

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NÔNG CỐNG 3

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**HƯỚNG DẪN HỌC SINH SỬ DỤNG TỌA ĐỘ
TRONG HÌNH HỌC PHẪNG ĐỂ CHỨNG MINH MỘT
SỐ BẤT ĐẲNG THỨC, GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG
TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ NHẪM
NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG ĐỐI VỚI HỌC SINH
LỚP 10 Ở TRƯỜNG THPT NÔNG CỐNG 3**

Người thực hiện: Nguyễn Thị Hiền
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

Tiêu đề	Trang
A. MỞ ĐẦU.....	3
B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	4
I. THỰC TRẠNG.....	4
II. CƠ SỞ LÝ LUẬN.....	4
III. BÀI TOÁN MINH HỌA.....	6
1. Một số bài toán về bất đẳng thức, chứng minh.....	6
2. Một số bài toán về phương trình.....	10
3. Một số bài toán về bất phương trình	14
4. Một số bài tập tương tự.....	16
IV. KIỂM NGHIỆM.....	17
C. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ.....	18
D. TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	19

A. MỞ ĐẦU

Hiện nay, chúng ta đang tiến hành đổi mới giáo dục phổ thông. Mục tiêu của các cấp học đều hướng đến việc hình thành năng lực nhận thức, năng lực hành động, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực thích ứng cho học sinh, phát huy tính tích cực, chủ động, độc lập sáng tạo trong nhận thức của người học, bồi dưỡng năng lực tự học, gắn học với hành, tác động đến tình cảm đem lại niềm vui hứng thú học tập cho học sinh.

Trong môn Toán ở trường phổ thông các bài toán về chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình đại số ngày càng được quan tâm đúng mức và có sức hấp dẫn mạnh mẽ nhờ vào vẻ đẹp, tính độc đáo của các phương pháp giải chúng. Bài tập về bất đẳng thức, phương trình và bất phương trình đại số rất phong phú và đa dạng cả về nội dung và phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình đại số có thể xuất phát từ nhiều kiến thức khác nhau và giải bằng nhiều phương pháp khác nhau, trong đó có phương pháp sử dụng tọa độ trong hình học để chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình đại số. Với mục đích thay đổi hình thức của bài toán đại số thông thường thành bài toán sử dụng tọa độ hình học để giải. Phương pháp này tuy không phải là chiếc chìa khoá vạn năng để có thể giải được cho mọi bài toán về chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình đại số và chưa chắc phương pháp này đã là phương pháp thích hợp nhất nhưng nó lại có nét lý thú và độc đáo riêng của nó, giúp học sinh thấy được sự liên hệ mật thiết, qua lại giữa các phân môn của môn Toán với nhau. Đó là nội dung mà tôi muốn đề cập đến trong phạm vi của sáng kiến kinh nghiệm này: ***“Hướng dẫn học sinh sử dụng tọa độ trong hình học phẳng để chứng minh một số bất đẳng thức, giải một số phương trình và bất phương trình đại số nhằm nâng cao chất lượng đối với học sinh lớp 10 ở trường THPT”.***

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. THỰC TRẠNG

Trong năm học 2015-2016 tôi được phân công giảng dạy bộ môn Toán ở lớp 10A6, 10A7 trường THPT Nông Cống 3. Tôi nhận thấy: Hầu hết học sinh rất ngại khi gặp các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình hoặc bất phương trình đại số. Có rất ít học sinh có khả năng giải quyết được các bài toán này, đa số các em không thể tự nhìn ra hướng giải quyết bài toán. Qua kết quả khảo sát ở lớp 10A6, 10A7 trường THPT Nông công 3, thu được kết quả như sau:

Lớp	Điểm Giỏi		Điểm Khá		Điểm TB		Điểm Yếu		Điểm Kém	
	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ
10A6	1/45	2,2%	4/45	8,9%	14/45	31,1 %	19/45	42,2%	7/45	15,6%
10A7	1/47	2,1%	6/47	12,8%	18/47	38,3 %	17/47	36,2%	5/47	10,6%

Với mong muốn góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán ở nhà trường THPT và giúp học sinh đạt kết quả cao trong các kì thi tôi chọn đề tài: ***“Hướng dẫn học sinh sử dụng tọa độ trong hình học phẳng để chứng minh một số bất đẳng thức, giải một số phương trình và bất phương trình đại số nhằm nâng cao chất lượng đối với học sinh lớp 10 ở trường THPT”***. Nhằm đơn giản các bài toán đại số, khắc sâu kiến thức cơ bản về hình học và hình thành kỹ năng giải bài toán về chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình.

