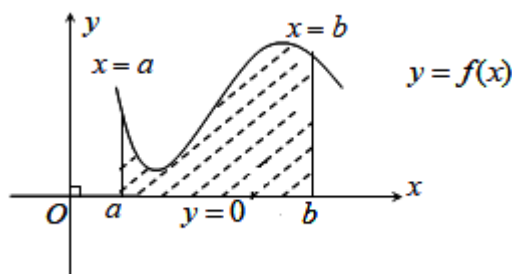


## BÀI 3

## ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

## 1. Diện tích hình thang cong

a. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng  $x=a$  và  $x=b$



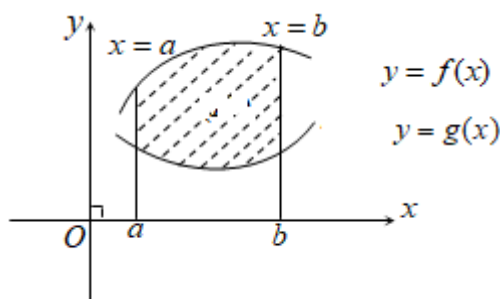
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành  $Ox$  ( $y=0$ ) và hai đường thẳng  $x=a$  và  $x=b$  được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**Chú ý:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Nếu  $f(x)$  không đổi dấu trên  $[a; b]$  thì:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng  $x=a$  và  $x=b$

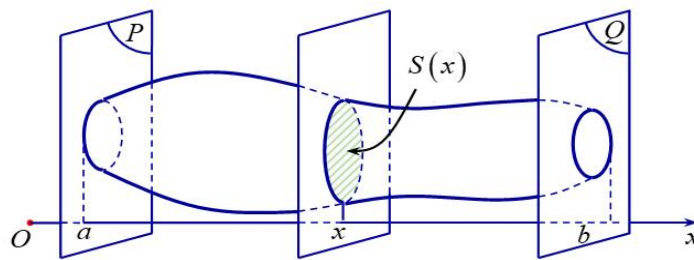


Cho 2 hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  và hai đường thẳng  $x=a$  và  $x=b$  được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

## 2. Thể tích hình khối

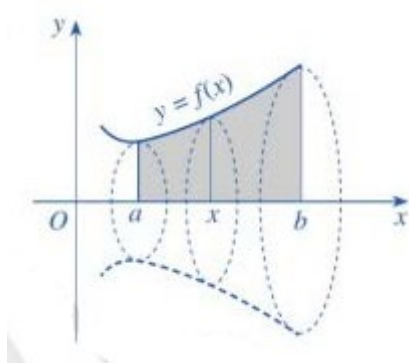
**a. Thể tích của vật thể**



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cùng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm  $a$  và  $b$ . Mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích  $S(x)$ . Khi đó, nếu  $S(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a; b]$  thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

**b. Thể tích khối tròn xoay**



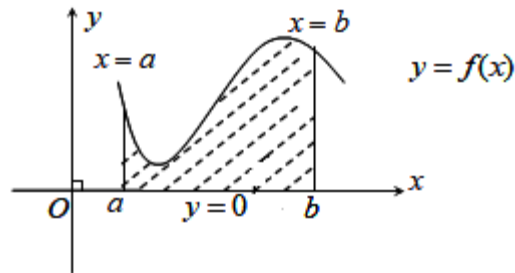
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên  $[a; b]$ . Hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$  quay quanh trục  $Ox$  tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

# TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

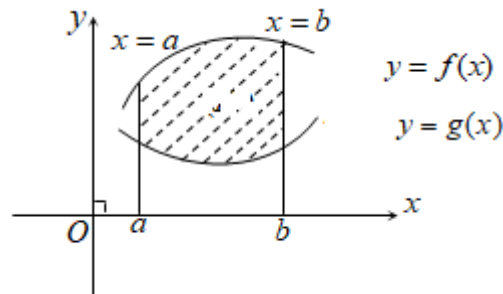
## 1. Dạng 1

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx$$



## 2. Dạng 2

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



### Chú ý:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

- Nếu  $f(x)$  không đổi dấu trên  $[a; b]$  thì:
- Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số nằm dưới trục hoành thì mang giá trị âm, còn nằm trên trục hoành thì mang giá trị dương

## TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT HÀM SỐ CÁC ĐƯỜNG CONG

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  và các đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  bằng

- A.  $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$  .      B.  $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$  .      C.  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  .      D.  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$  .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,

$x = a$ ,  $x = b$  được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Câu 2.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 3^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $S = \int_0^2 3^x dx$  .      B.  $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$  .      C.  $S = \pi \int_0^2 3^x dx$  .      D.  $S = \int_0^2 3^{2x} dx$  .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức

$$S = \int_0^2 3^x dx$$

**Câu 3.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = (x - 2)^2 - 1$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 2$  bằng

- A.  $\frac{2}{3}$  .      B.  $\frac{3}{2}$  .      C.  $\frac{1}{3}$  .      D.  $\frac{7}{3}$  .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có:

$$S = \int_1^2 |(x - 2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$$

**Câu 4.** Tính diện tích  $S$  hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  và trục hoành.

- A.  $S = 6$  .      B.  $S = 16$  .      C.  $S = \frac{13}{6}$  .      D.  $S = 13$  .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: 
$$S = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 6$$

**Câu 5.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 5$ ,  $y = 6x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Tính  $S$ .

