MỤC LỤC

◆CHƯƠNG ⑦. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

▶BÀI ❶. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

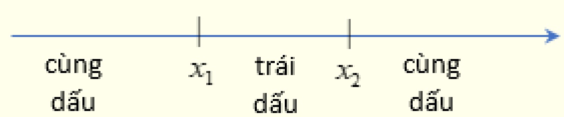
①. Tam thức bậc hai

- Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

②. Dấu của tam thức bậc hai

- Cho $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0), \Delta=b^2-4ac$.
- Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ và $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a khi $x\in(x_1;x_2)$.

✎ Trong đó $x_1.x_2$ là hai nghiệm của $f(x)$.

> Khi $\Delta>0$, dấu của $f(x)$ và a là: "Trong trái ngoài cùng"
>
> 
>

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng ❶: Tam thức bậc hai

Phương pháp

- Đa thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các hệ số, $a\neq 0$ và x là biến số được gọi là tam thức bậc hai.
- Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. Khi thay x bằng giá trị x_0 vào $f(x)$, ta được $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$, gọi là **giá trị của tam thức bậc hai** tại x_0.
- Nếu $f(x_0)>0$ thì ta nói $f(x)$ dương tại x_0;
- Nếu $f(x_0)<0$ thì ta nói $f(x)$ âm tại x_0;
- Nếu $f(x)$ dương (âm) tại mọi điểm x thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói $f(x)$ dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai? Nếu là tam thức bậc hai, hãy xét dấu của nó tại $x=2$.

a) $f(x)=-x^2+x+3$

b) $g(x)=-3x+\dfrac{13}{2}$

Lời giải

a) Biểu thức $f(x)=-x^2+x+3$ là một tam thức bậc hai.

$f(2)=-2^2+2+3=1>0$ nên $f(x)$ dương tại $x=2$.

b) Biểu thức $g(x)=-3x+\dfrac{13}{2}$ không phải là một tam thức bậc hai.

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. Khi đó:

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ là nghiệm của $f(x)$.

Biểu thức $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$ lần lượt là biệt thức và biệt thức thu gọn của $f(x)$

Câu 2: Tìm biệt thức và nghiệm của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x)=x^2+2x-4$

b) $g(x)=2x^2+x+1$

c) $h(x)=-x^2+x-\dfrac{1}{4}$

Lời giải

a) Tam thức bậc hai $f(x)=x^2+2x-4$ có $\Delta=2^2-4.1.(-4)=20$.

Do đó, $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}$;$x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}$.

b) Tam thức bậc hai $g(x)=2x^2+x+1$ có $\Delta=1^2-4\cdot2.1=-7$. Vì $\Delta<0$ nên $g(x)$ vô nghiệm.

c) Tam thức bậc hai $h(x)=-x^2+x-\frac{1}{4}$ có $\Delta=1^2-4.(-1).\left(-\frac{1}{4}\right)=0$.

Do đó, $h(x)$ có nghiệm kép là $x=\frac{1}{2}$.

•Dạng ❷: Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp

- Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.
- Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị x.
- Nếu $\Delta=0$ và $x_0=-\frac{b}{2a}$ là nghiệm kép của $f(x)$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x khác x_0.
- Nếu $\Delta>0$ và x_1,x_2 là hai nghiệm của $f(x);(x_1<x_2)$ thì $f(x)$ trái dấu với a với mọi x trong khoảng $(x_1;x_2)$; $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x thuộc hai khoảng $(-\infty;x_1),(x_2;+\infty)$.

Chú ý:

- a) Để xét dấu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$, ta thực hiện các bước sau:
- Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức Δ;
- Bước 2: Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có);
- Bước 3: Xác định dấu của hệ số a;
- Bước 4: Xác định dấu của $f(x)$.
- b) Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x)=-x^2+3x+10$

b) $f(x)=4x^2+4x+1$

c) $f(x)=2x^2-2x+1$

Lời giải

a) $f(x)=-x^2+3x+10$ có $\Delta=49>0$, hai nghiệm phân biệt là $x_1=-2, x_2=5$ và $a=-1<0$

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x)$ dương trong khoảng $(-2;5)$ và âm trong hai khoảng $(-\infty;-2)$ và $(5;+\infty)$.

b) $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta=0$, nghiệm kép là $x_0=-\frac{1}{2}$ và $a=4>0$.

Vậy $f(x)$ dương với mọi $x\neq-\frac{1}{2}$.

c) $f(x)=2x^2-2x+1$ có $\Delta=-4<0$ và $a=2>0$. Vậy $f(x)$ dương với mọi $x\in\mathbb{R}$.

©. Dạng toán rèn luyện

⬩Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tam thức $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$, $\Delta=b^2-4ac$. Ta có $f(x)\le0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a\le0 \\ \Delta<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\ge0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f(x)\le0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le0 \end{cases}$

Câu 2: Cho tam thức bậc hai $f(x)=-2x^2+8x-8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)\ge0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)\le0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x-2)^2 \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3: Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x?

