**ĐỀ 82**

**HSG TOÁN 9 THÁI NGUYÊN 2023-2024**

**Bài 1 (3 điểm)** Cho . Tính giá trị của biếu thức:

P =

**Bài 2 (6 điểm)** Cho biểu thức Q = .

1. Rút gọn biểu thức Q
2. Tìm *x* biết Q = 36
3. Tìm *x* thỏa mãn

**Bài 3 (4 điểm)** Cho phương trình (m là tham số)

1. Giải phương trình với m = 1
2. Chứng mình rằng với mọi giá trị của m phương trình luông có hai nghiệm phân biệt
3. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt ; thỏa mãn:

**Bài 4 (5 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh = . Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.
2. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng mình rằng
3. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Bài 5 (2 điểm)**

1. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì chia hết cho 35.
2. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

**-----------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1 (3 điểm)** Cho . Tính giá trị của biếu thức:

P =

**Lời giải**

Ta có

P =

=

=

Vậy P = 2030

**Bài 2 (6 điểm)** Cho biểu thức Q = .

1. Rút gọn biểu thức Q
2. Tìm *x* biết Q = 36
3. Tìm *x* thỏa mãn

**Lời giải**

**a)** ĐKXĐ ; 4; 0

Q = .

=.

=. =.

=

b) Để Q = 36 = 36

= 36

Vậy thì Q = 36

c) Để Q < 0 < 0

Vì 0 nên < 0 < 4 0

Vậy 0 thì

**Bài 3 (4 điểm)** Cho phương trình (m là tham số)

1. Giải phương trình với m = 1
2. Chứng mình rằng với mọi giá trị của m phương trình luông có hai nghiệm phân biệt
3. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt ; thỏa mãn:

**Lời giải**

a) Thay m =1 vào phương trình ta được:

Giải phương trình ta được: = 1; = 3

b) Ta có:

với mọi m

c) Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt ; với mọi m

Theo đề bài ta có:

Ta lại có:

Theo Vi-ét ta có: =

3

Vậy m = 0 hoặc m = thì phương trình có hai nghiệm phân biệt ; thỏa mãn:

**Bài 4 (5 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc với K trên các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh = . Từ đó chỉ ra tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.
2. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Chứng mình rằng
3. Đường thẳng IA cắt đường tròn (O) tại điểm J (J A). Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE. Chứng minh rằng ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Lời giải**

****

**a.** Ta có tứ giác AEKF nội tiếp vì 0⁰

Mà = (vì cùng phụ ) hay = =

Xét tứ giác BEFK có = mà 0⁰

0⁰

tứ giác BEFK là tứ giác nội tiếp

b. Do tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn nên

IBF IEC (g-g) = IB.IC = IF.IE (1)

Xét IEK IKF có

Nên IEK IKF

Suy ra = IK.IK = IE.IF (2)

Từ (1) và (2) suy ra

c.



**Cách 1:** Thep ý b) ta có KJ AI

Kẻ đường kính AG của đường tròn (O)

Gọi H, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các cạnh AB, AC

Gọi là giao điểm của LD và KG.

Do mà = 90⁰ 90⁰ . Suy ra ba điểm G, K, J thẳng hàng

Do D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE nên ta có 1 = =

Mặt khác L//GB = = H//CG HCF.

Suy ra D hay ba điểm G, K, D thẳng hàng

Vậy bón điểm G, D, K, J thẳng hàng

**Cách 2**

****

Gọi G là giao điểm của EK và đường tròn (D).

Gọi H là giao điểm của KF và đường tròn (D).

Suy ra 90⁰ nên BG, CH là đường kính của đường tròn (D).

Ta có 6 điểm H , B , E , F ,C , G cùng nằm trên đường tròn (D) với các điểm D , K , L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng ( BG,CH), (BC,HF), (BF, CE)

Khi đó theo định lý Pascal ta có ba điểm D , K , L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác nội tiếp BEFC ta có vuông góc AI

Mà KJ AI nên ba điểm D, K, J thẳng hàng.

**Bài 5 (2 điểm)**

1. Chứng minh rằng nếu a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì chia hết cho 35.
2. Cho m, n, p là ba số nguyên dương thỏa mãn mn = p(m + n) và m, p là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mnp là số chính phương.

**Lời giải**

**a.** Ta có a 1(mod 5) 1(mod 5)

a 2(mod 5) 1(mod 5)

a 3(mod 5) 1(mod 5)

a 4(mod 5) 1(mod 5)

với mọi a không chia hết cho 5 (1)

Lại có a 1(mod 7) 1(mod 7)

a 2(mod 7) 1(mod 7)

a 3(mod 7) 1(mod 7)

a 4(mod 7) 1(mod 7)

a 5(mod 7) 1(mod 7)

a 6(mod 7) 1(mod 7)

với mọi a không chia hết cho 7

Hay ()( (2)

Do (7,5) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra: ()( 35 với mọi a là số tự nhiên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7

b. Ta có

Vì (p,m) = 1 nên mà (p,m) = 1

Nên . Khi dó là số chính phương

**-----------HẾT------------**