- A.  $\frac{4}{3}$                       B.  $\frac{7}{3}$                       C.  $\frac{8}{3}$                       D.  $\frac{5}{3}$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:  $x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow x = 5; x = 1$ .

Diện tích hình phẳng cần tìm: 
$$S = \int_0^1 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{7}{3}$$

**Câu 6.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số  $y = \ln x$ ,  $y = 1$  và hai đường thẳng  $x = 1, x = e$  bằng

- A.  $e^2$                       B.  $e + 2$                       C.  $2e$                       D.  $e - 2$

**Lời giải**

**Chọn D.**

$$S = \int_1^e |\ln x - 1| dx = \left| \int_1^e (\ln x - 1) dx \right| = \left| x(\ln x - 1) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right| = \left| 1 - x \Big|_1^e \right| = |1 - (e - 1)| = |2 - e| = e - 2$$

**Câu 7.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 2x$  và hai đường thẳng  $x = 1, x = e$  bằng

- A. 4                      B.  $\frac{20}{3}$                       C.  $\frac{4}{3}$                       D.  $\frac{16}{3}$

**Lời giải**

**Chọn C.**

diện tích hình phẳng cần tìm là 
$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

**Câu 8.** Tính diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -10$ ,  $x = 10$ .

- A.  $S = \frac{2000}{3}$                       B.  $S = 2008$                       C.  $S = 2000$                       D.  $S = \frac{2008}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường (C):  $y = x^2 - 2x$  và (d):  $y = 0$  là:  $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

|      |           |   |   |           |   |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |   |
| $VT$ |           | + | 0 | -         | 0 | + |

Diện tích cần tìm: 
$$S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 9.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

**A.**  $S = \int_0^2 2^x dx$       **B.**  $S = \frac{3}{\ln 2}$       **C.**  $S = \pi \int_0^2 2^x dx$       **D.**  $S = \frac{3\pi}{\ln 2}$

**Lời giải**

| A.   | B.   | C.  | D.  |
|------|------|-----|-----|
| ĐÚNG | ĐÚNG | SAI | SAI |

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx = \frac{3}{\ln 2} \quad (\text{do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

**Câu 10.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

**A.**  $S = \int_0^2 e^x dx$       **B.**  $S = e^2$       **C.**  $S = \pi \int_0^2 e^x dx$       **D.**  $S = (e^2 - 1)\pi$

**Lời giải**

| A.   | B.  | C.  | D.  |
|------|-----|-----|-----|
| ĐÚNG | SAI | SAI | SAI |

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  là:

$$S = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

**Câu 11.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

**A.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  là  $\frac{4}{3}$ .

**B.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2x + 1$ ,  $y = 2x^2 - 4x + 1$ ,  $x = 0, x = 2$  là 4.

**C.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$ , trục hoành,  $x = 0, x = 1$  là  $2\ln 2 - 1$ .

**D.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 12x$ ,  $y = -x^2$ ,  $x = -3, x = 4$  là  $\frac{937}{12}$ .

### Lời giải

| A.   | B.   | C.   | D.   |
|------|------|------|------|
| ĐÚNG | ĐÚNG | ĐÚNG | ĐÚNG |

$$y = x^2, y = 2x, x = 0, x = 1 \text{ là}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$S = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \left| \int_0^1 (x^2 - 2x) dx \right| = \frac{4}{3}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2x + 1$ ,  $y = 2x^2 - 4x + 1$ ,  $x = 0, x = 2$  là

$$\int_0^2 |2x^2 - 4x + 1 - (-x^2 + 2x + 1)| dx = \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$ , trục hoành,  $x = 0, x = 1$  là

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left( \frac{x-1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left( 1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| (x - 2\ln|x+1|) \Big|_0^1 \right| = 2\ln 2 - 1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 12x$ ,  $y = -x^2$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12} \end{aligned}$$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

**Câu 12.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 + x - 1$ ,  $y = x^4 + x - 1$ ,  $x = -1, x = 1$ .

Trả lời: .....

Lời giải

**Đáp án:**  $\frac{4}{15}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 + x - 1$ ,  $y = x^4 + x - 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

**Câu 13.** Kí hiệu  $S(t)$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = t$  ( $t > 1$ ). Tìm  $t$  để  $S(t) = 10$ .

Trả lời: .....

