|  |  |
| --- | --- |
| **ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  **TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN**  **Đê chính thức** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2022**  **MÔN THI : TOÁN (cho tất cả các thí sinh)**  **Thời gian làm bài : 120 phút (không kể thời gian phát đề)** |

**Câu I. (4 điểm)**

1. Giải hệ phương trình 
2. Giải phương trình :



**Câu II. (2 điểm)**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn đẳng thức :



1. Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau : mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là số tự nhiên liên tiếp ?

**Câu III. (3 điểm)**

Cho hình chữ nhật nội tiếp đường tròn . Trên cạnh lấy hai điểm và không trùng với sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời 

1. Chứng minh rằng và cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn 
2. Đường thẳng qua O song song với cắt theo thứ tự tại Chứng minh rằng 
3. Dựng hình chữ nhật sao cho song song với đồng thời song song với Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật tiếp xúc với đường tròn 

**Câu IV. (1 điểm)**

Cho là những số thực dương. Chứng minh rằng :



**ĐÁP ÁN**

**Câu I. (4 điểm)**

1. **Giải hệ phương trình **

Trừ vế với vế của 2 phương trình ta được :



Tương đương với 

Từ đây suy ra hoặc 

Với  với thì 

Vậy hệ phương trình có nghiệm là 

1. **Giải phương trình :**

****

Đặt . Khi đó, ta có hệ phương trình :

. Cộng hai phương trình lại ta suy ra



Lưu ý nên ta phải có , kéo theo 

Giải ta tìm được . Xét hai trường hợp:



Vậy 

**Câu II. (2 điểm)**

1. **Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn đẳng thức :**

****

Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng



Rõ ràng nên từ đó ta phải có

. Xét hai trường hợp

+) Nếu thì . Cộng lại, ta có :

Tuy nhiên có tận cùng là 4 nên có tận cùng là 8 không chia hết cho 10. Trường hợp này vô nghiệm

+)Nếu thì . Từ đây tìm được 

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm là 

1. **Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau : mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là số tự nhiên liên tiếp ?**

Gọi số lần thêm ít nhất là thì các hộp bi tương ứng là 

Mỗi lần thêm tất cả là 9 bi nên ta có :



Suy ra chia hết cho 9, kéo theo chia hết cho 9.

Từ đó ta phải có . Ta chứng minh thỏa mãn

Gọi các hộp tương ứng là và thực hiện thêm bi ở các lần như sau :

* Lần 1: 
* Lần 2: 
* Lần 3: 
* Lần 4: 

**Câu III. (3 điểm)**

**Cho hình chữ nhật nội tiếp đường tròn . Trên cạnh lấy hai điểm và không trùng với sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời **

****

1. **Chứng minh rằng** **và** **cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn** 

Đặt 

Gọi H là hình chiếu của K trên AD.

Để ý rằng và nên ta có :

. Từ đó suy ra 

1. **Đường thẳng qua O song song với** **cắt** **theo thứ tự tại** **Chứng minh rằng** 

Trước hết để ý rằng ta tìm được tứ giác là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự, ta cũng có là tứ giác nội tiếp .Đặt

Khi đó ta có 

Từ đó suy ra . Vì vậy,



1. **Dựng hình chữ nhật sao cho song song với đồng thời song song với Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật tiếp xúc với đường tròn **

Gọi Để ý rằng nên 

Như vậy, ta quy về chứng minh đường tròn tiếp xúc với Thật vậy, ta cần chứng minh với R là bán kính của (O)

Đặt Khi đó ta có . Ta thấy

. Do đó, ta được :



Suy ra , Như vậy tiếp xúc trong với (O)

**Câu IV. (1 điểm)**

**Cho là những số thực dương. Chứng minh rằng :**

****

Ta viết lại vế trái dưới dạng :



Áp dụng bất đẳng thức thì nên :

. Chú ý rằng :

và nên :



Điều phải chứng minh