II. CƠ SỞ LÝ LUẬN

1. Kiến thức cơ bản

Khi sử dụng phương pháp tọa độ trong hình học phẳng để chứng minh một số bất đẳng thức và giải một số phương trình và bất phương trình đại số các em học sinh cần ôn lại các kiến thức về khoảng cách giữa hai điểm, bất đẳng thức tam

giác, bất đẳng thức véc tơ (SGK hình học 10 và sách giáo viên hình học 10) để có thể nhanh chóng nhận dạng và tiếp cận được với phương pháp này.

• **Bất đẳng thức tam giác:**

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh BC, CA, AB tương ứng là a, b, c. Ta luôn có:

$$+ |b - c| < a < b + c \text{ hay } |CA - AB| < BC < CA + AB.$$

$$+ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$+ \text{Cho 3 điểm A, B, C bất kì, ta luôn có } |AC - AB| \leq BC \leq AC + AB \quad (*).$$

Dấu “=” xảy ra trong $|AC - AB| \leq BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Dấu “=” xảy ra trong $BC \leq AC + AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ngược hướng.

Suy ra, dấu “=” trong (*) xảy ra khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ luôn cùng phương.

Như vậy ta chọn A, B, C có tọa độ thích hợp và dĩ nhiên liên quan đến bất đẳng thức, chứng minh rồi sử dụng các bất đẳng thức trên suy ra kết quả.

• **Bất đẳng thức véc tơ:**

Cho $\vec{u} = (a; b), \vec{v} = (x; y)$ khác véc tơ không. Khi đó:

$$+ \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}, k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \cdot x \\ b = k \cdot y \end{cases}, \quad k > 0$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ ngược hướng} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}, k < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \cdot x \\ b = k \cdot y \end{cases}, \quad k < 0$$

$$+ |\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Bất đẳng thức $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}|$ luôn đúng, dấu “=” xảy ra khi $\|\vec{u}\| \geq \|\vec{v}\|$ và $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng.

Dấu “=” trong bất đẳng thức $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

$$+ \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Do

$$|\cos(u, v)| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|ax + by|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

$$(*) \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \leq ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trong đó:

Dấu “=” trong bất đẳng thức $-\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \leq ax + by$ xảy ra khi u, v ngược hướng.

Dấu “=” trong đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ xảy ra khi u, v cùng hướng.

+ $u \cdot v \leq |u| \cdot |v|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow u, v$ cùng hướng.

2. Các bước thực hiện

Bước 1: Khéo léo biến đổi bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình về dạng có chứa

- $\sqrt{a^2 + b^2}$ để có thể đặt $u = (a; b)$
- $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ đặt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$
- $\frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$ hoặc $\frac{|ac + bd|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$ đặt $u = (a; b), v = (c; d)$

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức tam giác hoặc bất đẳng thức véc tơ trên để giải và đưa ra kết luận.

III. BÀI TOÁN MINH HỌA

1. Một số bài toán về bất đẳng thức, chứng minh:

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số a, b, c ta có:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}$$

Giải. Ta nhận thấy:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + ac + c^2} = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} - a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{b^2 + bc + c^2} = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}c}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2}$$

Xét tọa độ 3 điểm A(a; 0), B $\left(-\frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$, C $\left(-\frac{c}{2}; -\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$. Ta có:

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{b}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

$$AC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} - a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}c}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$$

Từ $BC \leq AB + AC$ suy ra:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài toán 2. Cho $a > c > 0$ và $b > c > 0$. Chứng minh:

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$u = (\sqrt{c}; \sqrt{b - c}), v = (\sqrt{a - c}; \sqrt{c})$$