Lời giải

**Đáp án:**  $t = 3$

$$S(t) = \int_1^t |2x + 1| dx = \int_1^t (2x + 1) dx$$

**Cách 1.** Ta có:

$$\text{Suy ra } S(t) = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$$

$$S(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \text{ (L)} \end{cases}$$

Do đó

Vậy  $t = 3$ .

**Cách 2.** Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng  $y(1) = 3$ , đáy lớn bằng  $y(t) = 2t + 1$  và chiều cao bằng  $t - 1$ .

$$\text{Ta có } \frac{(3 + 2t + 1)(t - 1)}{2} = 10 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}. \text{ Vì } t > 1 \text{ nên } t = 3$$

**Câu 14.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $my = x^2$ ,  $mx = y^2$  ( $m > 0$ ). Tìm giá trị của  $m$  để  $S = 3$ .

Trả lời: .....

Lời giải

**Đáp án:**  $m = 3$

$$\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình:



Thế (1) vào (2) ta được:

$$mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3 x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m > 0 \end{cases}$$

Vì  $y = \frac{x^2}{m} > 0$  nên  $mx = y^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left( \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$$

$$= \left| \left( \frac{2\sqrt{m}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m} \right) \right|_0^m = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$$

Yêu cầu bài toán  $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xrightarrow{m > 0} m = 3$

**Câu 15.** Giá trị dương của tham số  $m$  sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = 2x + 3$  và các đường thẳng  $y = 0, x = 0, x = m$  bằng 10 là bao nhiêu?

**Trả lời:** .....

**Lời giải**

**Đáp án:**  $m = 2$

Vì  $m > 0$  nên  $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$ .

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2x + 3$  và các đường thẳng  $y = 0, x = 0, x = m$  là:

$$S = \int_0^m (2x + 3) dx = (x^2 + 3x) \Big|_0^m = m^2 + 3m$$

Theo giả thiết ta có:

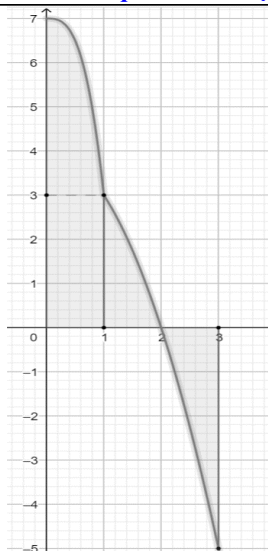
$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0)$$

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $f(x)$  và các đường thẳng  $x = 0, x = 3, y = 0$ .

**Trả lời:** .....

**Lời giải**

**Đáp án:** 10



$$S = \int_0^1 (7 - 4x^3) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx$$

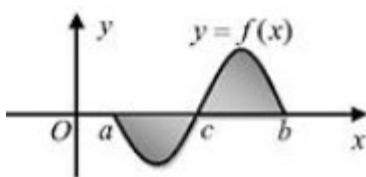
$$= \left( 7x - x^4 \right) \Big|_0^1 + \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \left( \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10.$$

## DẠNG 2

### TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 17.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành, đường thẳng  $x = a, x = b$  (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính  $S$  nào dưới đây đúng?



A.  $S = \int_a^b f(x) dx$

B.  $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$

C.  $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

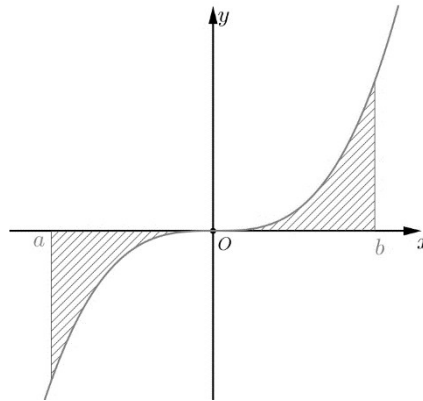
D.  $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

**Lời giải**

**Chọn B.**

$$S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$$

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C): y = f(x)$ , trục hoành, hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  (như hình vẽ dưới đây). Giả sử  $S_D$  là diện tích hình phẳng  $D$ . đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A.  $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

B.  $S_D = - \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

C.  $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$

D.  $S_D = - \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$

**Lời giải**

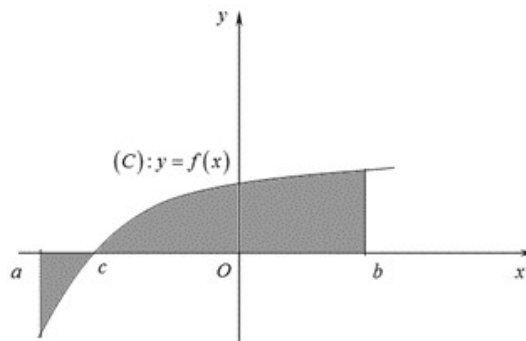
**Chọn B.**

Ta có  $S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx$

Vì  $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; 0], f(x) \geq 0, \forall x \in [0; b]$  nên:

$$S_D = \int_a^0 (-f(x)) dx + \int_0^b f(x) dx = - \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

