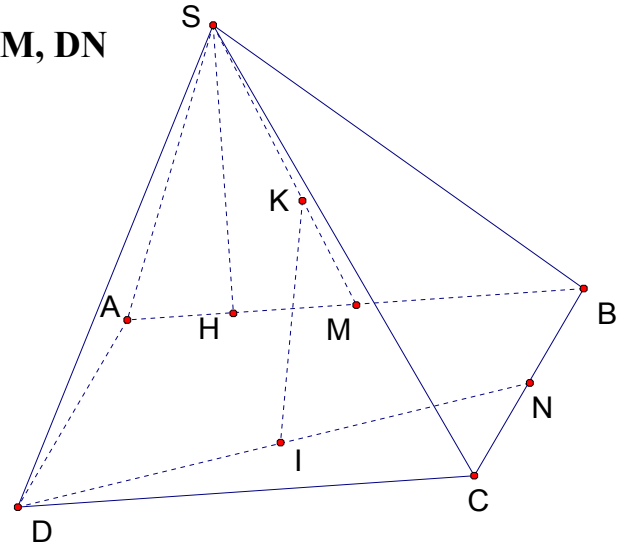
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-2y + 1 + \frac{1}{2}x \right) a^2 + xc^2 = 0 \\ \left(-2y + 1 + \frac{1}{2}x \right) 2a^2 + (2 - y)b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-2y + 1 + \frac{1}{2}x \right) a^2 + x \frac{3a^2}{4} = 0 \\ \left(-2y + 1 + \frac{1}{2}x \right) 2a^2 + (2 - y)a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1/2 \\ x - 5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/8 \\ y = 7/8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{IK} = -\frac{9}{16}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$$

$$\Rightarrow |\vec{IK}| = \sqrt{\left(-\frac{9}{16}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c} \right)^2} = \frac{3\sqrt{93}a}{16}$$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng SM và DN là $IK = \frac{3\sqrt{93}a}{16}$



Nhận xét

Với việc sử dụng phương pháp vector, bài toán đã được giải quyết một cách đơn giản hơn so với phương pháp hình học thông thường.

Ví dụ 6 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{2}$. SC vuông góc với đáy và SC bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB. Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng CN và SM.

Lời giải

Ta chọn hệ vector cơ sở: $\vec{CA} = \vec{a}; \vec{CB} = \vec{b}; \vec{CS} = \vec{c}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2a\sqrt{2}; |\vec{c}| = a \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0; \vec{a} \cdot \vec{c} = a^2 \end{cases}$$

+Ta tìm góc φ giữa SM và CN

$$\text{Ta có: } \vec{SM} = \vec{CM} - \vec{CS} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}); \vec{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Khi đó: } \cos \varphi = \frac{|\vec{SM} \cdot \vec{CN}|}{|\vec{SM}| \cdot |\vec{CN}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

+Tính khoảng cách giữa SM và CN?

$$\text{Gọi P thuộc SM và Q thuộc CN sao cho: } \begin{cases} \vec{PS} = x\vec{SM} \\ \vec{CQ} = y\vec{CN} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \vec{PQ} = x\vec{SM} + y\vec{CN} + \vec{SC} = \frac{1}{2}[ya + (x+y)b - (2x+2)c]$$

Do PQ là đoạn vuông góc chung của SM và CN nên:

$$\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{SM} = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{CN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\vec{a} \cdot \vec{b} + (x+y)b^2 + 2(2x+2)c^2 = 0 \\ y\vec{a}^2 + (x+2y)\vec{a} \cdot \vec{b} + (x+y)b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\vec{a}^2 + (x+y)8a^2 + 2(2x+2)a^2 = 0 \\ 8ya^2 + (x+2y)a^2 + (x+y)8a^2 = 0 \end{cases}$$

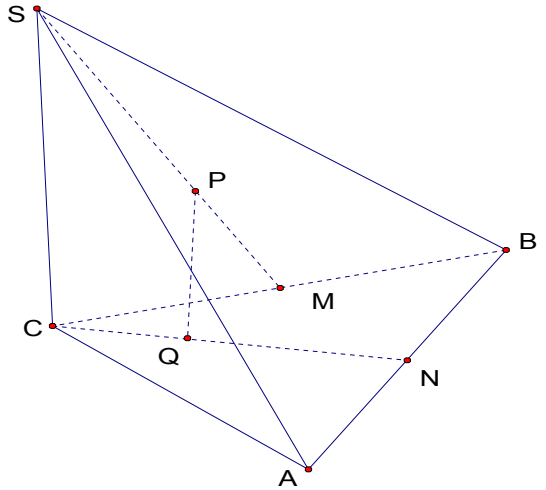
$$\begin{cases} 3x+3y = -1 \\ x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{6}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}) \Rightarrow |\vec{PQ}| = \frac{1}{6}\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau SM và CN là $PQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

3.2.2. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Ngoài bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, chúng ta còn gặp bài toán tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Để giải quyết câu hỏi này, ta sử dụng các tính chất của khoảng cách, khôn khéo tìm một đường thẳng thích hợp đi qua điểm đó và song song với mặt phẳng rồi chuyển về tìm đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nhau. Đây là cách khá



“ ngược ” trong suy nghĩ của chúng ta lâu nay nhưng nó lại hoàn toàn làm được và có hiệu quả.

