**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**BẮC NINH**

**CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO**
**KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023**
**Môn: Toán**

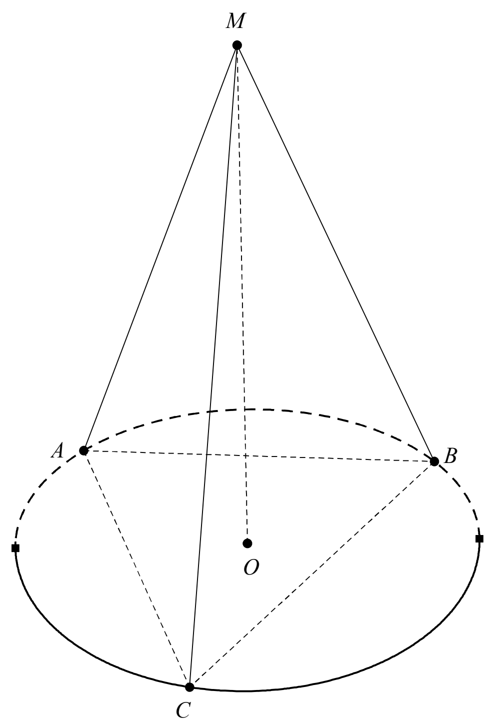
# TÊN CHUYÊN ĐỀ: BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN ĐẶC BIỆT LÀ CÁC BÀI TOÁN QUỸ TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN CÓ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

**Người biên soạn: Đinh Ngọc Phúc**
**Đơn vị công tác: Trường THPT Nguyễn Đăng Đạo.**

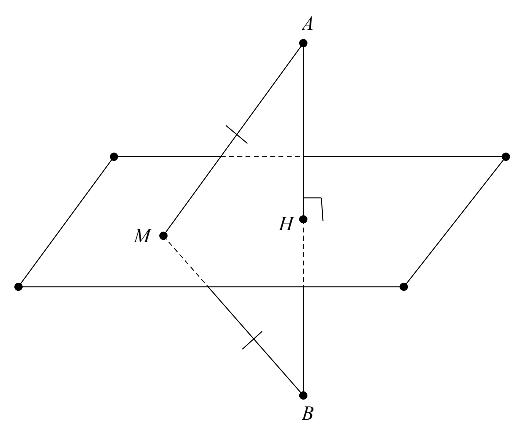
## I. Hệ thống kiến thức liên quan

### I.1. Các quỹ tích cơ bản trong không gian

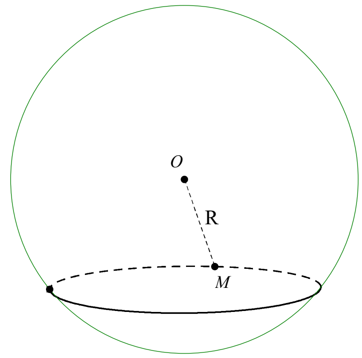
1. Trong không gian, cho 3 điểm $A,B,C$ cố định. Tập hợp các điểm $M$ cách đều 3 điểm $A,B,C$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.



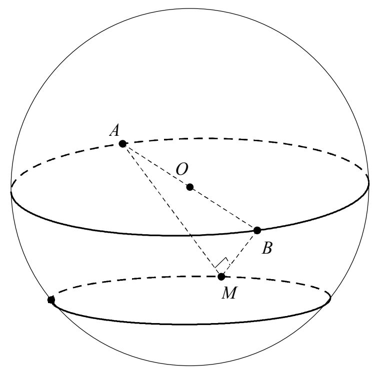

2. Trong không gian, cho 2 điểm $A,B$ cố định. Tập hợp các điểm $M$ cách đều 2 điểm $A,B$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB$.



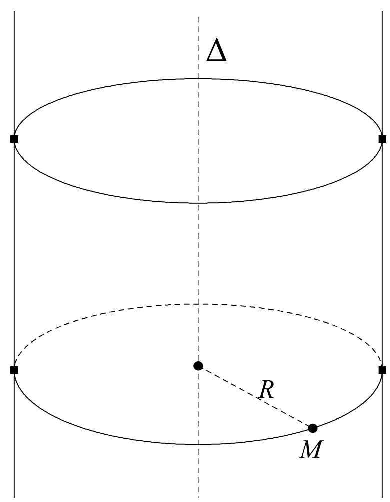

3. Trong không gian, cho điểm $I$ cố định và số thực $R > 0$ không đổi. Tập hợp các điểm $M$ cách $I$ một khoảng bằng $R$ là mặt cầu tâm $I$ bán kính $R$.



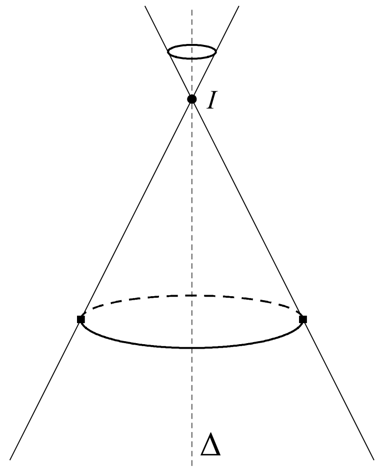

4. Trong không gian, cho 2 điểm $A, B$ cố định. Tập hợp các điểm $M$ nhìn đoạn thẳng $AB$ dưới góc $90^0$ là mặt cầu đường kính $AB$.




5. Trong không gian, cho đường thẳng $\Delta$ cố định. Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta$ một khoảng bằng $R$ không đổi là mặt trụ có trục là đường thẳng $\Delta$.




6. Trong không gian, cho đường thẳng $\Delta$ cố định. Tập hợp các đường thẳng song song và cách đường thẳng $\Delta$ một khoảng bằng $R$ không đổi là mặt trụ có trục là đường thẳng $\Delta$. Mỗi đường thẳng thỏa mãn điều kiện trên là một đường sinh của mặt trụ đó.
7. Trong không gian, cho đường thẳng $\Delta$ cố định và điểm $I$ cố định thuộc $\Delta$. Tập hợp các đường thẳng qua $I$ và tạo với $\Delta$ một góc $\alpha$ không đổi là mặt nón đỉnh $I$ có trục là $\Delta$ và góc ở đỉnh bằng $2\alpha$.