**Câu 19.** Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A.  $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

B.  $S = \int_a^b f(x) dx$

C.  $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

D.  $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

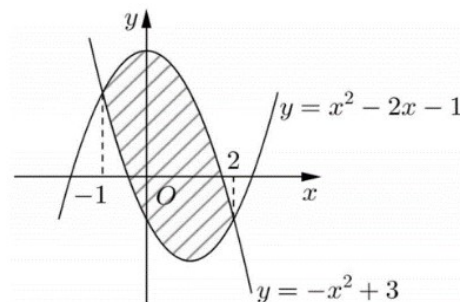
Lời giải

**Chọn C.**

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng

$$x = a, x = b \text{ là } S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Câu 20.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A.  $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B.  $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

**C.  $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$**

D.  $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

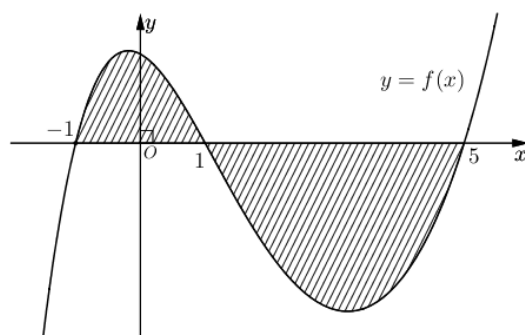
Lời giải

**Chọn C.**

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x), y = 0, x = -1$  và  $x = 5$  (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$

B.  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$

**C.  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$**

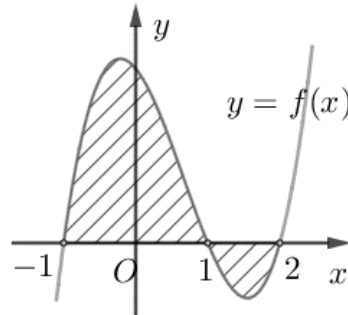
D.  $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$

Lời giải

**Chọn C.**

Ta có: 
$$S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$  (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. 
$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

B. 
$$S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

C. 
$$S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

D. 
$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

**Lời giải**

**Chọn D.**

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn  $[-1; 1]$  nên

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

; hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn  $[1; 2]$  nên

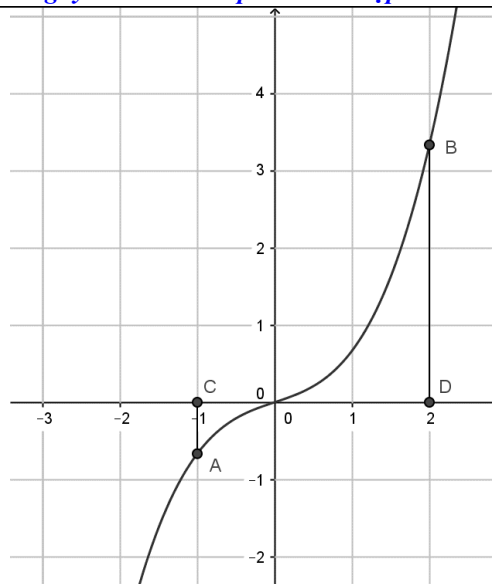
$$\int_1^2 |f(x)| dx = - \int_1^2 f(x) dx$$

$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Vậy

**Câu 23.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường

thẳng  $x = -1, x = 2$ . Đặt  $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ,  $b = \int_0^2 f(x) dx$ , mệnh đề nào sau đây đúng?



A.  $S = b - a$

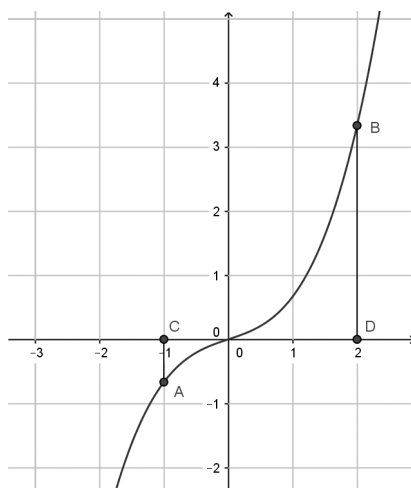
B.  $S = b + a$

C.  $S = -b + a$

D.  $S = -b - a$

Lời giải

Chọn A.