Ví dụ 7: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác AA'C cân tại A; A'C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Lời giải

***Tính thể tích**

Vì tam giác AA'C vuông cân

tại A nên $AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AB = \frac{a}{2}$

$$\text{Vì } \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCB')$$

$$\text{Suy ra: } V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{\triangle BCB'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$$

***Tính khoảng cách**

Vì AD // (BCD') nên để tính

khoảng cách từ A đến mặt phẳng

(BCD') bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và CD'.

- Chọn hệ vectơ cơ sở: $\vec{BA} = \vec{a}; \vec{AD} = \vec{b}; \vec{AA'} = \vec{c}$

- Khi đó theo giả thiết: $\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{a}{2}; |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$

- Biểu diễn $\vec{AD}; \vec{CD'}$ qua hệ vectơ cơ sở:

$$\vec{CD'} = \vec{CC'} + \vec{C'D'} = \vec{a} + \vec{c}; \quad \vec{AD} = \vec{b}$$

- Gọi $H \in AD; K \in CD'$ sao cho: $\begin{cases} \vec{AH} = x \cdot \vec{AD} = x \cdot \vec{b} \\ \vec{CK} = y \cdot \vec{CD'} = y \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \end{cases}$

$$\vec{HK} = \vec{HA} + \vec{AC} + \vec{AK} = \vec{HA} + \vec{BC} - \vec{BA} + \vec{AK} = -x\vec{b} + \vec{b} - \vec{a} + y(\vec{a} + \vec{c})$$

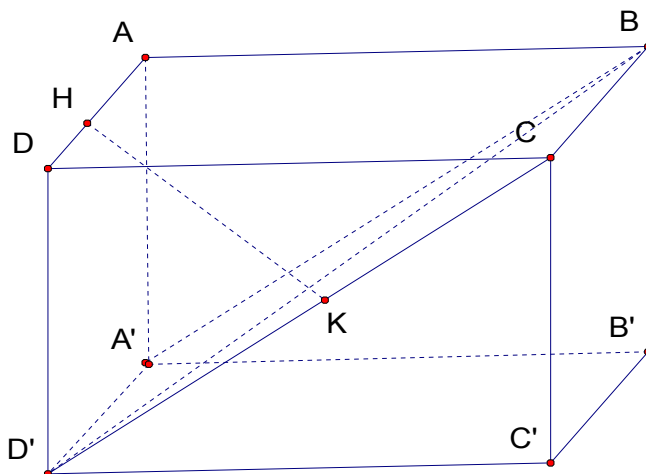
$$\vec{HK} = (y-1)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} \quad (1)$$

Để HK là đoạn vuông góc chung của CD' và AD thì $\begin{cases} \vec{HK} \cdot \vec{AD} = 0 \\ \vec{HK} \cdot \vec{CD'} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)b^2 = 0 \\ (y-1)a^2 + y^2c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ (y-1)\frac{a^2}{4} + y^2\frac{a^2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1/3 \end{cases}$$

Thay x, y vào (1) ta được

$$|\vec{HK}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CD' và AD là $HK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 8 Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

Lời giải

Chọn hệ vector cơ sở: $\vec{OD} = \vec{a}; \vec{A'B'} = \vec{b}; \vec{A'O} = \vec{c}$.

Khi đó:
$$\begin{cases} a \cdot b = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2; a \cdot c = 0; b \cdot c = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = a; |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

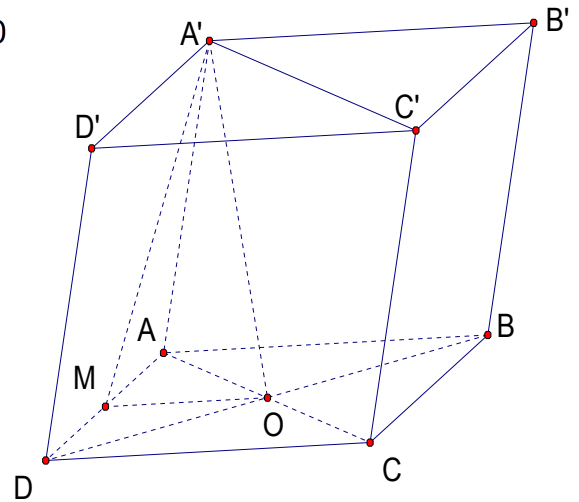
Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và M là trung điểm AD . Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} A'O \perp (ABCD) \\ OM \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow A'M \perp AD$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'ADD')$ và $(ABCD)$ là: $\angle A'MO = 60^\circ$

$$\Rightarrow A'O = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{c}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