Giải. Xét 2 véc tơ

Khi đó:

$$\begin{aligned} |\cos(\vec{u}, \vec{v})| &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\sqrt{c} \cdot \sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} \cdot \sqrt{c}|}{\sqrt{c+a-c} \cdot \sqrt{b-c+c}} \\ &= \frac{|\sqrt{c} \cdot \sqrt{a-c} + \sqrt{(b-c) \cdot c}|}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{|\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}|}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

Mà $|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}|}{\sqrt{ab}} \leq 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}| \leq \sqrt{ab} \\ &\Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a-c} \cdot \sqrt{b-c} \Leftrightarrow ab = ac + bc$$

Hoặc: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki (Bất đẳng thức (*)) cho 4 số $\sqrt{c}, \sqrt{a-c}, \sqrt{b-c}, \sqrt{c}$, ta có:

$$\begin{aligned} |\sqrt{c} \cdot \sqrt{a-c} + \sqrt{(b-c) \cdot c}| &\leq \sqrt{c+a-c} \cdot \sqrt{b-c+c} \\ \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} &\leq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài toán 3. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \geq \sqrt{17}$$

Giải. Biến đổi bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \geq \sqrt{17} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-3)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + 1^2} &\geq \sqrt{(3-2)^2 + (1+3)^2} \end{aligned}$$

Xét tọa độ 3 điểm A(x; 0), B(2; -3), C(3; 1).

Ta có:
$$\begin{cases} \vec{AB} = (2-x; -3) & AB = \sqrt{(2-x)^2 + (-3)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 13} \\ \vec{AC} = (3-x; 1) & AC = \sqrt{(3-x)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 10} \\ \vec{BC} = (1; 4) & \Rightarrow BC = \sqrt{(3-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{17} \end{cases}$$

Ta luôn có: $AB + AC \geq BC \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \geq \sqrt{17}$

Dấu “=” xảy ra khi $\overline{AB}, \overline{AC}$ ngược hướng, tức là

$$\begin{cases} 2-x=k.(3-x) \\ -3=k.1 \end{cases}, \quad k < 0 \Leftrightarrow (2-x).1 = (3-x).(-3) \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi x ta có:

$$-1 < \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1$$

Giải. Biến đổi bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} & -1 < \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1 \\ \Leftrightarrow & -1 < \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} < 1 \\ & A(-x; 0), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Xét các điểm

Ta có:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ AC &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + 1} \\ BC &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $|AB - AC| \leq BC$ suy ra:

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\overline{AB}, \overline{AC}$ cùng phương, tức là

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \quad (\text{vô lí})$$

Do đó dấu “=” không xảy ra. Vậy $-1 < \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$ (đpcm)

Bài toán 5. Chứng minh $\forall x \in [-1; 3]$ ta luôn có:

$$-10 < 4\sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1} < 10$$

Giải. Tập xác định $D = [-1; 3]$

Xét hai véc tơ: $u = (4; -3), v = (\sqrt{3-x}; \sqrt{x+1})$

Khi đó:

$$\begin{aligned} |\cos(\vec{u}, \vec{v})| &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|4 \cdot \sqrt{3-x} + 3 \cdot \sqrt{x+1}|}{\sqrt{4^2+3^2} \cdot \sqrt{(3-x)+(x+1)}} \\ &= \frac{|4 \cdot \sqrt{3-x} + 3 \cdot \sqrt{x+1}|}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot \sqrt{3-x} + 3 \cdot \sqrt{x+1}|}{10} \leq 1 \Leftrightarrow -10 \leq 4\sqrt{3-x} + 3\sqrt{x+1} \leq 10$$

Dấu “=” trong $-10 \leq 4\sqrt{3-x} + 3\sqrt{x+1}$ xảy ra khi u, v ngược hướng,

Dấu “=” trong $4\sqrt{3-x} + 3\sqrt{x+1} \leq 10$ xảy ra khi u, v cùng hướng

Hay u, v cùng phương, tức là $4 \cdot \sqrt{x+1} = -3 \cdot \sqrt{3-x}$ (không xảy ra)

Do đó dấu “=” không xảy ra. Vậy $-10 < 4\sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1} < 10$ (đpcm).