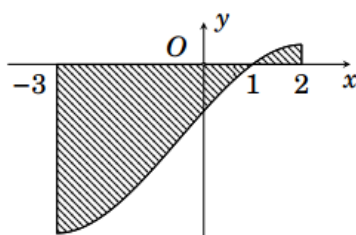


Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b$$

**Câu 24.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng

$x = -3$ ,  $x = 2$  (như hình vẽ bên). Đặt  $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$ ,  $b = \int_1^2 f(x) dx$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A.  $S = a + b$

B.  $S = a - b$

C.  $S = -a - b$

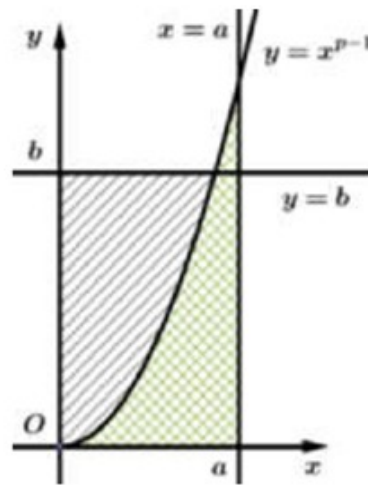
D.  $S = b - a$

Lời giải

**Chọn D.**

Ta có 
$$S = \int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = - \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -a + b.$$

**Câu 25.** Cho các số  $p, q$  thỏa mãn các điều kiện:  $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  và các số dương  $a, b$ . Xét hàm số  $y = x^{p-1} (x > 0)$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $(S_1)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$ , trục hoành, đường thẳng  $x = a$ , Gọi  $(S_2)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$ , trục tung, đường thẳng  $y = b$ , Gọi  $(S)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng  $x = a, y = b$ . Khi so sánh  $S_1 + S_2$  và  $S$  ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A.  $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$

B.  $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$

C.  $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$

**D.  $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$**

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có:  $S \leq S_1 + S_2$ .

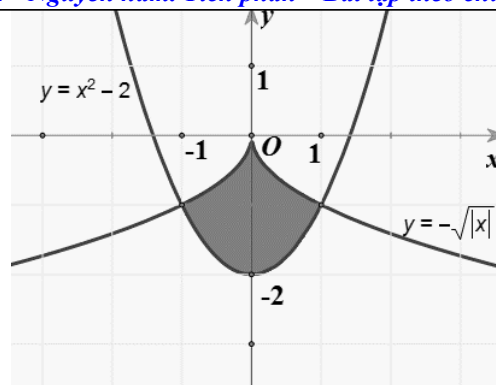
$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left( \frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p};$$

$$S_2 = \int_0^b \left( y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left( \frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \Big|_0^b = \left( \frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Vì:

**Câu 26.** Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A.  $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$ .

B.  $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$ .

C.  $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$ .

D.  $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$ .

**Lời giải**

**Chọn D.**

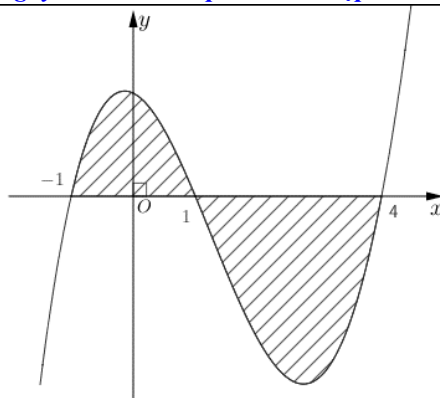
Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 2 - (-\sqrt{|x|})| dx = \int_{-1}^1 (-\sqrt{|x|} - x^2 + 2) dx \quad (\text{vì } x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sqrt{|x|} > x^2 - 2).$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x), y = 0, x = -1$  và  $x = 4$  (như hình vẽ bên). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?





A.  $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx$

B.  $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$

C.  $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx$

D.  $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$

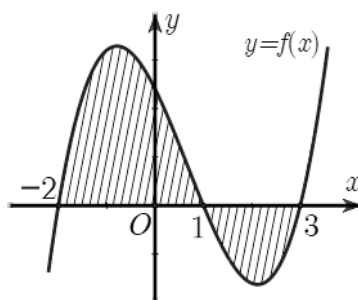
Lời giải

| A.   | B.  | C.  | D.  |
|------|-----|-----|-----|
| ĐÚNG | SAI | SAI | SAI |

Ta có: hàm số  $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1; 1]; f(x) \leq 0 \forall x \in [1; 4]$ , nên:

$$S = \int_{-1}^4 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^4 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx$$

**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cả đường  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$  và  $x = 3$  (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



A.  $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

B.  $S = \int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

C.  $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

D.  $S = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

Lời giải

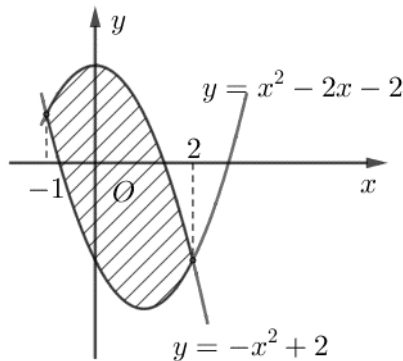
| A.  | B.   | C.  | D.  |
|-----|------|-----|-----|
| SAI | ĐÚNG | SAI | SAI |

$$S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$$

Ta có

Do  $f(x) \geq 0$  với  $\forall x \in [-2; 1]$  và  $f(x) \leq 0$  với  $\forall x \in [1; 3]$  nên  $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

**Câu 29.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

**A.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2 - 2x - 2$ ,  $y = -x^2 + 2$ ,  $x = -1, x = 2$ .

**B.** Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là  $S = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$ .

