**ĐỀ 82**

**HSG TOÁN 9 THÁI NGUYÊN 2023-2024**

**Bài 1 (3 điểm)** Cho $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$. Tính giá trị của biếu thức:

P = $a^{3}-b^{3}-6ab+2022$

**Bài 2 (6 điểm)** Cho biểu thức Q = $\left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}+\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\frac{4x}{x-9}\right)$.$\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

1. Rút gọn biểu thức Q
2. Tìm *x* biết Q = 36
3. Tìm *x* thỏa mãn $\left|Q\right|>Q$

**Bài 3 (4 điểm)** Cho phương trình $x^{2}-2\left(m+1\right)x+4m-m^{2}=0$ (m là tham số)

1. Giải phương trình với m = 1
2. Chứng mình rằng với mọi giá trị của m phương trình luông có hai nghiệm phân biệt
3. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ thỏa mãn:

$$x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}-4=0$$

**Bài 4 (5 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh $\hat{AEF}$ = $\hat{ACB}$. Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.
2. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng mình rằng $IK^{2 }=IB.IC$
3. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J $\ne $ A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Bài 5 (2 điểm)**

1. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì $\left(a^{4}-1\right)\left(a^{4}+15a^{2}+1\right)$ chia hết cho 35.
2. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

**-----------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1 (3 điểm)** Cho $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$. Tính giá trị của biếu thức:

P = $a^{3}-b^{3}-6ab+2022$

**Lời giải**

Ta có $a-b=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}=\sqrt{\left(2+\sqrt{7}\right)^{2}}-\sqrt{7}=2$

P = $a^{3}-b^{3}-6ab+2022=\left(a-b\right)\left[\left(a-b\right)^{2}+3ab\right]-6ab+2022$

= $\left(a-b\right)^{3}+3ab(a-b)-6ab+2022$

= $2^{3}+3ab.2-6ab+2022=2030$

Vậy P = 2030

**Bài 2 (6 điểm)** Cho biểu thức Q = $\left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}+\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\frac{4x}{x-9}\right)$.$\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

1. Rút gọn biểu thức Q
2. Tìm *x* biết Q = 36
3. Tìm *x* thỏa mãn $\left|Q\right|>Q$

**Lời giải**

**a)** ĐKXĐ $x\ne $ $9$; $x\ne $4; $x \geq $0

Q = $\left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}-\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\frac{4x}{x-9}\right)$.$\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

=$\left(\frac{\left(3+\sqrt{x}\right)^{2}-\left(3-\sqrt{x}\right)^{2}+4x}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}\right)$.$\frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$

=$\left(\frac{12x+4x}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}\right)$.$\frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$ =$\left(\frac{4\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}\right)$.$\frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}$

= $\frac{4x}{\sqrt{x}-2}$

b) Để Q = 36 $⇔$ $\frac{4x}{\sqrt{x}-2}$ = 36

$⇒$ $4x$ = 36$\left(\sqrt{x}-2\right)⇔x-9\sqrt{x}+18=0$

$⇔$ $\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-6\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}-3=0\\\sqrt{x}-6=0\end{array}\right.⇔\left[\begin{array}{c}x=9(KTM)\\x=36(TM)\end{array}\right.$

Vậy $x=36$ thì Q = 36

c) Để $\left|Q\right|>Q$ $⇒$ Q < 0 $⇒$ $\frac{4x}{\sqrt{x}-2}$ < 0

Vì $x$ $\geq $ 0 nên $\sqrt{x}-2$ < 0 $⇔$ $x$ < 4 $⇒$ 0$\leq x<4$

Vậy 0$\leq x<4$ thì $\left|Q\right|>Q$

**Bài 3 (4 điểm)** Cho phương trình $x^{2}-2\left(m+1\right)x+4m-m^{2}=0$ (m là tham số)

1. Giải phương trình với m = 1
2. Chứng mình rằng với mọi giá trị của m phương trình luông có hai nghiệm phân biệt
3. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ thỏa mãn:

$$x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}-4=0$$

**Lời giải**

a) Thay m =1 vào phương trình ta được: $x^{2}-4x+3=0$

Giải phương trình ta được: $x\_{1}$ = 1; $x\_{2}$ = 3

b) Ta có:

$∆'=\left(m+1\right)^{2}-\left(4m-m^{2}\right)=2m^{2}-2m+1=m^{2}+\left(m-1\right)^{2}>0$ với mọi m

c) Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ với mọi m

Theo đề bài ta có: $x\_{1}^{2}-2\left(m+1\right)x\_{1}+4m-m^{2}=0$

$⇔$ $x\_{1}^{2}=2\left(m+1\right)x\_{1}-4m+m^{2}$

Ta lại có: $x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{1}-4=0$

$⇒$ $2\left(m+1\right)x\_{1}-4m+m^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}-4=0$

$⇒$ $2\left(m+1\right)(x\_{1}+x\_{2})+m^{2}-4m-4=0$

Theo Vi-ét ta có: $x\_{1}+x\_{2}$ = $2\left(m+1\right)$

$⇒$ $\left[2\left(m+1\right)\right]^{2}+m^{2}-4m-4=0$

$⇔$ 3$m^{2}+4m=0⇔m(3m+4)=0$

 $⇔$ $\left[\begin{array}{c}m=0\\m=\frac{-4}{3}\end{array}\right.$

Vậy m = 0 hoặc m = $\frac{-4}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ thỏa mãn: $x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}-4=0$