A. $x^2 - 10x + 2$. **B.** $x^2 - 2x - 10$. **C.** $x^2 - 2x + 10$. **D.** $-x^2 + 2x + 10$.

Lời giải

Chọn C

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của x phải có $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ nên Chọn **C**

Câu 4: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai. **B.** $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai. **D.** $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Lời giải

Chọn A

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 5: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \ne 0)$ và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

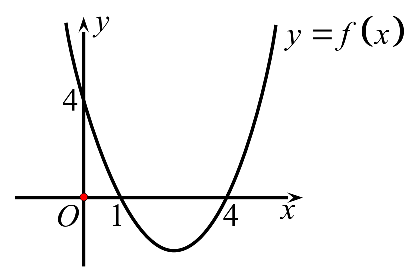
A. $\Delta < 0$. **B.** $\Delta = 0$. **C.** $\Delta > 0$. **D.** $\Delta \ge 0$.

Lời giải

Chọn A

* Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta < 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ.



A. $a>0$, $\Delta>0$. **B.** $a<0$, $\Delta>0$. **C.** $a>0$, $\Delta=0$. **D.** $a<0$, , $\Delta=0$.

Lời giải

Chọn A

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a>0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$.

Câu 7: Cho tam thức $f(x)=x^2-8x+16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. **B.** $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. **D.** $f(x)<0$ khi $x<4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=x^2-8x+16=(x-4)^2$. Suy ra $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.

C. $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)$. **D.** $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=x^2+1\geq 1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 9: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

B. Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

D. Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số b, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 10: Cho tam thức bậc hai $f(x)=-x^2-4x+5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x)\geq 0$.

A. $x\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **B.** $x\in[-1;5]$.

C. $x\in[-5;1]$. **D.** $x\in(-5;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow x=1, x=-5$.

Mà hệ số $a=-1<0$ nên: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-5;1]$.

Câu 11: Biểu thức $(3x^2-10x+3)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

C. $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Lời giải

Đặt $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		+	0	-	|	-	0	+	
$4x-5$		-	|	-	0	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$. **Chọn B**

Câu 12: Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

A. $x\in(1;2)$. **B.** $x\in(-3;-2)\cup(1;2)$.

C. $x\geq 4$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $f(x)=(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ta có $x^2+5x+9=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing.$ Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+5x+9		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -2<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty).$ **Chọn D**

Câu 13: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn $f(x)$ không dương là

A. $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$.
B. $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.
C. $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.
D. $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{4x-12}{x^2-4x}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 3\le x<4 \end{array}\right.$ hay $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.

▪Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x^2-x-2$ có $f(x)<0$ với mọi $x\in(-1;2)$.

b) $f(x)=-x^2+2x-5$ có $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

c) $f(x)=-4x^2+16x-16$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

d) $f(x)=-4x^2+3x-5$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

a) Xét $f(x)=x^2-x-2$ có $\Delta=9>0,a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=-1;x_2=2$. Do đó, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $f(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ và $f(x)<0$ với mọi $x\in(-1;2)$.

b) Xét $f(x)=-x^2+2x-5$ có $\Delta'=-4<0,a=1>0$ nên $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

c) Ta có: $-4x^2+16x-16=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

d) Ta có: $-4x^2+3x-5=0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x^2-7x+6$ có $f(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$

b) $f(x)=36x^2+12x+1$ có $f(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$

c) $f(x)=5x^2-x+4$ có $f(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;+\infty)$

d) $f(x)=-3x^2+x+4$ có $f(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{4}{3};+\infty)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Ta có: $x^2-7x+6=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=6$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Ta có: $36x^2+12x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{6}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

c) Ta có: $5x^2-x+4=0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu:

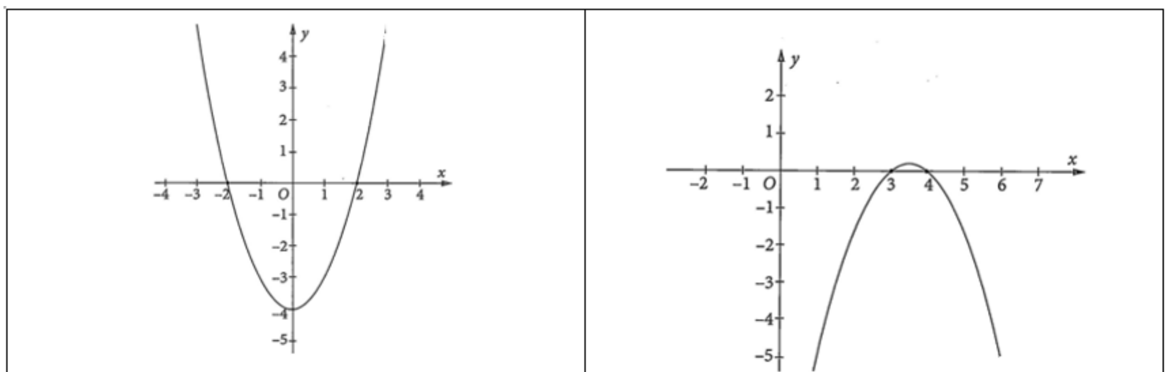
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

d) Ta có: $-3x^2+x+4=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=\dfrac{4}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Câu 2: Cho đồ thị hàm số bậc hai $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Khi đó:



$y=f(x)$	$y=g(x)$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-2;0)$ và $(2;0)$

b) Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(3;0)$ và $(4;0)$

c) Tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Tam thức bậc hai $g(x)$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-2;0)$ và $(2;0)$ nên tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=2$. Đồ thị có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a>0$. Do đó, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(3;0)$ và $(4;0)$ nên tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=3, x_2=4$. Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên hệ số $a<0$. Do đó, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Câu 3: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=2x^2-5x+2$ có $f(x)>0$, $\forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right)$

b) $f(x)=9-x^2$ có $f(x)>0, \forall x\in(-3;3)$

c) $f(x)=x^2-(\sqrt{7}-1)x+\sqrt{3}$ có $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

d $f(x)=-x^2+x-\frac{1}{4}$ có $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

a) $f(x)=2x^2-5x+2;(a=2,b=-5,c=2)$.

Ta có: $\Delta=(-5)^2-4.2.2=9>0; f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$. Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: $f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty); f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

b) $f(x) = 9 - x^2; (a = -1, b = 0, c = 9)$.

Ta có: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9 = 36 > 0; f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(x) > 0, \forall x \in (-3; 3); f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

c) $f(x) = x^2 - (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}; (a = 1, b = -\sqrt{7} + 1, c = \sqrt{3})$.

Ta có: $\Delta = (1 - \sqrt{7})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{7} - 4\sqrt{3} < 0$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Kết luận: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}; \left(a = -1, b = 1, c = -\frac{1}{4}\right)$.

Ta có: $\Delta = 1^2 - 4(-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0; f(x)$ có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Kết luận: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 4: Cho biểu thức $f(x) = (3x - 1)\left(3x^2 - 4x + 1\right)$. Khi đó:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1. \end{array}\right.$

b) Với $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ thì $f(x)<0$.

c) Với $x\in(1;+\infty)$ thì $f(x)<0$.

d) Bảng xét dấu của biểu thức là:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x^2-4x+1$		$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

Biểu thức $f(x)=(3x-1)(3x^2-4x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=0\\3x^2-4x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=1.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x^2-4x+1$		$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, với $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ thì $f(x)<0$.

Câu 5: Cho biểu thức $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-12}$. Khi đó:

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x=1+\sqrt{13}$ hoặc $x=1-\sqrt{13}$.

b) với $x\in(1-\sqrt{13};1+\sqrt{13})$ thì $f(x)>0$.

c) với $x\in(-\infty;1-\sqrt{13})\cup(1-\sqrt{13};+\infty)$ thì $f(x)<0$.

d) Bảng xét dấu của biểu thức là:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{13}$		$1+\sqrt{13}$		$+\infty$
$x^2-2x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

$x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{13}$ hoặc $x=1-\sqrt{13}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{13}$		$1+\sqrt{13}$		$+\infty$
$x^2-2x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Từ bảng xét dấu, với $x\in(1-\sqrt{13};1+\sqrt{13})$ thì $f(x)<0$.

với $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{13}\right)\cup\left(1-\sqrt{13};+\infty\right)$ thì $f(x)>0$.

Câu 6: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7x+6}$. Khi đó:

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

b) với $x\in(-\infty;-6)\cup(-1;3)$ thì $f(x)>0$.

c) với $x\in(-6;-1)\cup(3;+\infty)$ thì $f(x)<0$.

d) Bảng xét dấu của biểu thức là:

x	$-\infty$		-6		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2+7x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

Ta có: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3, x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-6		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2+7x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, với $x\in(-\infty;-6)\cup(-1;3)$ thì $f(x)<0$, với $x\in(-6;-1)\cup(3;+\infty)$ thì $f(x)>0$.

Câu 7: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $x^2+4x+3<0$ khi $x\in(-3;-1)$.

b) $x^2-6x+8\ge 0$ khi $x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

c) $f(x)=x^2-x+5$ luôn âm với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

d) $f(x)=-36x^2+12x-1$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 0 với mọi $x\in\mathbb{R}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

a) Xét $f(x)=x^2+4x+3$ có $\Delta'=1>0, a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=-3; x_2=-1$.