**C.** Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là  $S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx$ .

**D.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2 - 2x - 2$ ,  $y = -x^2 + 2$ ,  $x = 0, x = 2$ .

**Lời giải**

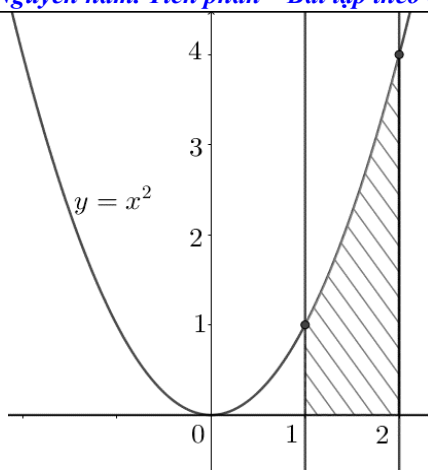
| A.   | B.   | C.   | D.  |
|------|------|------|-----|
| ĐÚNG | ĐÚNG | ĐÚNG | SAI |

Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2 - 2x - 2$ ,  $y = -x^2 + 2$ ,  $x = -1, x = 2$ .

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

**Câu 30.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

**A.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ .

**B.** Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là  $\int_1^2 x^2 dx$ .

**C.** Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bằng  $\frac{4}{3}$ .

**D.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2; y = 0; x = 0; x = 2$ .

**Lời giải**

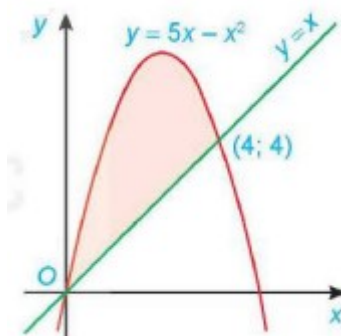
| A.   | B.   | C.  | D.  |
|------|------|-----|-----|
| ĐÚNG | ĐÚNG | SAI | SAI |

Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ .

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Ta có

**Câu 31.** Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

**A.** Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = 5x - x^2; y = x; x = 0; x = 4$ .

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là  $\int_1^4 (x^2 - 4x) dx$ .

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là  $\int_1^4 (-x^2 + 4x) dx$ .

D. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là  $\int_4^1 (x^2 - 4x) dx$ .

**Lời giải**

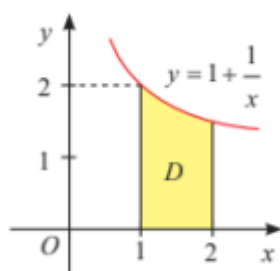
| A.   | B.  | C.   | D.   |
|------|-----|------|------|
| ĐÚNG | SAI | ĐÚNG | ĐÚNG |

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = 5x - x^2$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$ ;  $x = 4$ .

$$S = \int_1^4 (5x - x^2 - x) dx = \int_1^4 (4x - x^2) dx$$

Ta có

**Câu 32.** Cho hình phẳng  $(D)$  được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = 1 + \frac{1}{x}$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ .

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là  $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ .

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng  $S = 1 + \ln 2$ .

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = 1 + \frac{1}{x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ .

**Lời giải**

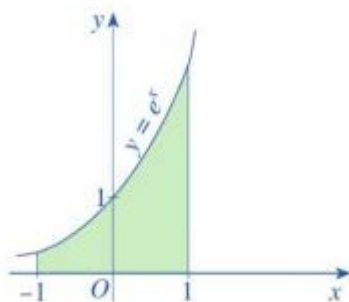
| A.  | B.   | C.   | D.   |
|-----|------|------|------|
| SAI | ĐÚNG | ĐÚNG | ĐÚNG |

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = 1 + \frac{1}{x}$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ .

$$S = \int_1^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx = 1 + \ln 2$$

Ta có

**Câu 33.** Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 1$ .

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là  $\int_{-1}^1 e^x dx$ .

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng  $\int_0^1 e^x dx$ .

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = e^x; y = 0; x = -1; x = 1$ .