***Khoảng cách từ B' đến $(A'BD)$**

Vì $B'D' \parallel (A'BD)$ nên khoảng cách từ B' đến $(A'BD)$ bằng khoảng cách giữa $B'D'$ và $A'B$.

Biểu diễn $B'D'; A'B$ qua hệ vector cơ sở: $B'D' = 2\vec{a}$; $A'B = A'O + OB = -\vec{a} + \vec{c}$

Gọi các điểm $H \in B'D'; K \in A'B$ sao cho:
$$\begin{cases} \vec{B'H} = x \cdot \vec{B'D'} = 2x\vec{a} \\ \vec{A'K} = y \cdot \vec{A'B} = y(-\vec{a} + \vec{c}) \end{cases}$$

$$\vec{HK} = \vec{HB'} + \vec{B'A'} + \vec{A'K} = -2x\vec{a} + \vec{b} + y(-\vec{a} + \vec{c}) = (-2x - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} \quad (1)$$

Để Hk là đoạn vuông góc chung của $B'D'$ và $A'B$ thì:
$$\begin{cases} \vec{HK} \cdot \vec{B'D'} = 0 \\ \vec{HK} \cdot \vec{A'B} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(2x+y)a^2 + 2ab = 0 \\ (2x+y)a^2 - ab + yc^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2x+y)a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = 0 \\ (2x+y)a^2 - \frac{a^2}{2} + y \frac{3a^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(2x+y) + 1 = 0 \\ 2x + y - \frac{1}{2} + \frac{3y}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + \frac{7y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Thay x, y vào (1) ta được:

$$\vec{HK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow HK = |\vec{HK}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$HK = d[B'; (A'BD)] = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa $B'D'$ và $A'B$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ hay khoảng cách từ B' đến $(A'BD)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét Từ kết quả trên ta thấy, H là trung điểm của $B'O'$; K trùng với A' .

Như vậy với việc giải bằng phương pháp này cũng là một nền tảng định hướng cho học sinh bằng phương pháp hình học không gian thuần túy.

3.3. Bài tập tự luyện và đáp án.

3.3.1. Đề bài.

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC vuông tại B, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM và $B'C'$.

Bài 2 Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh bằng $a\sqrt{5}$, $AC = 4a$ và chiều cao của hình chóp là $SO = 2\sqrt{2}a$, O là giao điểm của AC và BD. Gọi H là trung điểm của SC. Tìm góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM theo a.

Bài 3 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là các hình vuông cạnh a. Gọi D, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C'$.

Bài 4 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O. Biết $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy. Góc giữa SD và đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa SB, AC theo a.

Bài 5 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa AM, BC.

Bài 6 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Bài 7 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Bài 8 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A ; $AB = 3a$; $BC = 5a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC) . $SA = 2\sqrt{3}a$; $\angle SAC = 30^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến (SBC) .

3.3.2.Đáp số

Bài 1.Đáp số: $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$; $d(AM / B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 2.Đáp số: $\angle(SA; BM) = 30^\circ$; $d(SA; BM) = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Bài 3.Đáp số: $d(A'B; B'C') = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Bài 4.Đáp số: $d(SB; AC) = \frac{3a}{4}$.

Bài 5.Đáp số: $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$; $d(AM; B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 6.Đáp số: $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{12}$; $d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Bài 7.Đáp số: $d(AB; SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$; $V = a^3\sqrt{3}$.

Bài 8.Đáp số: $d[A; (SBC)] = \frac{a\sqrt{7}}{7}$; $V = 2\sqrt{3}a^3$.

2.4.Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm .

Tôi đã áp dụng Sáng kiến kinh nghiệm này vào giảng dạy trong năm học 2015 – 2016 tại lớp 12A6 trường THPT Như Xuân. Qua đó, so với năm học 2014 – 2015 khi giảng dạy tại lớp 12C3 nhưng chưa áp dụng Sáng kiến kinh nghiệm này, tôi nhận thấy học sinh lớp 12A6 có những hiệu quả tích cực không nhỏ, đó là:

- Học sinh nắm vững các bước làm bài toán khoảng cách, có định hướng bài toán một cách rõ ràng hơn.