2. Một số bài toán về phương trình:

Bài toán 1. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 5\sqrt{2}$$

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (-4)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 3^2} = \sqrt{[(x-3) - (x-4)]^2 + [3 - (-4)]^2}$$

Xét 3 điểm $A(x-4; -4), B(x-3; 3), O(0; 0)$

$$\begin{cases} OA = \sqrt{(x-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \\ OB = \sqrt{(x-3)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 18} \\ AB = \sqrt{[(x-3) - (x-4)]^2 + [3 - (-4)]^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó:

Ta luôn có: $OA + OB \geq AB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} \geq 5\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ngược hướng, tức là

$$\begin{cases} x-4 = k \cdot (x-3) \\ -4 = k \cdot 3 \end{cases}, \quad k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-4) = -4(x-3) \Leftrightarrow x = \frac{24}{7}$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm $x = \frac{24}{7}$.

Bài toán 2. Giải phương trình:

$$\left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right| = 5$$

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Phương trình biến đổi về dạng:

$$\left| \sqrt{(x-2)^2 + (0-1)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (0-5)^2} \right| = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2}$$

Xét 3 điểm $A(2;1), B(5;5), C(x;0)$. Khi đó:

$$\begin{cases} AC = \sqrt{(x-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ BC = \sqrt{(x-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 50} \\ AB = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$$

Ta luôn có: $|AC - BC| \leq AB$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right| \leq 5$$

Dấu “=” xảy ra khi $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} x-2=k.(x-5) \\ -1=k.(-5) \end{cases}, \quad k>0 \Leftrightarrow (x-2)(-5)=(-1)(x-5) \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm $x=\frac{5}{4}$.

Bài toán 3. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$$

Giải. Tập xác định $D=R$

Biến đổi phương trình

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(-x-1)^2+3^2}=\sqrt{29} \\ & \begin{cases} \vec{u}=(x-1;2) \\ \vec{v}=(-x-1;3) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(-2;5) \end{aligned}$$

Xét các véc tơ:

Khi đó:

$$\begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{(x-1)^2+2^2} \\ |\vec{v}|=\sqrt{(-x-1)^2+3^2} \\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|+|\vec{v}|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(-x-1)^2+3^2}=VT \\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}=VP \end{cases}$$

Mặt khác: $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10} \geq \sqrt{29}$

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} x-1=k.(-x-1) \\ 2=k.3 \end{cases}, \quad k>0 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(-x-1) \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{5}$.

Bài toán 4. Giải phương trình:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$$

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Biến đổi phương trình

$$\sqrt{(2x-1)^2 + 1^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} = \sqrt{(3x-2)^2 + 3^2}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (2x-1; 1) \\ \vec{v} = (x-1; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3x-2; 3)$$

Xét các véc tơ:

$$\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(2x-1)^2 + 1^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} \\ |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3x-2)^2 + 3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{(2x-1)^2 + 1^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} = VT \\ |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3x-2)^2 + 3^2} = VP \end{cases}$$

Khi đó:

Mặt khác: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} 2x-1 = k \cdot (x-1) \\ 1 = k \cdot 2 \end{cases}, \quad k > 0 \Leftrightarrow 2(2x-1) = 1(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm

Bài toán 5. Giải phương trình:

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

Giải. Tập xác định $D = [-1; 3]$

Biến đổi phương trình

$$\frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x+1} + 1 \cdot \sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(x+1) + (3-x)}} = 1$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (x; 1) \\ \vec{v} = (\sqrt{x+1}; \sqrt{3-x}) \end{cases}$$

Xét các véc tơ:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(x+1)+(3-x)}} = \frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{2\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

Khi đó:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{2\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

Mặt khác,

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} x = k\sqrt{x+1} \\ 1 = k \cdot \sqrt{3-x} \end{cases}, \quad k > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(3-x) = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x^2-2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Bài toán 6. Tìm tập nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} = 5$$

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Biến đổi phương trình

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} = 5$$

Xét các véc tơ: $\begin{cases} \vec{u} = (x+3; 2y) \\ \vec{v} = (1-x; 3-2y) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (4; 3)$

$$\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \\ |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\Rightarrow \begin{cases} |u| + |v| = \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} = VT \\ |u+v| = 5 = VP \end{cases}$$