**Lời giải**

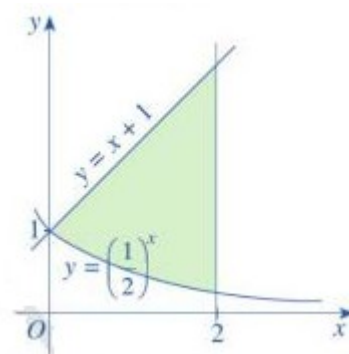
| A.   | B.   | C.  | D.  |
|------|------|-----|-----|
| ĐÚNG | ĐÚNG | SAI | SAI |

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị  $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 1$ .

$$S = \int_{-1}^1 e^x dx$$

Ta có

**Câu 34.** Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

$$y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x = 0; x = 2$$

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị

$$\int_0^2 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$$

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là

$$S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$$

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng

$$y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x = 1; x = 2$$

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị

**Lời giải**

|      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|
| A.   | B.  | C.   | D.  |
| ĐÚNG | SAI | ĐÚNG | SAI |

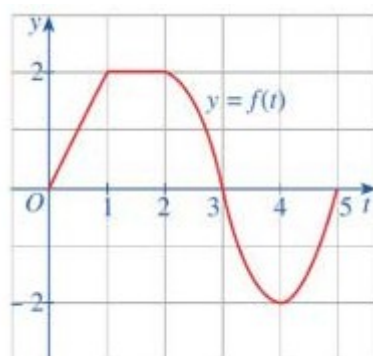
Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị

$$y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x = 0; x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left[ x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx = \left( \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2^x \ln 2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$$

Ta có

**Câu 35.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(t)$  như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số  $y = f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:

$$t = 0; t = 1 \quad \text{là} \quad S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$$

B. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số  $y = f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:

$$t = 1; t = 2 \quad \text{là} \quad S = \int_1^2 2 dt = 2$$

C. Tích phân  $\int_2^3 f(x)dx$  biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=2; t=3$ .

D. Tích phân  $\int_3^5 f(x)dx$  biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=3; t=5$ .

### Lời giải

| A.   | B.   | C.   | D.  |
|------|------|------|-----|
| ĐÚNG | ĐÚNG | ĐÚNG | SAI |

A. đồ thị hàm số  $y=f(t)$  trên đoạn  $[0;1]$  là  $y=\frac{1}{2}t$ . Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=0; t=1$  là  $S=\frac{1}{2}\int_0^1 tdt=\frac{1}{4}$ .

B. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=1; t=2$  là  $y=2, y=0, t=1; t=2$  hay  $S=\int_1^2 2dt=2$ .

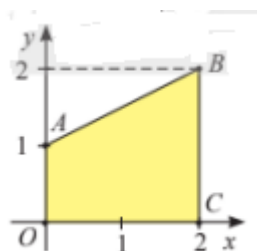
C. Tích phân  $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 f(t)dt$  nên  $\int_2^3 f(t)dt$  là cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=2; t=3$ .

D. Tích phân  $\int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 f(t)dt$

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số  $y=f(t)$ , trục  $Ot$  và hai đường thẳng là:  $t=3; t=5$  là  $S=\int_3^5 |f(t)|dt$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.

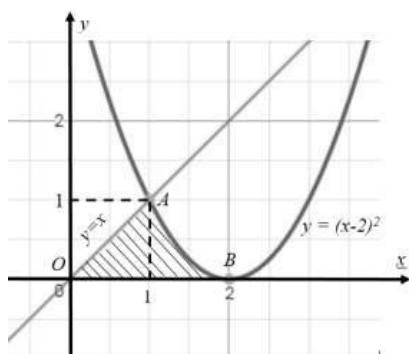


Trả lời: .....

Lời giải

**Đáp án:**

**Câu 37.** Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong  $OAB$ ) trong hình vẽ bên.



Trả lời: .....

Lời giải

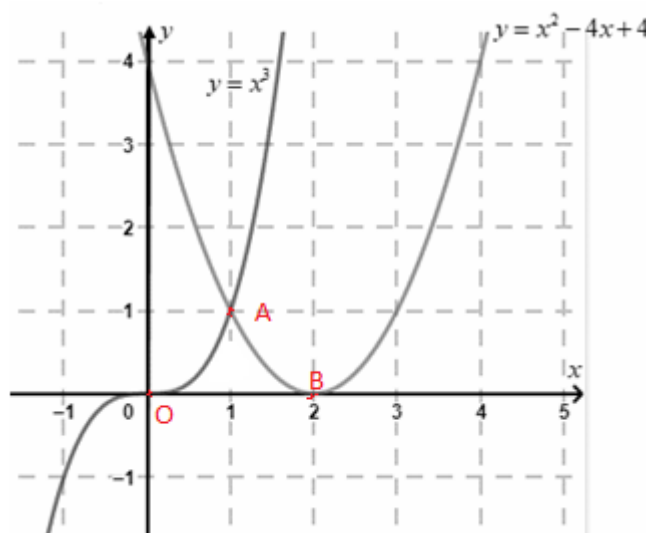
**Đáp án:**  $S = \frac{5}{6}$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Vậy  $S = \frac{5}{6}$ .

**Câu 38.** Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong  $OAB$  trong hình vẽ bên.



Trả lời: .....