Do đó, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $f(x)=x^2+4x+3<0$ khi $x\in(-3;-1)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-3;-1)$.

b) Xét $f(x)=x^2-6x+8$ có $\Delta'=1>0, a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=2; x_2=4$.

Do đó, ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $f(x)=x^2-6x+8\ge 0$ khi $x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

c) Ta có: $f(x)=x^2-x+5=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\ge\frac{19}{4}, \forall x\in\mathbb{R}$. Vì vậy, $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

d) Ta có: $f(x)=-36x^2+12x-1=-\left[(6x)^2-2.6x+1\right]=-(6x-1)^2\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 8: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

a) $f(x)=(2x-1)(3x^2-10x+3)$ có $f(x)<0, \forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$

b) $f(x)=(-x^2+4)(2x^2-x-3)$ có $f(x)>0, \forall x\in(-2;-1)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$

c) $f(x)=\dfrac{-x^2-2x}{(x-1)(x^2+1)}$ có $f(x)>0, \forall x\in(-2;0)\cup(1;+\infty)$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+9x}{-2x^2+18}$ có $f(x)>0, \forall x\in(-3;0)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

a) Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(3x^2-10x+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\3x^2-10x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1}{3} \vee x=3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
2x-1		−	|	−	0	+	|	+	
$3x^2-10x+3$		+	0	−	|	−	0	+	
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Kết luận: $f(x)>0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty); f(x)<0, \forall x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

b) Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(-x^2+4\right)\left(2x^2-x-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+4=0\\2x^2-x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=-1 \vee x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x^2+4$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
$2x^2-x-3$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Kết luận: $f(x) > 0, \quad \forall x \in (-2;-1) \cup \left(\frac{3}{2};2\right)$;

$f(x) < 0, \quad \forall x \in (-\infty;-2) \cup \left(-1;\frac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty).$

c) Điều kiện: $(x-1)\left(x^2+1\right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.

Xét $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$-x^2-2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
f(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Kết luận: $f(x) > 0, \quad \forall x \in (-\infty;-2) \cup (0;1)$;

$f(x) < 0, \quad \forall x \in (-2;0) \cup (1;+\infty)$.

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x}{-2x^2 + 18} = \dfrac{x(x-3)^2}{-2x^2+18}$.

Điều kiện: $-2x^2 + 18 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$.

Xét $f(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (nghiệm kép)

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-3)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$-2x^2+18$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
f(x)		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Kết luận: $f(x) > 0, \quad \forall x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$;

$f(x) < 0, \quad \forall x \in (-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

Câu 9: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$. Khi đó:

a) Điều kiện: $x \neq 0$.

b) $f(x) = 0$ khi $x = 1$ và $x = 0$

c) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

d) $f(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^3 - 1}{x} = \dfrac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x}$.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Xét $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x + 1 \end{array}\right.$ (vô nghiệm) $\Rightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	|	$+$	|	$+$	
f(x)		$+$	||	$-$	0	$+$	

Kết luận: $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty); f(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$.

Câu 10: Cho tam thức bậc hai $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^3-8}$. Khi đó:

a) Điều kiện $x\neq 2$

b) $f(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

c) $f(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$

d) $f(x)<0,\ \forall x\in(-2;1)\cup(2;+\infty)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{x+6}{x^3-8}=\frac{\left(x^2+2x+4\right)-(x+6)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{x^2+x-2}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}.$$

Điều kiện: $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\x^2+2x+4\neq 0\ \text{(luôn đúng)}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 2$.

Xét $f(x)=0\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	0	+	
x^2+2x+4		+	|	+	|	+	|	+	
f(x)		−	||	+	0	−	||	+	

Kết luận: $f(x)>0,\ \forall x\in(-2;1)\cup(2;+\infty);\ f(x)<0,\ \forall x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$.

Câu 11: Xác định đúng, sai của các khẳng định sau

a) $f(x)=3x^2-2x-1$ có $f(x)>0,\ \forall x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty);\ f(x)<0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$

b) $f(x)=-x^2+2x-1$ có $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) $f(x)=-4x^2+12x-5$ có $f(x)>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right);\ f(x)<0,\ \forall x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$

d) $f(x)=3x^2-2x-8$ có $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Đặt $f(x)=3x^2-2x-1;\Delta=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)=16>0;f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là $x=1,x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty);f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

b) Đặt $f(x)=-x^2+2x-1;\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0;f(x)$ có nghiệm kép $x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Kết luận: $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Đặt $f(x)=-4x^2+12x-5;\Delta=12^2-4(-4)(-5)=64>0$;