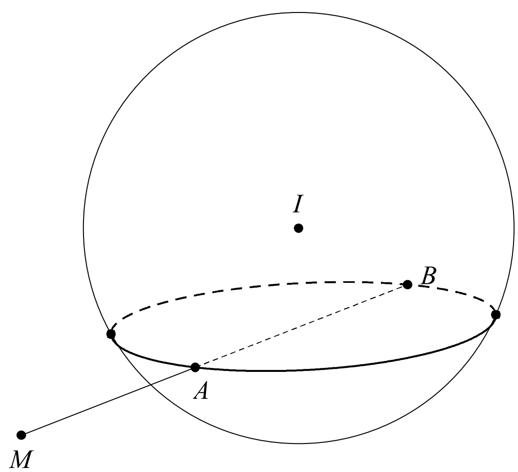



**I.2. Một số tính chất**

1. Cho mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $S(I;R)$. Nếu $d(I;(P))<R$ thì $(P)$ cắt $S(I;R)$ theo một đường tròn có tâm $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-\left[d(I;(P))\right]^2}$.

2. Từ một điểm $M$ nằm ngoài mặt cầu $S(I;R)$ có thể kẻ được vô số tiếp tuyến tới mặt cầu đó. Tập hợp các tiếp tuyến là mặt nón đỉnh $M$ và nhận $MI$ làm trục.

3. Cho mặt cầu $(S)$ tâm $I$ bán kính $R$. Từ một điểm $M$ kẻ đường thẳng cắt $(S)$ tại hai điểm $A,B$. Khi đó ta có: $MA.MB=\left|MI^2-R^2\right|$.




**II. Các dạng bài thường gặp**

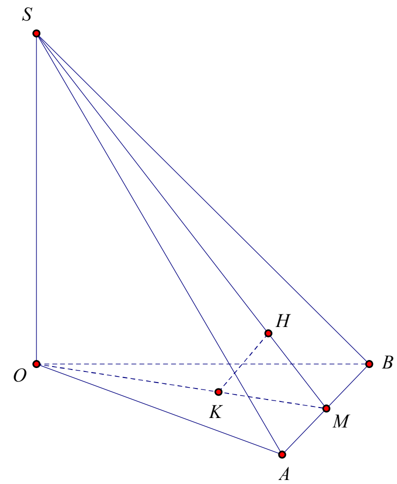
**II.1. Chứng minh một điểm thuộc một mặt hoặc một đường cố định.**

**Ví dụ 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A\left(1;\sqrt{3};0\right),B\left(-1;\sqrt{3};0\right)$ và điểm $C$ di động trên trục $Oz$. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Biết rằng khi $C$ di động trên $Oz$ thì $H$ luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính đường tròn đó.

**A.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Ta thấy $A, B$ thuộc $\text{mp}(Oxy) \Rightarrow OC \perp (OAB)$.

Gọi $K$ là trực tâm $\Delta OAB$ và $M$ là trung điểm của $AB$.

Ta chứng minh được $KH \perp (ABC) \Rightarrow KH \perp HM \Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính $KM$.

Mặt khác, $H \in (MOz)$

Do đó $H$ thuộc đường tròn giao tuyến của mặt cầu đường kính $KM$ và $\text{mp}(MOz)$.

Do $\text{mp}(MOz)$ chứa đường kính $KM$ của mặt cầu nên giao tuyến của mặt cầu với $\text{mp}(MOz)$ là đường tròn lớn của mặt cầu $\Rightarrow r = R = \dfrac{KM}{2}$.

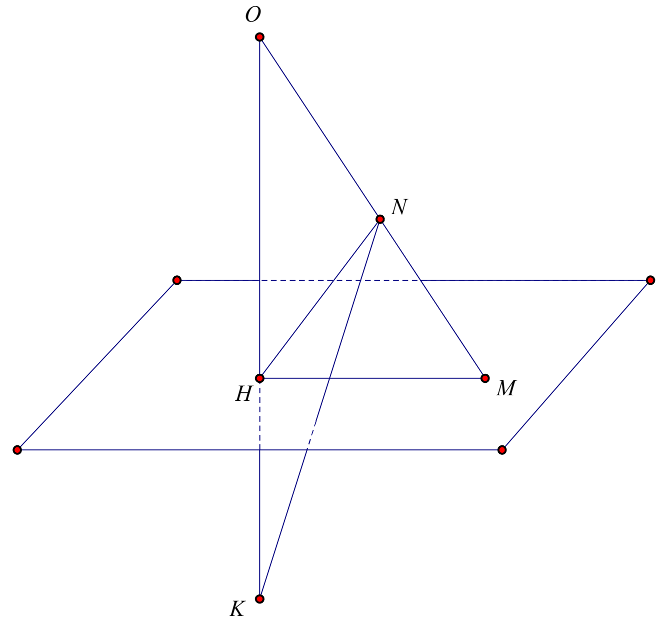
$\Delta OAB$ đều $\Rightarrow KM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

**Ví dụ 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm $M$ thay đổi trên mặt phẳng $(ABC)$ và $N$ là điểm trên tia $OM$ sao cho $OM.ON = 12$. Biết rằng khi $M$ thay đổi, điểm $N$ luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

**A.** $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right): \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên mặt phẳng $\left(ABC\right) \Rightarrow \begin{cases} H\left(\frac{72}{49};\frac{36}{49};\frac{24}{49}\right) \\ OH=\frac{12}{7} \end{cases}$

Trên tia $OH$ lấy điểm $K$ sao cho $OH.OK=12 \Rightarrow OK=7 \Rightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{49}{12}\overrightarrow{OH} \Rightarrow K\left(6;3;2\right)$.