Mặt khác: $|u| + |v| \geq |u+v| \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \geq 5$

Dấu “=” xảy ra khi u, v cùng hướng, tức là: $\begin{cases} x+3 = k \cdot (1-x) \\ 2y = k \cdot (3-2y) \end{cases}, \quad k \geq 0 \quad (*)$

Từ đó, suy ra điều kiện là: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

Suy ra: $(*) \Leftrightarrow (x+3)(3-2y) = 2y(1-x) \Leftrightarrow 3x - 8y + 9 = 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là những cặp $(x; y)$ thỏa mãn

$$3x - 8y + 9 = 0 \quad \text{với} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương pháp này có thể sử dụng để biến đổi một phương trình trong hệ phương trình đại số về dạng đơn giản (như bài toán 6 trên) để kết hợp với phương trình còn lại và giải.

3. Một số bài toán về bất phương trình:

Bài toán 1. Giải bất phương trình

(1)

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1$

Xét các véc tơ: $\begin{cases} \vec{u} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{v} = \left(\frac{1}{2} - x; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (1; \sqrt{3})$

$$|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}|$$

Khi đó, ta luôn có:

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \leq 2$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$

Bài toán 2. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2} \leq \sqrt{x-1} + x - 3 \quad (1)$$

Giải. Điều kiện: $x \geq 1$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sqrt{(x-3)^2 + x-1} \leq \sqrt{x-1} + x-3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+1^2} \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2} \leq \sqrt{x-1} + x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1} + x-3}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2}} \geq 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (x-3; \sqrt{x-1}) \\ \vec{v} = (1; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Xét các véc tơ:

Ta luôn có :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{x-1} + x-3}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2}}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1} + x-3}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x-1})^2}} \leq 1 \quad (3)$$

Mà

Từ (2) và (3) suy ra, bất phương trình (1) có nghiệm khi bất đẳng thức (3) xảy ra

dấu “=” hay hai véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là

$$x-3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm $x = 5$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{9x^2 - 12x + 13} \geq \sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \quad (1)$$

Giải. Tập xác định $D=R$

Biến đổi bất phương trình thành:

$$\sqrt{(3x-2)^2+3^2} \geq \sqrt{(2x-1)^2+1^2} + \sqrt{(x-1)^2+2^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (2x-1; 1) \\ \vec{v} = (x-1; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3x-2; 3)$$

Xét các véc tơ:

$$\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(2x-1)^2+1^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(x-1)^2+2^2} \\ |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(3x-2)^2+3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|+|\vec{v}| = \sqrt{(2x-1)^2+1^2} + \sqrt{(x-1)^2+2^2} = VP \\ |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(3x-2)^2+3^2} = VT \end{cases}$$

Khi đó:

$$\text{Mặt khác: } |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)^2+3^2} \leq \sqrt{(2x-1)^2+1^2} + \sqrt{(x-1)^2+2^2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra bất phương trình (1) có nghiệm khi dấu “=” ở (3) xảy ra.

Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} 2x-1 = k \cdot (x-1) \\ 1 = k \cdot 2 \end{cases}, \quad k > 0 \Leftrightarrow 2(2x-1) = 1(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

4. Một số bài tập tương tự

Bài 1. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(x-1)\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{x^2-2x+2}, \quad \forall x \in [0;1]$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1} = 2$$

Bài 3. Giải phương trình

$$\sqrt{2(x-3)^2+2x-2} = \sqrt{x-1} + x-3$$

Bài 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} \geq \sqrt{29}$$

IV. KIỂM NGHIỆM

* Khảo sát tại hai lớp học trong cùng thời điểm khi chưa vận dụng nội dung sáng kiến kinh nghiệm:

Lớp	Điểm Giỏi		Điểm Khá		Điểm TB		Điểm Yếu		Điểm Kém	
	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ
10A6	1/45	2,2%	4/45	8,9%	14/45	31,1%	19/45	42,2%	7/45	15,6%
10A7	1/47	2,1%	6/47	12,8%	18/47	38,3%	17/47	36,2%	5/47	10,6%