$f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{5}{2},x=\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(x)>0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right);f(x)<0,\forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

d) Đặt $f(x)=-x^2+2x-8;\Delta=2^2-4(-1)(-8)=-28<0;f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Kết luận: $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 12: Cho $f(x) = (-x^2 + 3x)(2x^2 + 1)$. Khi đó:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

b) $2x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

d) $f(x) < 0, \forall x \in (0; 3)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 3x)(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 3x = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2 + 3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$2x^2 + 1$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(x) > 0, \forall x \in (0; 3); f(x) < 0, \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Câu 13: Cho $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6}$. Khi đó:

a) Điều kiện: $x \neq 6$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{8}{5}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\dfrac{8}{5}\right) \cup (6; +\infty)$

d) $f(x) < 0, \forall x \in \left(-\dfrac{8}{5}; 1\right) \cup (1; 6)$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Điều kiện: $x^2 - 7x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 6 \end{cases}$. Xét $f(x) = 0 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{8}{5}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		6		$+\infty$
$5x^2+3x-8$		+	0	−	0	+	|	+	
x^2-7x+6		+	|	+	0	−	0	+	
f(x)		+	0	−	||	−	||	+	

Kết luận: $f(x)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{8}{5}\right)\cup(6;+\infty); f(x)<0,\forall x\in\left(-\frac{8}{5};1\right)\cup(1;6)$.

Câu 14: Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<1$

b) $-36x^2+12x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{6}$

c) $x^2-(2+\sqrt{3})x+1+\sqrt{3}\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 1+\sqrt{3}$.

d) $\frac{5}{4}x^2-2x+2<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Xét $f(x)=-3x^2+2x+1; f(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\vee x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Ta có: $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}\vee x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

b) Xét $f(x)=-36x^2+12x-1; f(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$ (nghiệm kép).

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Ta có: $-36x^2+12x-1\geq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

c) Đặt $f(x)=x^2-(2+\sqrt{3})x+1+\sqrt{3}; f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $x^2-(2+\sqrt{3})x+1+\sqrt{3}\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 1+\sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=[1;1+\sqrt{3}]$.

d) Đặt $f(x)=\frac{5}{4}x^2-2x+2; f(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Ta có: $\frac{5}{4}x^2-2x+2<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\varnothing$.

Câu 15: Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau

a) $7x^2-4x-3<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{7}\right)\cup(1;+\infty)$

b) $-x^2+6x-9\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

c) $-5x^2+4x+12<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)\cup(2;+\infty)$

d) $3x^2-4x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Lời giải:

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Xét $7x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{3}{7}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{7}$		1		$+\infty$
$7x^2 - 4x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $7x^2 - 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{7};1\right)$.

Vậy, tập nghiệm bất phương trình là: $S = \left(-\dfrac{3}{7};1\right)$.

b) Xét $-x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 9$		$-$	0	$-$	

Ta có: $-x^2 + 6x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{3\}$.

Vậy, tập nghiệm bất phương trình là: $S = \{3\}$.

c) Xét $-5x^2 + 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\dfrac{6}{5}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{6}{5}$		2		$+\infty$
$-5x^2 + 4x + 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $-5x^2 + 4x + 12 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right) \cup (2;+\infty)$.

Vậy, tập nghiệm bất phương trình là: $S = \left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right) \cup (2;+\infty)$.

d) Xét $3x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2-4x+4$		$+$	

Ta có: $3x^2-4x+4\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Vậy, tập nghiệm bất phương trình là: $S=\mathbb{R}$.

Câu 16: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

a) $(1-2x)\left(x^2+x-30\right)<0$ có tập nghiệm $S=\left(-6;\dfrac{1}{2}\right)\cup(5;+\infty)$

b) $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}\ge 0$ có tập nghiệm $S=(-\infty;-1]$

c) $\dfrac{\left(2-x^2\right)\left(x^2-2x+1\right)}{-x^2+3x+4}>0$ có tập nghiệm $S=(1;\sqrt{2})\cup(4;+\infty)$

d) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}\le 2$ có tập nghiệm $S=(-\infty;-1]\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng

a) Xét $f(x)=(1-2x)\left(x^2+x-30\right)$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ x^2+x-30=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-6\vee x=5\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-6		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$1-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
x^2+x-30		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $(1-2x)\left(x^2+x-30\right)<0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-6;\dfrac{1}{2}\right)\cup(5;+\infty)$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $S=\left(-6;\dfrac{1}{2}\right)\cup(5;+\infty)$.

b) Đặt $f(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}$. Điều kiện: $x^2+5x+7\neq 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\neq 0$ (luôn đúng).