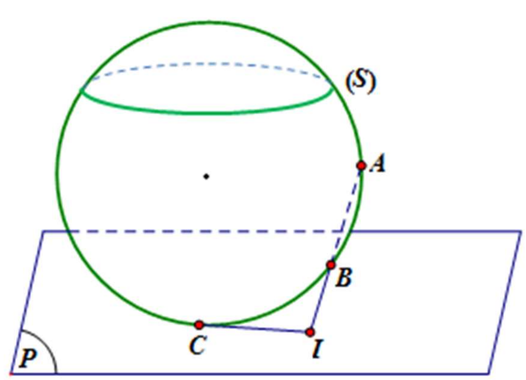
Ta có $OH.OK=OM.ON \Rightarrow \frac{OH}{ON}=\frac{OM}{OK} \Rightarrow$ Hai tam giác $OHM$ và $ONK$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{ONK}=\widehat{OHM}=90^0 \Rightarrow N$ thuộc mặt cầu đường kính $OK \Rightarrow R=\frac{OK}{2}=\frac{7}{2}$.

**Ví dụ 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu $\left(S\right)$ đi qua $A$, $B$ và tiếp xúc với $\left(P\right)$ tại $C$. Biết rằng $C$ luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A.** $R=4$. **B.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$. **C.** $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$. **D.** $R=6$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $I=AB\cap\left(P\right)$.

Ta có $IC^2 = IA.IB \Rightarrow IC = \sqrt{IA.IB}$.

$\overrightarrow{AB} = (-4;-4;-4)$.

Phương trình của đường thẳng $AB$ là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$.

$I = AB \cap (P) \Rightarrow I(3;3;3) \Rightarrow IA = 2\sqrt{3}, IB = 6\sqrt{3} \Rightarrow IC = 6 \Rightarrow C$ thuộc mặt cầu tâm $I$, bán kính bằng $6$.

Mà $C \in (P)$ suy ra $C$ thuộc đường tròn giao tuyến của mặt cầu $S(I;6)$ với $(P)$.

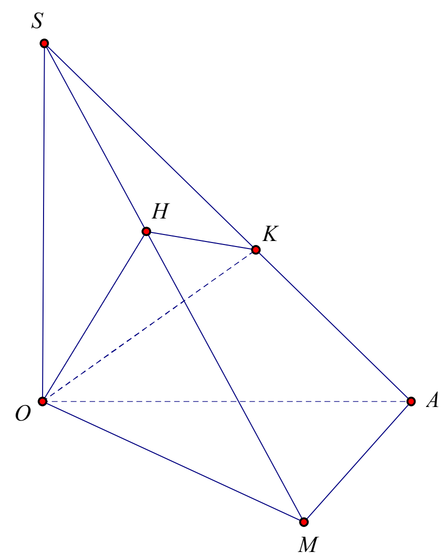
Vì $I \in (P) \Rightarrow (P)$ cắt $S(I;6)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn. Do đó $R = 6$.

**Ví dụ 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;8;0), S(0;0;10)$. Gọi $M$ là điểm di động trên đường tròn đường kính $OA$ nằm trong mặt phẳng $(Oxy)$; $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $SM$. Biết rằng $H$ thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính đường tròn đó.

**A.** $\frac{5\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$

**Lời giải**

**Chọn B**




Từ giả thiết suy ra $AM \perp OM \Rightarrow AM \perp (SOM) \Rightarrow AM \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAM)$.

Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $SA \Rightarrow SA \perp (OKH) \Rightarrow \text{mp}(OKH)$ cố định.

Do $S, A$ cố định nên $K$ cố định.

Vì $OH \perp (SAM) \Rightarrow OH \perp HK$

$\Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính $OK$.

Mà $H \in (OHK)$

Vậy $H$ thuộc đường tròn đường kính $OK$ nằm trong mặt phẳng $(OHK) \Rightarrow R = \frac{OK}{2}$.

Dễ thấy $\Delta SOA$ vuông cân tại $O \Rightarrow OK = \frac{SA}{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

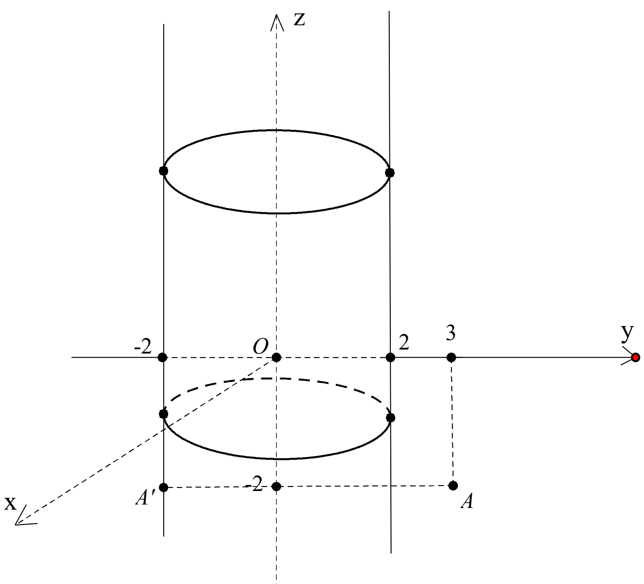
**II.2. Bài toán cực trị**

**Ví dụ 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng $d$ thay đổi, song song với trục $Oz$ và cách $Oz$ một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ $A$ đến $d$ lớn nhất, $d$ đi qua điểm nào sau đây ?

**A.** $P(0;-2;-5)$. **B.** $N(0;2;-5)$. **C.** $M(0;8;-5)$. **D.** $Q(-2;0;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Do $d(d;Oz)=2$ nên $d$ là đường sinh của mặt trụ có trục là $Oz$.

$A\in(Oyz)$ ; $(Oyz)$ cắt mặt trụ theo 2 đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=0\\y=2\\z=t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=0\\y=-2\\z=t\end{cases}$

Dễ thấy : $\text{Max}\left[d(A;d)\right]=d(A;d_2)=5$ khi $d\equiv d_2\Rightarrow d$ đi qua $P(0;-2;-5)$.

**Ví dụ 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;3;4),B(1;3;4)$. Gọi $M$ là điểm nằm trong mặt phẳng $(Oxy)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=24$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng $OM$.