**Bài 4 (5 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh $\hat{AEF}$ = $\hat{ACB}$. Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.
2. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng mình rằng $IK^{2 }=IB.IC$
3. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J $\ne $ A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Lời giải**

****

**a.** Ta có tứ giác AEKF nội tiếp vì $\hat{AEK}+\hat{AFK}=18$0⁰ $⇒$ $\hat{AEF}=\hat{AKF}$

Mà $\hat{AKF}$ = $\hat{ACK}$ (vì cùng phụ $\hat{CKF}$) hay $\hat{AKF}$ = $\hat{ACB}$ $⇒$ $\hat{AEF}$ = $\hat{ACB}$

Xét tứ giác BEFK có $\hat{AEF}$ = $\hat{ACB}$ mà $\hat{AEF}+\hat{BEF}=18$0⁰

$⇒$ $\hat{BEF}+\hat{ACB}=18$0⁰

$⇒$ tứ giác BEFK là tứ giác nội tiếp

b. Do tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn nên

 $⇒$ $△$IBF $\~$ $△$IEC (g-g) $⇒$ $\frac{IB}{IE}$ = $\frac{IF}{IC}⇒$IB.IC = IF.IE (1)

Xét $△$IEK $và$ $△$IKF có $\left\{\begin{array}{c}\hat{I} chung\\\hat{IKE} = \hat{BAK} (phụ góc ABC)\\\hat{BAL} = \hat{IFK} (tứ giác AEKF nội tiếp)\end{array}\right.$

Nên $△$IEK $\~$ $△$IKF

Suy ra $\frac{IK}{IF}$ = $\frac{IE}{IK}$ $⇒$ IK.IK = IE.IF (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK^{2 }=IB.IC$

c.



**Cách 1:** Thep ý b) ta có KJ $⊥$ AI

Kẻ đường kính AG của đường tròn (O)

Gọi H, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các cạnh AB, AC

Gọi $D\_{1}$ là giao điểm của LD và KG.

Do $IK^{2 }=IB.IC$ mà $\hat{AKI}$ = 90⁰ $⇒\hat{AJK}=\hat{AJG}=$ 90⁰ . Suy ra ba điểm G, K, J thẳng hàng

Do D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE nên ta có 1 = $\frac{EL}{LB}$ = $\frac{FH}{HC}$

Mặt khác L$D\_{1}$//GB $⇒\frac{FH}{HC}$ = $\frac{EL}{LB}$ = $\frac{KD\_{1}}{D\_{1}G}$ $⇒$H$D\_{1}$//CG $⇒$H$D\_{1}⊥ $CF.

Suy ra $D\_{1}$ $≡$ D hay ba điểm G, K, D thẳng hàng

Vậy bón điểm G, D, K, J thẳng hàng

**Cách 2**

****

Gọi G là giao điểm của EK và đường tròn (D).

Gọi H là giao điểm của KF và đường tròn (D).

Suy ra $\hat{BEG}=\hat{CFH}=$ 90⁰ nên BG, CH là đường kính của đường tròn (D).

Ta có 6 điểm H , B , E , F ,C , G cùng nằm trên đường tròn (D) với các điểm D , K , L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng ( BG,CH), (BC,HF), (BF, CE)

Khi đó theo định lý Pascal ta có ba điểm D , K , L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác nội tiếp BEFC ta có $\overbar{D,K,L} $vuông góc AI

Mà KJ $⊥$ AI nên ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Bài 5 (2 điểm)**

1. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì $\left(a^{4}-1\right)\left(a^{4}+15a^{2}+1\right)$ chia hết cho 35.
2. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

**Lời giải**

**a.** Ta có a $≡$ 1(mod 5) $⇒$ $a^{4}≡$ 1(mod 5) $⇒$ $a^{4}-1\vdots 5 $

a $≡$ 2(mod 5) $⇒$ $a^{4}≡$ 1(mod 5) $⇒$ $a^{4}-1\vdots 5 $

a $≡$ 3(mod 5) $⇒$ $a^{4}≡$ 1(mod 5) $⇒$ $a^{4}-1\vdots 5 $

a $≡$ 4(mod 5) $⇒$ $a^{4}≡$ 1(mod 5) $⇒$ $a^{4}-1\vdots 5 $

$⇒$ $a^{4}-1\vdots 5$ với mọi a không chia hết cho 5 (1)

Lại có a $≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

a $≡$ 2(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

a $≡$ 3(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

a $≡$ 4(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

a $≡$ 5(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

a $≡$ 6(mod 7) $⇒$ $a^{6}≡$ 1(mod 7) $⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $

$⇒$ $a^{6}-1\vdots 7 $ $⇒\left(a^{6}-1\right)\left(a^{2}+1\right)\vdots 7$ với mọi a không chia hết cho 7

$⇒$ $\left(a^{6}-1\right)\left(a^{2}+1\right)+14ab(a^{2}+1)(a^{2}-1)\vdots 7 $

Hay ($a^{4}-1$)($a^{4}+15a+1)\vdots 7$ (2)

Do (7,5) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra: ($a^{4}-1$)($a^{4}+15a+1)\vdots $ 35 với mọi a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7

b. Ta có $mn=p(m+n)⇔mn=pm+pn⇔m(n-p)=pn$

Vì (p,m) = 1 nên $\left\{\begin{array}{c}n=m\\n-p=p\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}n=2p\\m=2p\end{array}\right.$ mà (p,m) = 1

Nên $p=1$. Khi dó $mnp=4$ là số chính phương

**-----------HẾT------------**