Xét $f(x)=0 \Rightarrow 4x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{1}{4}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-1$		+	0	−	0	+	
x^2+5x+7		+	|	+	|	+	
f(x)		+	0	−	0	+	

Ta có: $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

c) Đặt $f(x)=\dfrac{(2-x^2)(x^2-2x+1)}{-x^2+3x+4}$. Điều kiện: $-x^2+3x+4\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

Xét $f(x)=0 \Rightarrow (2-x^2)(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x^2=0 \\ x^2-2x+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$2-x^2$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	|	−	
x^2-2x+1		+	|	+	|	+	0	+	|	+	|	+	
$-x^2+3x+4$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	0	−	
f(x)		+	0	−	||	+	0	+	||	−	0	+	

Ta có: $\dfrac{(2-x^2)(x^2-2x+1)}{-x^2+3x+4}>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(4;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: $S=(-1;1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(4;+\infty)$.

d) $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}\le 2\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{2x(x-1)}{x(x-1)}\le 0\Leftrightarrow \frac{-2x^2-x+1}{x^2-x}\le 0$. Xét $f(x)=\frac{-2x^2-x+1}{x^2-x}$. Điều kiện: $x^2-x\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0\\ x\ne 1\end{cases}$.

Xét $f(x)=0\Rightarrow -2x^2-x+1=0\Rightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2-x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
x^2-x		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	
		$+$		$-$		$+$		$+$			

Ta có: $\frac{-2x^2-x+1}{x^2-x}\le 0\Leftrightarrow f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;-1]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$.

Câu 17: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f_1(x)=x^2-2x+3$ là tam thức bậc hai với $a=1;b=-2;c=3$.

b) $f_2(x)=3x-\frac{1}{2}x^2-4$ là tam thức bậc hai với $a=3;b=\frac{-1}{2};c=-4$.

c) $f_3(x)=\frac{x^2+6x-1}{3}$ là tam thức bậc hai với $a=1;b=6;c=-1$.

d) $f_4(x)=x^3+3x^2-2x+5$ không là tam thức bậc hai do có chứa x^3.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng

a) $f_1(x)=x^2-2x+3$ là tam thức bậc hai với $a=1;b=-2;c=3$.

b) $f_2(x)=3x-\frac{1}{2}x^2-4$ là tam thức bậc hai với $a=\frac{-1}{2};b=3;c=-4$.

c) $f_3(x)=\dfrac{x^2+6x-1}{3}=\dfrac{1}{3}x^2+2x-\dfrac{1}{3}$ là tam thức bậc hai với $a=\dfrac{1}{3};b=2;c=\dfrac{-1}{3}$.

d) $f_4(x)=x^3+3x^2-2x+5$ không là tam thức bậc hai do có chứa x^3.

Câu 18: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x^2+3x+2$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x)=-x^2+4x-3$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x)=-x^2+4x-4$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

d) $f(x)=2x^2+2x+4$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

a) $f(x)=x^2+3x+2$. Ta có: $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x)=-x^2+4x-3$. Ta có: $-x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x)=-x^2+4x-4$. Ta có: $-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

d) $f(x)=2x^2+2x+4$. Ta có: $2x^2+2x+4=0$ vô nghiệm

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

Câu 19: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$ có $f(x)>0, \forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$ có $f(x)>0, \forall x\in(1;2)$

c) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3-3x^2+2}$ có $f(x)>0, \forall x\in\left(\frac{2}{3};1\right)$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x^2-7x+6}$ có $f(x)>0, \forall x\in(1;4)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) $f(x)=(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$

Ta có: $-x^2+x-1=0$ vô nghiệm, $6x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{1}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$6x^2-5x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

Ta có: $2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=1; x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-x-1$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
x^2-4		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
f(x)		+	||	−	0	+	0	−	||	+	

c) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3-3x^2+2}$. Ta có: $\dfrac{3x-2}{x^3-3x^2+2}=\dfrac{3x-2}{(x-1)\left(x^2-2x-2\right)}$

$3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3};x-1=0\Leftrightarrow x=1;x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x-2$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$x-1$		−	|	−	|	−	0	+	|	+	
x^2-2x-2		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
f(x)		+	||	−	0	+	||	−	||	+	

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x^2-7x+6}$

Ta có:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-7x+6}=\frac{-2x+2}{\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-7x+6\right)}=\frac{2x-2}{(x-1)^2(x-4)(x-6)}.$$

$-2x+2=0\Leftrightarrow x=1;(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1;x-4=0\Leftrightarrow x=4;x-6=0\Leftrightarrow x=6$.