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $6$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB\Rightarrow I(0;3;4)$.

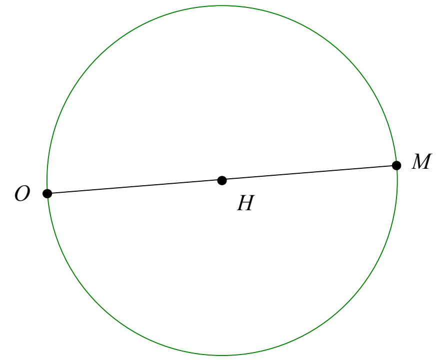
Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2-IA^2=MI^2-1$

$\Rightarrow MI^2-1=24\Rightarrow MI=5\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu $(S)$ tâm $I$ bán kính bằng 5.

Mặt khác $M$ thuộc $(Oxy)$

Từ đó suy ra $M$ thuộc đường tròn $(C)$ là giao tuyến của $(S)$ và $(Oxy)$.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(Oxy)\Rightarrow H(0;3;0)$ và $IH=4\Rightarrow$ bán kính của $(C)$ là : $r=3\Rightarrow O\in(C)$.




$OM$ là một dây cung của $(C) \Rightarrow \text{Max}(OM) = 2r = 6$.

**Ví dụ 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$ mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + \left(z+\sqrt{2}\right)^2 = 3$. $M$ là điểm di động trên mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho có ít nhất 2 tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $M$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng $AM$.

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$(S)$ có tâm $I\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Để từ $M$ có thể kẻ được ít nhất 2 tiếp tuyến đến $(S)$ thì $IM \ge R$.

Khi $IM > R$ thì tập hợp các tiếp tuyến kẻ từ $M$ đến $(S)$ là một mặt nón đỉnh $M$ và mỗi tiếp tuyến là một đường sinh của mặt nón đó.

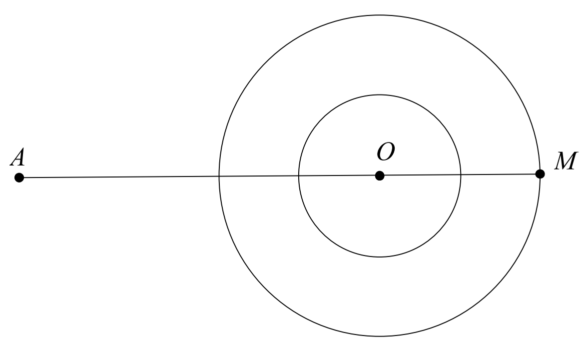
Để có ít nhất 2 đường sinh vuông góc với nhau thì góc ở đỉnh của mặt nón phải lớn hơn hoặc bằng $90^0 \Leftrightarrow IM \le R\sqrt{2}$

Vậy $R \le IM \le R\sqrt{2}$.

Gọi $M(a;b;0) \Rightarrow 3 \le a^2 + b^2 + 2 \le 6 \Rightarrow 1 \le a^2 + b^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le OM \le 2$

$\Rightarrow M$ nằm giữa 2 đường tròn cùng tâm $O$ và có bán kính lần lượt bằng 1 và 2 (kể cả biên) nằm trong mặt phẳng $(Oxy)$.

Điểm $A(3;0;0)$ thuộc mặt phẳng $(Oxy)$ và nằm ngoài cả hai đường tròn.




Suy ra $\text{Max}(AM) = OA + 2 = 5$.

**Ví dụ 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;10), B(3;4;6)$. Xét các điểm $M$ thay đổi sao cho tam giác $OAM$ không có góc tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng $MB$ thuộc khoảng nào sau đây?

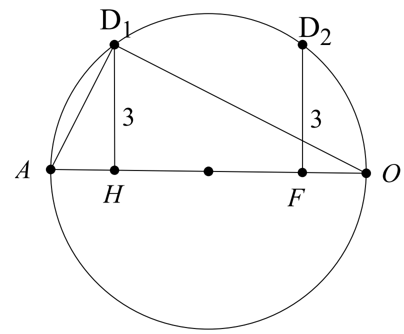
**A.** $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $S_{OAM}=\frac{1}{2}OA.d\left(M;OA\right)=15\Rightarrow d\left(M;OA\right)=3$.

Suy ra $M$ thuộc mặt trụ trục $OA$, bán kính bằng 3.

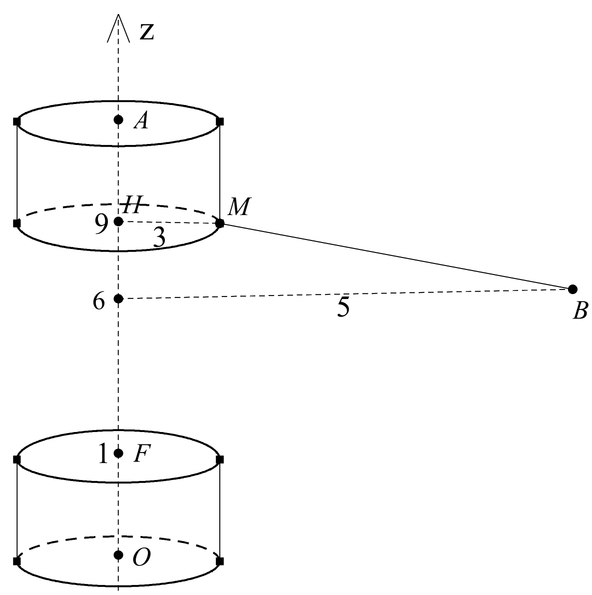



Xét điểm $D$ thuộc đường tròn đường kính $AO$ sao cho $d\left(D;AO\right)=3$

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $AO$

Ta có : $\begin{cases} HA.HO=DH^2=9 \\ HA+HO=AO=10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} HA=1 \\ HO=9 \end{cases}$

Vì $\widehat{AMO}\le 90^0$ nên $M$ thuộc hình trụ có trục lần lượt là $AH,FO$ như hình vẽ sau




Từ hình vẽ suy ra $\min\left(MB\right)=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

**III. Hệ thống câu hỏi ôn tập**

**Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(-2;6;0\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right):3x+4y+89=0$. Đường thẳng $d$ thay đổi nằm trên $\left(Oxy\right)$ và luôn đi qua $A$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M\left(4;-2;3\right)$ trên $d$. Khoảng cách nhỏ nhất từ $H$ đến $\left(P\right)$ bằng:

**A.** 15. **B.** 20. **C.** $\frac{68}{5}$. **D.** $\frac{93}{5}$.

**Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ tâm $I\left(1;-2;3\right)$ bán kính $R=5$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+2y-2z+1=0$. Một đường thẳng $d$ qua $O$, song song $\left(P\right)$ cắt mặt cầu $\left(S\right)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$. Tính giá trị lớn nhất của đoạn $AB$.