Lời giải

**Đáp án:**  $S = \frac{7}{12}$

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:



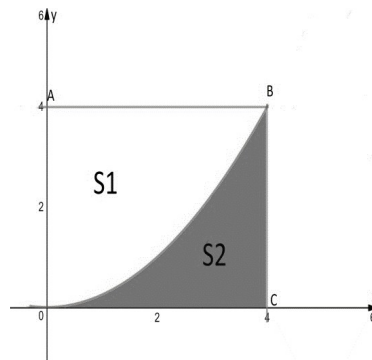
Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3$ , trục  $Ox$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 - 4x + 4$ , trục  $Ox$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

$$S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{7}{12}$$

Do đó diện tích cần tính là

**Câu 39.** Hình vuông  $OABC$  có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong  $(C)$  có phương trình  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Gọi  $S_1, S_2$  lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỷ số  $\frac{S_1}{S_2}$  bằng bao nhiêu?



Trả lời: .....

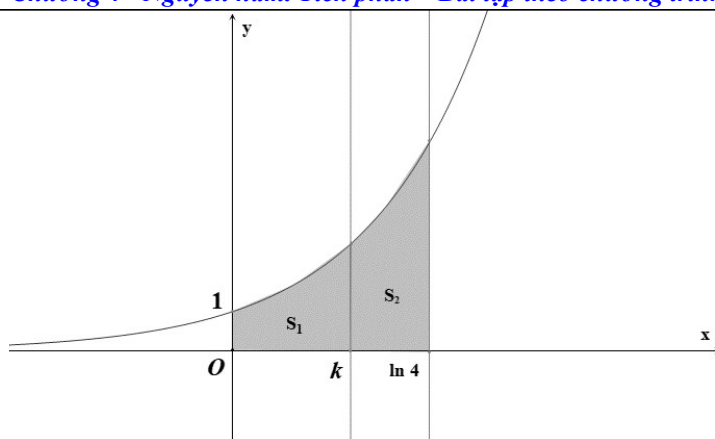
**Lời giải**

**Đáp án:**  $\frac{S_1}{S_2} = 2$

Ta có diện tích hình vuông  $OABC$  là 16 và bằng  $S_1 + S_2$ .

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$$

**Câu 40.** Cho hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \ln 4$ . Đường thẳng  $x = k$  ( $0 < k < \ln 4$ ) chia  $(H)$  thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$  như hình vẽ bên. Tìm  $k$  để  $S_1 = 2S_2$ .



Trả lời: .....

**Lời giải**

**Đáp án:**  $k = \ln 3$

Diện tích hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \ln 4$  là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

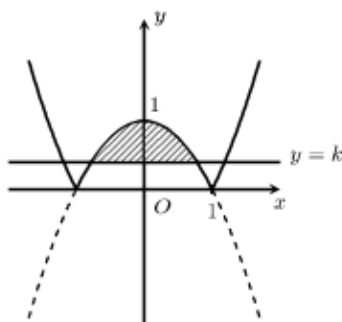
Ta có  $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$ . Suy ra  $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$  (đvdt).

Vì  $S_1$  là phần diện tích được giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = k$  nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

Do đó  $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$ .

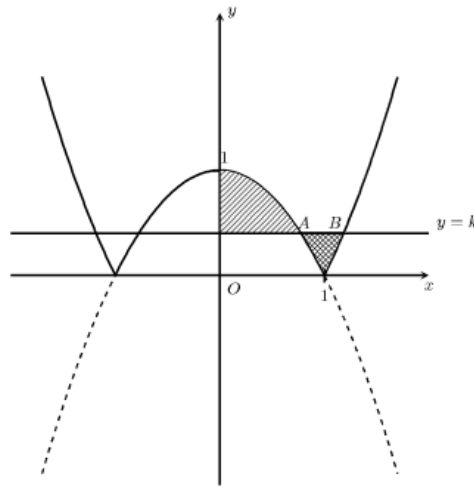
**Câu 41.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = |x^2 - 1|$  và  $y = k$ , với  $0 < k < 1$ . Tìm  $k$  để diện tích hình phẳng  $(H)$  gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên.



Trả lời: .....

**Lời giải**

**Đáp án:**  $k = \sqrt[3]{4} - 1$



Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng  $(H)$ . Lúc đó  $S = 2S_1 + 2S_2$ , trong đó  $S_1$  là diện tích phần gạch sọc ở bên phải  $Oy$  và  $S_2$  là diện tích phần gạch ca rô trong hình vẽ bên.

Gọi  $A, B$  là các giao điểm có hoành độ dương của đường thẳng  $y = k$  và đồ thị hàm số  $y = |x^2 - 1|$ , trong đó  $A(\sqrt{1-k}; k)$  và  $B(\sqrt{1+k}; k)$ .

Theo yêu cầu bài toán  $S = 2 \cdot 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$ .

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-k}} (1 - x^2 - k) dx = \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k - 1 - x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k - x^2 + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}$$

$$+ (1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{1+k})^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1$$