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+	|	+	|	+	
$-2x+2$		+	0	−	|	−	|	−	
$x^2-10x+24$		+	|	+	0	−	0	+	
f(x)		+	||	−	||	+	||	−	

Câu 20: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=-2x^2+3x-1$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x)=-x^2-1$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2-1$		$-$	

c) $f(x)=5x-x^2$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $-4x^2+12x-9<0, \forall x\in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

a) $f(x)=-2x^2+3x-1$

Tam thức có: $a=-2<0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt lần lượt là $\frac{1}{2};1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Tam thức có: $a=-1<0$ và $f(x)=-x^2-1=0$ vô nghiệm nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2-1$		$-$	

c) Tam thức có: $a=-1<0$ và $f(x)=5x-x^2=0$ có hai nghiệm là $0;5$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $f(x)=-4x^2+12x-9$

Ta có $\Delta'=0, a<0$ suy ra $-4x^2+12x-9<0, \forall x\in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 21: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $x^2-7x+12<0$ có tập nghiệm là $S=(3;4)$

b) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ có tập nghiệm là $S = (1;5)$

c) $-2x^2 + 7x - 9 < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ có tập nghiệm là $\{3\}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Tam thức $f(x) = x^2 - 7x + 12$ có 2 nghiệm là $x_1 = 3; x_2 = 4$ hệ số $a = 1 > 0$ nên ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) < 0, \forall x \in (3;4)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (3;4)$.

b) Tam thức $f(x) = x^2 - 6x + 5$ có 2 nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = 5$, hệ số $a = 1 > 0$ nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$.

c) Tam thức $f(x) = -2x^2 + 7x - 9$ có $\Delta = -23 < 0$, hệ số $a = -2 < 0$ nên ta có $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$.

d) Tam thức $f(x) = x^2 - 6x + 9$ có $\Delta = 0$, hệ số $a = 1 > 0$ nên ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\{3\}$.

Câu 22: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $-2x^2+x+1<x^2-x$ có tập nghiệm là $S=\left(-\frac{1}{3};1\right)$

b) $3x^2+x-14<2x^2-2$ có tập nghiệm là $S=(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$

c) $5x^2-3\sqrt{5}x>3\sqrt{5}x-9$ có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) $-40x^2+10x\geq 4x^2-2x+1$ có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) $-2x^2+x+1<x^2-x\Leftrightarrow -3x^2+2x+1<0$

Xét tam thức $f(x)=-3x^2+2x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\ x=1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$ hoặc $x>1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

b) $3x^2+x-14<2x^2-2\Leftrightarrow x^2+x-12<0$

Tam thức $f(x)=x^2+x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=3\end{array}\right.$ có $a=1>0$ nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $x^2+x-12<0\Leftrightarrow -4<x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;3)$

c) $5x^2-3\sqrt{5}x>3\sqrt{5}x-9\Leftrightarrow 5x^2-6\sqrt{5}x+9>0$

Tam thức $f(x) = 5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9$ có $a = 5 > 0$ và $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$\frac{3\sqrt{5}}{5}$		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

Suy ra $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$.

d) $-40x^2 + 10x \geq 4x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow -36x^2 + 12x - 1 \geq 0$

Tam thức $f(x) = -36x^2 + 12x - 1$ có $a = -36 < 0$ và $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$-$	

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x \neq \frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

Suy ra $-36x^2 + 12x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Câu 23: Cho phương trình $mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2 = 0 (1)$ với m là tham số. Khi đó:

a) Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4} < m < 0$

b) Không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi $-2 < m < 0$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 3$ khi $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Để phương trình có 2 nghiệm (1) phải là phương trình bậc 2. Do đó $m \neq 0$.

Đặt $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (4m+1)^2 - 4m(4m+2) = 1 > 0$.

Do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$f(0).m < 0 \Leftrightarrow (4m+2).m < 0 \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4m+2>0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m+2<0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

Vậy để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu nhau thì $-\dfrac{1}{4} < m < 0$.

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm âm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} f(0) \cdot m > 0 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4m+2) \cdot m > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

Với
$$(4m+2) \cdot m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4m+2>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m+2<0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{1}{2} \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Với
$$S < 0 \Leftrightarrow \frac{4m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4m+1>0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m+1<0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{1}{4} \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$$

Suy ra không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.

c) Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$f(1)\cdot m<0 \Leftrightarrow (m+1)\cdot m<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1>0\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}m+1<0\\ m>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-1\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}m<-1\\ m>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -1<m<0.$$

d) Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1<x_2<3$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}f(3)\cdot m>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)\cdot m>0\\ S<6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1>0\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m+1<0\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ \dfrac{4m+1}{m}<6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-1\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m<-1\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\\ \dfrac{1-2m}{m}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2m>0\\ m<0\end{cases}\\ \begin{cases}1-2m<0\\ m>0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Câu 24: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(x)<0 \Leftrightarrow 2<x<5.$

b) $f(x)>0 \Leftrightarrow 2<x<5.$

c) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5.$

d) $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 5.$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0 \Leftrightarrow 2<x<5.$

Câu 25: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(x)=3x^3+2x-1$ là tam thức bậc hai.

b) $f(x)=2x-4$ là tam thức bậc hai.

c) $f(x)=x^4-x^2+1$ là tam thức bậc hai.

d) $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

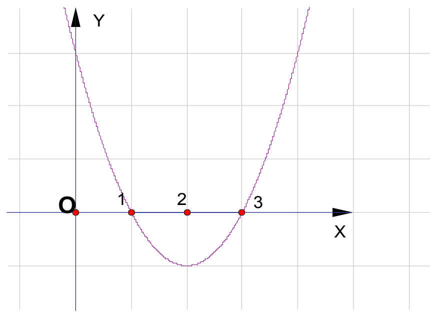
Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$.