**A.** 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z=0$ và 3 điểm $A(2;0;2), B(4;0;4), C(5;2;4)$. Gọi $M$ là điểm di động trên $(P)$ sao cho có một mặt cầu $(S)$ đi qua $A$ và tiếp xúc với $(\alpha)$ tại $M$. Khi đó, độ dài đoạn $CM$ có giá trị nhỏ nhất là

**A.** 3. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{109}$. **D.** $\sqrt{13}$.

**Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$. Lấy điểm $M$ trong không gian sao cho từ $M$ kẻ được các tiếp tuyến $MA, MB, MC$ đến $(S)$ ($A, B, C$ là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB}=60^0, \widehat{BMC}=90^0, \widehat{CMA}=120^0$. Biết rằng $M$ thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

**Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$ và điểm $P(2;4;5)$ nằm trong mặt cầu. Qua $P$ dựng 3 dây cung $AA', BB', CC'$ của mặt cầu $(S)$ đôi một vuông góc với nhau. Dựng hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là $PA, PB, PC$. Gọi $PQ$ là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó. Biết rằng $Q$ luôn chạy trên một mặt cầu cố định. Bán kính của mặt cầu đó bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{219}}{6}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{219}}{2}$. **D.** $\sqrt{57}$.

**Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z-18=0$. Khi $M$ thay đổi trên $(P)$ lấy điểm $N$ thuộc tia $OM$ sao cho $OM.ON=36$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $NA^2+NB^2$.

**A.** $16-8\sqrt{3}$. **B.** $24-8\sqrt{3}$. **C.** $20-8\sqrt{3}$. **D.** $8-4\sqrt{3}$.

**Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng $d$ qua $A$ vuông góc với $(Q): 3x+4y-4z+5=0$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại $B$. Điểm $M$ nằm trong $(P)$ và nhìn $AB$ dưới góc $90^0$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn $MB$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{41}$.

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và đi $A(1;1;1)$. Hai điểm $B$, $C$ di động trên đường thẳng $d$ sao cho mặt phẳng $(OAB)$ vuông góc với mặt phẳng $(OAC)$. Gọi điểm $B'$ là hình chiếu vuông góc của điểm $B$ lên đường thẳng $AC$. Biết rằng quỹ tích các điểm $B'$ là đường tròn cố định, tính bán kính $r$ đường tròn này.

**A.** $r=\dfrac{\sqrt{60}}{10}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **D.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

**Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm $M$ thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM}=\widehat{AMC}=90^0$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng $OM$.

**A.** $\sqrt{24-6\sqrt{6}}$. **B.** $\sqrt{24+6\sqrt{6}}$. **C.** $3+\sqrt{11}$. **D.** $\sqrt{11}-3$.

**Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm $M$ thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM}=\widehat{AMC}=90^0$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $B$ và vuông góc với $AC$ cắt $AM$ tại $N$. Khoảng cách từ $N$ đến $(ABC)$ có giá trị lớn nhất bằng

**A.** $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

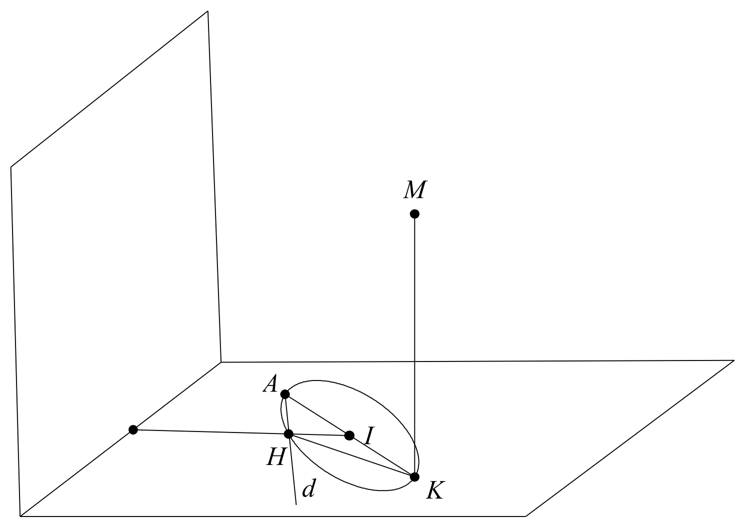
## HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI ÔN TẬP

**Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;6;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+4y+89=0$. Đường thẳng $d$ thay đổi nằm trên $(Oxy)$ và luôn đi qua $A$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M(4;-2;3)$ trên $d$. Khoảng cách nhỏ nhất từ $H$ đến $(P)$ bằng:

**A.** 15. **B.** 20. **C.** $\frac{68}{5}$. **D.** $\frac{93}{5}$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $(Oxy) \Rightarrow K(4;-2;0)$ và tam giác $AKH$ vuông tại $H$ $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính $AK$ nằm trong $(Oxy)$.




Gọi $I$ là tâm của đường tròn thì $I(1;2;0)$

Ta có $\text{Min}\left[d\left(H;(P)\right)\right] = \left|d\left(I;(P)-r\right)\right| = 15$.

**Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=5$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Một đường thẳng $d$ qua $O$, song song $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$. Tính giá trị lớn nhất của đoạn $AB$.