- Học sinh nhanh nhạy hơn trong việc xử lý các yếu tố giả thiết phức tạp trong bài toán.

- Học sinh đã mạnh dạn, chủ động nhận xét bài làm của bạn, tìm sai lầm và sửa chữa để có lời giải đúng. Từ đó đã hình thành cho học sinh thói quen nghiên cứu lời giải, kiểm tra lại kết quả để phòng tránh, phát hiện và sửa chữa sai lầm.

Đối với bản thân, khi sử dụng Sáng kiến kinh nghiệm này tôi thấy hiệu quả tiết dạy tốt hơn, tạo sự tự tin và hứng thú khi giảng bài. Giúp tôi truyền đạt một cách cô đọng nhưng đầy đủ, chính xác và trọn vẹn nội dung cần giảng dạy trong khoảng thời gian ngắn.

Ngoài ra, Sáng kiến kinh nghiệm này đã được tổ chuyên đánh giá tốt, thiết thực và được đồng ý triển khai vận dụng cho những năm học tới trong toàn trường nhằm góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học toán trong Nhà trường nói riêng và địa phương nói chung.

Đồng thời, Sáng kiến kinh nghiệm này còn là một tài liệu tham khảo hữu ích cho giáo viên và học sinh 12 trong quá trình ôn thi, đặc biệt là ôn thi THPT Quốc gia.

Như vậy, Sáng kiến kinh nghiệm này đã mang lại hiệu quả tích cực và thiết thực cho người học và người dạy. Đáp ứng đúng con đường đổi mới phương pháp dạy và học, nâng cao hiệu quả giáo dục trong giai đoạn hiện nay.

III.KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

1. KẾT LUẬN.

Qua việc nghiên cứu, triển khai vận dụng Sáng kiến kinh nghiệm này, tôi rút ra một số bài học kinh nghiệm sau:

- Trong giảng dạy cần phải thường xuyên tìm tòi, đúc rút kinh nghiệm để đưa ra những giải pháp nâng cao hiệu quả dạy và học. Đặc biệt là những vấn đề khó, dễ nhầm lẫn và học sinh chưa có hướng đi rõ ràng.

- Nội dung giảng dạy của giáo viên cần được viết dưới dạng Sáng kiến kinh nghiệm hoặc tập hợp thành tài liệu và cung cấp cho học sinh. Qua đó, phát huy được khả năng tự học của học sinh.

- Những nội dung truyền tải cho học sinh, giáo viên cần phải nghiên cứu kỹ lưỡng, tìm ra phương pháp giảng dạy hợp lý, đảm bảo xúc tích, ngắn gọn nhưng đầy đủ, chính xác.

Những cách làm trên sẽ giúp tiết dạy đạt hiệu quả cao, người dạy và người học đều hứng thú, tiết kiệm thời gian và phát huy tính chủ động, sáng tạo, khả năng tự học của học sinh. Đó chính là những điều tôi rút ra từ Sáng kiến kinh nghiệm này.

Sáng kiến kinh nghiệm này có thể sử dụng để dạy học sinh khối 11 và ôn thi cho học sinh lớp 12, đặc biệt là với đối tượng học sinh ôn thi đại học, học sinh giỏi cho những năm học tiếp theo trong trường THPT Như Xuân nói riêng và các trường THPT nói chung.

Có thể mở rộng, phát triển thêm nội dung của Sáng kiến kinh nghiệm này để trở thành một tài liệu hoàn chỉnh về sử dụng phương pháp vectơ vào các bài toán hình học không gian bao gồm góc, khoảng cách, chứng minh song song, vuông góc.

2. ĐỀ XUẤT.

1. Đối với tổ chuyên môn và đồng nghiệp: Đề nghị Tổ chuyên môn Toán nhanh chóng triển khai ứng dụng Sáng kiến kinh nghiệm này trong giảng dạy tại Nhà trường trong các năm học tới.

2. Đối với Sở GD&ĐT: Đề nghị Sở GD&ĐT đóng góp ý kiến và tạo điều kiện để tôi tiếp tục phát triển Sáng kiến kinh nghiệm này cũng như tìm tòi những Sáng kiến mới.

**XÁC NHẬN CỦA
THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 4 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

HOÀNG THỊ THÚY

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Mộng Hy và cộng sự (2011), *Hình học lớp 11*, lần xuất bản thứ 4, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam .
2. Vũ Thế Hựu và cộng sự (2012), *Bộ đề thi tốt nghiệp THPT, Tuyển sinh đại học, cao đẳng* , lần xuất bản thứ 3, Nhà xuất bản đại học sư phạm , Hà Nội.
3. Nguyễn Hữu Ngọc (2007), *Các dạng toán và phương pháp giải hình học 11* ,Nhà xuất bản giáo dục.