* Qua thực tế giảng dạy tôi đã vận dụng cho các em học sinh lớp 10A6 tiếp xúc với phương pháp trên, tôi nhận thấy kết quả được nâng lên rõ rệt. Cụ thể sau khi cho học sinh tiếp cận phương pháp này tôi tiến hành khảo sát, kiểm tra tại hai lớp học trong cùng thời điểm khi vận dụng nội dung sáng kiến kinh nghiệm cho lớp 10A6 và thu được kết quả như sau:

Lớp	Điểm Giỏi		Điểm Khá		Điểm TB		Điểm Yếu		Điểm Kém	
	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ	SL	tỷ lệ
10A6	6/45	13,3%	14/45	31,1%	20/45	44,4%	5/45	11,2%	0/45	0%
10A7	1/47	2,1%	8/47	17,0%	19/47	40,4%	17/47	36,2%	2/47	4,3%

C. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

Thông qua một số bài toán trên có thể thấy được vai trò của ứng dụng tọa độ trong hình học phẳng vào việc giải các bài toán về chứng minh, bất đẳng thức, phương trình và hệ phương trình đại số. Tuy nhiên, khi sử dụng phương pháp này giáo viên cần phải cung cấp cho học sinh một số vốn kiến thức nhất định và kỹ năng nhận dạng bài tập. Phương pháp này cũng như mọi phương pháp khác không thể áp dụng được cho tất cả các bài toán về chứng minh, bất đẳng thức, phương trình và hệ phương trình đại số và chưa hẳn đây đã là một phương pháp tối ưu. Do vậy học sinh cần căn cứ vào đặc điểm của từng bài toán, khai thác giả thiết đã cho và nhận dạng bài tập để lựa chọn phương pháp giải cho thích hợp, từ đó sẽ có cách nhìn linh hoạt, uyển chuyển và có sự nhuần nhuyễn về kỹ năng khi giải các bài tập về chứng minh, bất đẳng thức, phương trình và hệ phương trình đại số.

Qua thực tế giảng dạy tôi đã mạnh dạn vận dụng cho các em học sinh tiếp xúc với phương pháp trên tôi nhận thấy kết quả được nâng lên rõ rệt. Cụ thể đã được kiểm nghiệm tại lớp 10A6 năm học 2015 – 2016. Tôi thiết nghĩ, phương pháp này có thể mở rộng áp dụng vào giải một số hệ phương trình đại số.

Với những kinh nghiệm của bản thân, tôi mong rằng có thể giúp các đồng nghiệp làm tài liệu tham khảo và hy vọng các bạn đồng nghiệp có thể vận dụng một cách linh hoạt, sáng tạo để đem lại hiệu quả trong giảng dạy. Rất mong nhận được sự chia sẻ, đóng góp ý kiến để đề tài được hoàn thiện hơn.

Đề tài trên chỉ là một kinh nghiệm nhỏ, kết quả của sự tìm tòi và nghiên cứu cá nhân, thông qua một số tài liệu tham khảo nên không tránh khỏi những hạn chế, khiếm khuyết. Vậy rất mong được Hội đồng khoa học ngành, đồng nghiệp trong và ngoài nhà trường góp ý để nội dung của sang kiến kinh nghiệm này được hoàn thiện và ứng dụng rộng rãi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn !

Thanh Hóa, ngày 06 tháng 05 năm 2016

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Tôi xin cam đoan đây là SKKN
của mình viết, không sao chép
nội dung của người khác.

Nguyễn Thị Hiền

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Bộ Giáo dục – Đào tạo**, Sách giáo khoa Hình học 10, Hình học 10 nâng cao Nxb Giáo dục, 2006.
2. **Bộ Giáo dục – Đào tạo**, Sách Hình học 10 (sách giáo viên), Hình học 10 nâng cao (sách giáo viên) Nxb Giáo dục, 2006.
3. **Bộ Giáo dục – Đào tạo**, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên môn Toán lớp 10;
4. **Nguyễn Trọng Tuấn**, Rèn luyện giải toán hình học 10, Nxb Giáo dục, 2008.
5. **Lê Văn Đoàn**, Chuyên đề phương trình, bất phương trình Đại số