**A.** 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết suy ra $d$ thuộc mặt phẳng $(Q)$ qua $O$ và song song với $(P)$

Phương trình $(Q): x+2y-2z=0$

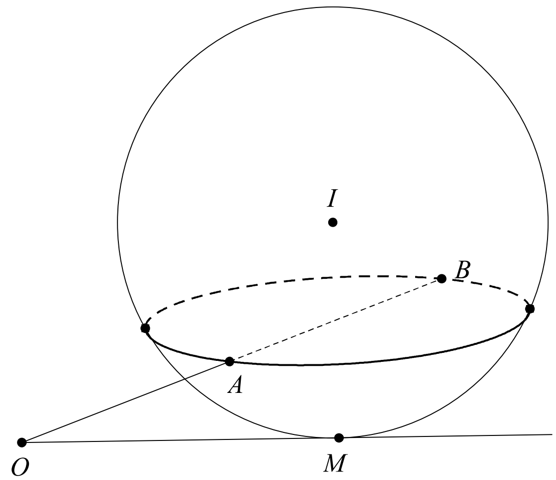
Gọi $(C)$ là giao tuyến của $(Q)$ và $(S)$ thì $\text{Max}(AB)=2r$ ($r$ là bán kính của $(C)$)

Vậy $\text{Max}(AB) = 2\sqrt{R^2 - \left[d\left(I;(Q)\right)\right]^2} = 8$.

**Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z=0$ và 3 điểm $A(2;0;2), B(4;0;4), C(5;2;4)$. Gọi $M$ là điểm di động trên $(P)$ sao cho có một mặt cầu $(S)$ đi qua $A$ và tiếp xúc với $(\alpha)$ tại $M$. Khi đó, độ dài đoạn $CM$ có giá trị nhỏ nhất là

**A.** 3. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{109}$. **D.** $\sqrt{13}$.

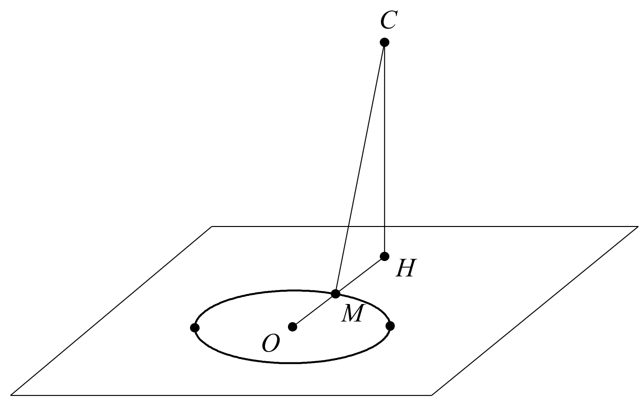
**Hướng dẫn giải**




Ta thấy $AB \cap (\alpha) = O(0;0;0)$

Ta có $OA.OB = OM^2 \Rightarrow OM = 4 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $O$ bán kính $r = 4$ nằm trong $(\alpha)$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $(C)$ trên $(\alpha) \Rightarrow H(4;4;2)$.

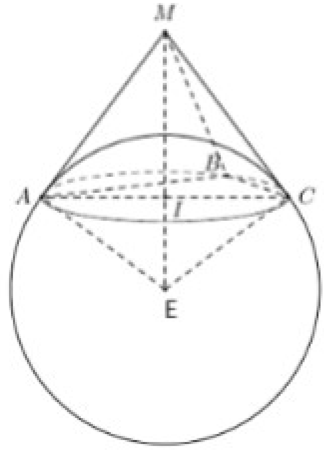



Ta có $CM = \sqrt{CH^2 + MH^2} \geq \sqrt{CH^2 + (OH - r)^2} = \sqrt{13}$.

**Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 27$. Lấy điểm $M$ trong không gian sao cho từ $M$ kẻ được các tiếp tuyến $MA, MB, MC$ đến $(S)$ ($A, B, C$ là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB} = 60^0, \widehat{BMC} = 90^0, \widehat{CMA} = 120^0$. Biết rằng $M$ thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

**Hướng dẫn giải**




$(S)$ có tâm $E(1;2;-3)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Đặt $MA=x\Rightarrow\begin{cases}AB=x\\BC=x\sqrt{2}\\CA=x\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $B$.

Gọi $I=ME\cap(ABC)\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC\Rightarrow I$ là trung điểm của $AC$.

Trong tam giác $AME$ có $AI=\dfrac{AM.AE}{ME}=\dfrac{x.3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+27}}$

Lại có $AI=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

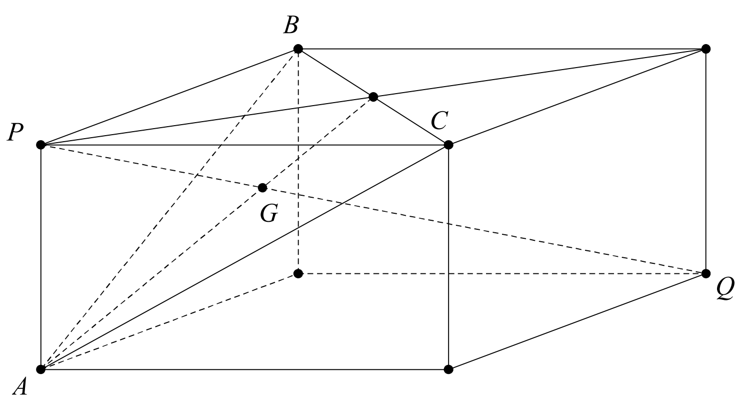
$\Rightarrow\dfrac{x.3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+27}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=3\Rightarrow EM=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=6$

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm $E$, bán kính bằng 6.

**Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$ và điểm $P(2;4;5)$ nằm trong mặt cầu. Qua $P$ dựng 3 dây cung $AA', BB', CC'$ của mặt cầu $(S)$ đôi một vuông góc với nhau. Dựng hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là $PA, PB, PC$. Gọi $PQ$ là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó. Biết rằng $Q$ luôn chạy trên một mặt cầu cố định. Bán kính của mặt cầu đó bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{219}}{6}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{219}}{2}$. **D.** $\sqrt{57}$.

**Hướng dẫn giải**




Gọi $G=PQ\cap(ABC)\Rightarrow G$ là trọng tâm $\Delta ABC$ và $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PG}\Rightarrow Q=V_{(P;3)}(G)$

Ta có: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}\Rightarrow 9PG^2=PA^2+PB^2+PC^2$

$\Rightarrow 9PG^2 = 3PI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{PI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$

$\Rightarrow 9PG^2 = 3PI^2 + 3R^2 + 6\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{IG}$

Gọi $G(x;y;z) \Rightarrow 9\left[(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2\right] = 27 + 75 + 6\left[-(x-1) - 2(y-2) - 2(z-3)\right]$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 30x - 60y - 78z + 237 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}x - \frac{20}{3}y - \frac{26}{3}z + \frac{79}{3} = 0$

$\Rightarrow G$ thuộc mặt cầu tâm $J\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$, bán kính $r = \frac{\sqrt{57}}{3}$

$\Rightarrow Q$ thuộc mặt cầu bán kính $\sqrt{57}$.

**Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z - 18 = 0$. Khi $M$ thay đổi trên $(P)$ lấy điểm $N$ thuộc tia $OM$ sao cho $OM.ON = 36$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $NA^2 + NB^2$.

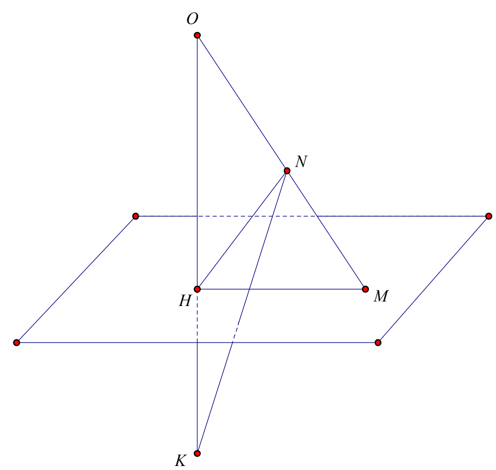
**A.** $16 - 8\sqrt{3}$. **B.** $24 - 8\sqrt{3}$. **C.** $20 - 8\sqrt{3}$. **D.** $8 - 4\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $(P) \Rightarrow \begin{cases} H(3;3;6) \\ OH = 3\sqrt{6} \end{cases}$

Trên tia $OH$, lấy điểm $K$ sao cho $OH.OK = 36$

$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} \Rightarrow K(2;2;4)$




Ta thấy hai tam giác $ONK$ và $OHN$ đồng dạng $\Rightarrow \Delta ONK$ vuông tại $N$ $\Rightarrow N$ thuộc mặt cầu $(S)$ đường kính $OK$ có tâm $I(1;1;2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Gọi $J$ là trung điểm của $AB \Rightarrow J(2;0;2)$

Ta có $NA^2 + NB^2 = \frac{4NJ^2 + AB^2}{2} = 2NJ^2 + 4$

$\Rightarrow \left(NA^2 + NB^2\right)_{\min} \Leftrightarrow NJ_{\min}$

Ta thấy $\min(NJ) = |IJ - R| = \sqrt{6} - \sqrt{2} \Rightarrow \min\left(NA^2 + NB^2\right) = 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 + 4 = 20 - 8\sqrt{3}$.

**Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng $d$ qua $A$ vuông góc với $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại $B$. Điểm $M$ nằm trong $(P)$ và nhìn $AB$ dưới góc $90^0$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn $MB$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.  **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.  **C.** $\sqrt{5}$.  **D.** $\sqrt{41}$.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=-3-4t\end{cases}\Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Vì $\widehat{AMB}=90^0\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu $(S)$ đường kính $AB$ có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0;-1\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

Mà $M\in(P)$

Suy ra $M$ thuộc đường tròn $(C)$ là giao tuyến của $(S)$ và $(P)$

Do $B\in(C)\Rightarrow MB$ là một dây cung của $(C)\Rightarrow \text{Max}(MB)=2\sqrt{R^2-\left[d(I;(P))\right]^2}=\sqrt{5}$.

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và đi $A(1;1;1)$. Hai điểm $B$, $C$ di động trên đường thẳng $d$ sao cho mặt phẳng $(OAB)$ vuông góc với mặt phẳng $(OAC)$. Gọi điểm $B'$ là hình chiếu vuông góc của điểm $B$ lên đường thẳng $AC$. Biết rằng quỹ tích các điểm $B'$ là đường tròn cố định, tính bán kính $r$ đường tròn này.

**A.** $r=\dfrac{\sqrt{60}}{10}$.  **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.  **C.** $r=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$.  **D.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

**Hướng dẫn giải**

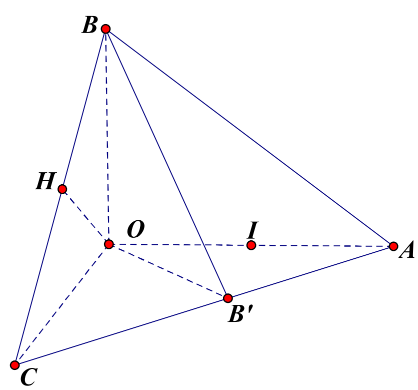
Một véctơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là $\vec{u}=(2;-1;-1)$. Suy ra $\vec{u}\perp\overrightarrow{OA}$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ trên đường thẳng $d$

$\Rightarrow H(2t;1-t;-1-t)$. Do $OH\perp d$ nên $4t-1+t+1+t=0\Rightarrow t=0\Rightarrow H(0;1;-1)$.

Suy ra $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA}=0\Rightarrow OH\perp OA$ và $OA\perp BC$ nên $OA\perp(OBC)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow OA\perp OB\\(OAB)\perp(OAC)\\OA=(OAB)\cap(OAC)\end{array}\right\}\Rightarrow OB\perp(OAC).$$




Do đó ta có: $\begin{cases}OB\perp AC\\BB'\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBB')\Rightarrow AB'\perp OB'$.

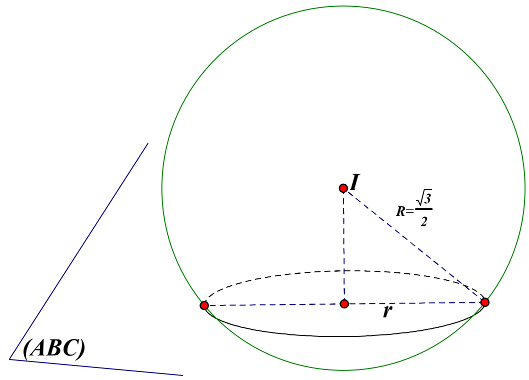
Vậy $B'$ thuộc mặt cầu $(S)$ đường kính $OA=\sqrt{3}$.

Gọi $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm $OA$

Phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

Mặt khác $B'\in(ABC)\equiv(A;d)$. Mặt phẳng $(ABC)$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AH};\vec{u}\right]=(2;5;-1)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC)$ : $2x+5y-z-6=0$.




Vậy $B'$ thuộc đường tròn cố định là đường tròn $(C)$, giao tuyến của mặt cầu $(S)$ và $(ABC)$.

$(C)$ có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$, với $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $d=d\left(I,(ABC)\right)=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

**Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm $M$ thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM}=\widehat{AMC}=90^0$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng $OM$.

**A.** $\sqrt{24-6\sqrt{6}}$. **B.** $\sqrt{24+6\sqrt{6}}$. **C.** $3+\sqrt{11}$. **D.** $\sqrt{11}-3$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có $BM\perp AB\Rightarrow M$ thuộc mp$(P)$ qua $B$ và vuông góc với $AB$

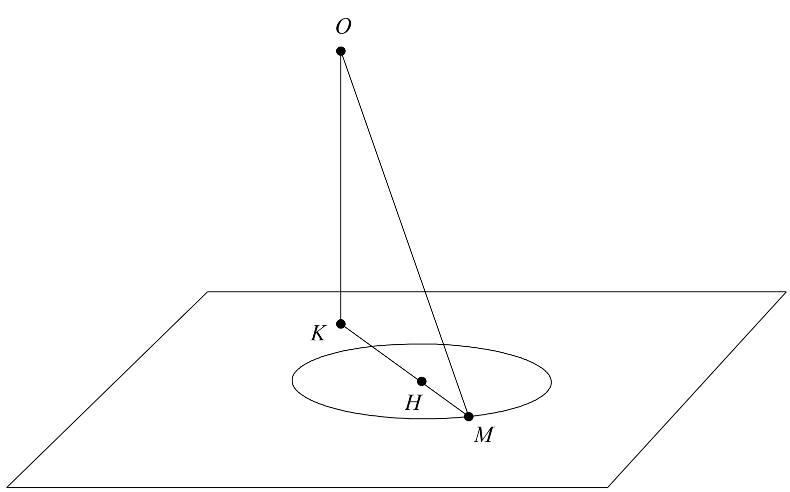
$\widehat{AMC}=90^0\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu $(S)$ đường kính $AC$

Do đó, $M$ thuộc đường tròn $(C)$ là giao tuyến của $(P)$ và $(S)$

Phương trình $(P): 2x+2y+z-9=0$

Phương trình $(S):(x-4)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$

$\Rightarrow(C)$ có tâm $H(3;1;-1)$ và bán kính $r=3$



Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $(P) \Rightarrow K(2;2;1)$

Ta có $OM = \sqrt{OK^2 + KM^2} \le \sqrt{OK^2 + (KH + r)^2} = \sqrt{9 + \left(\sqrt{6} + 3\right)^2} = \sqrt{24 + 6\sqrt{6}}$.

Vậy $\text{Max}(OM) = \sqrt{24 + 6\sqrt{6}}$.

**Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm $M$ thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM} = \widehat{AMC} = 90^0$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $B$ và vuông góc với $AC$ cắt $AM$ tại $N$. Khoảng cách từ $N$ đến $(ABC)$ có giá trị lớn nhất bằng

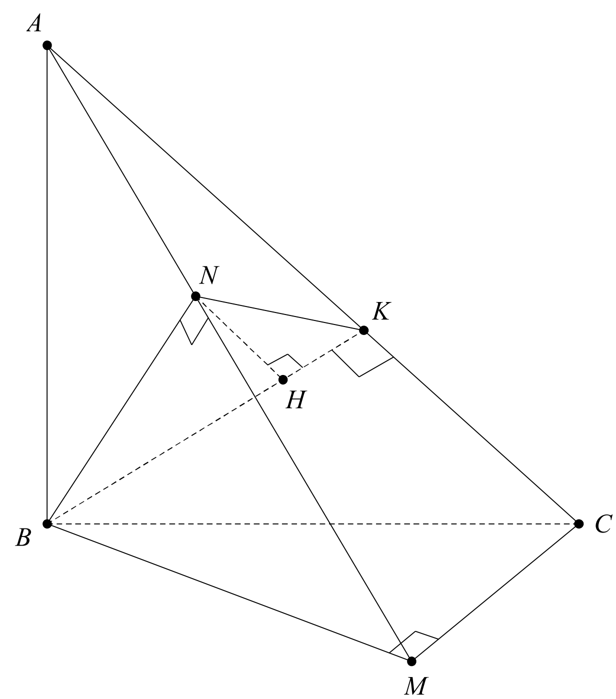
**A.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy $\Delta ABC$ vuông tại $B$, $AB = 3, BC = 6$.

Từ giả thiết $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MBC) \Rightarrow AB \perp MC \Rightarrow MC \perp (ABM) \Rightarrow MC \perp BM$

Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $AC \Rightarrow AC \perp (BKN)$




Tính được $BK = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Kẻ $NH \perp BK$ tại $H \Rightarrow NH \perp (ABC) \Rightarrow NH = d(N;(ABC))$

Chứng minh được $BN \perp (AMC) \Rightarrow BN \perp NK \Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính $BK$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow NH \le \frac{1}{2} BK = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.