Do đó, $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(x)<0$ khi và chỉ khi $x\in(1;3)$;

b) $f(x)\leq 0$ khi và chỉ khi $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$;

c) $f(x)>0$ khi và chỉ khi $x\in(1;3)$;

d) $f(x)\geq 0$ khi và chỉ khi $x\in[1;3]$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

Nhìn vào đồ thị hàm số đã cho nằm phía dưới trục hoành ta suy ra được $\begin{cases} y<0 \\ x\in(1;3) \end{cases}$

•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm m sao cho: $-x^2+2(m+1)x-m^2+m<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Trả lời: $m<\frac{-1}{3}$

Lời giải

Xét tam thức bậc hai $f(x)=-x^2+2(m+1)x-m^2+m$ có:

$\Delta'=(m+1)^2-(-1).(-m^2+m)=3m+1$ và $a=-1<0$.

Để $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\Delta'=3m+1<0$ suy ra $m<\frac{-1}{3}$

Câu 2: Tìm m sao cho: $x^2+mx+3m\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Trả lời: $m\in[0;12]$

Lời giải

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2+mx+3m$ có:

$\Delta=m^2-4\cdot 1\cdot 3m=m^2-12m$ và $a=1>0$.

Để $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\Delta=m^2-12m\leq 0$ suy ra $m\in[0;12]$.

Câu 3: Giải bất phương trình: $(x^2-3x+2)(-x^2+5x-6)\geq 0$.

Trả lời: $S=[1;3]$

Lời giải

Tam thức bậc hai $f(x)=x^2-3x+2$ có $\Delta=1>0, a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=1; x_2=2$.

Tam thức bậc hai $g(x)=-x^2+5x-6$ có $\Delta=1>0, a=-1<0$ và có hai nghiệm $x_1=2; x_2=3$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	|	+	
$g(x)$		−	|	−	0	+	0	−	
$f(x)\cdot g(x)$		−	0	+	0	+	0	−	

Suy ra $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ khi $x\in[1;3]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;3]$.

Câu 4: Tìm m để bất phương trình $x^2+2mx+m-2<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$.

Trả lời: $m\leq\frac{-2}{5}$

Lời giải

Tam thức bậc hai $f(x)=x^2+2mx+m-2$ có:

$\Delta'=m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}>0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Để $f(x) < 0$ với mọi $x \in (1;2)$ thì $x_1 \le 1 < 2 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2m+m-2 \le 0 \\ 4+4m+m-2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 \le 0 \\ 5m+2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{1}{3} \\ m \le \dfrac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \le \frac{-2}{5}.$$

Vậy $m \le \dfrac{-2}{5}$ thì $x^2 + 2mx + m - 2 < 0$ với mọi $x \in (1;2)$.

Câu 5: Tìm m để phương trình $x^2 - (m+1)x + 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Trả lời: $m \in (-\infty;3) \cup (7;+\infty)$

Lời giải

Ta có: $\Delta = [-(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m-5) = m^2 - 10m + 21$.

Để phương trình $x^2 - (m+1)x + 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $m^2 - 10m + 21 > 0$.

Tam thức bậc hai $m^2 - 10m + 21$ có $a = 1 > 0$ và có hai nghiệm $m_1 = 3, m_2 = 7$.

Do đó, $m^2 - 10m + 21 > 0$ khi $m \in (-\infty;3) \cup (7;+\infty)$.

Vậy phương trình $x^2 - (m+1)x + 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (-\infty;3) \cup (7;+\infty)$.

Câu 6: Một chú thỏ đen chạy đuổi theo một chú thỏ trắng ở vị trí cách nó $100m$. Biết rằng, quãng đường chú thỏ đen chạy được biểu thị bởi công thức $s(t) = 8t + 5t^2 \ (m)$, trong đó t (giây) là thời gian tính từ thời điểm chú thỏ đen bắt đầu chạy, và chú thỏ trắng chạy với vận tốc không đổi là $3m/s$. Hỏi tại những thời điểm nào thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng?

Trả lời: $t \in (4;+\infty)$

Lời giải

Giả sử vị trí ban đầu của chú thỏ đen là $s = 0(m)$ và thời điểm ban đầu là $t = 0$ (giây).

Quãng đường của chú thỏ trắng chạy được tại thời điểm t là $f(t) = 100 + 3t(m)$.

Để chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng thì $s(t) > f(t)$

hay $8t+5t^2>100+3t \Rightarrow 5t^2+5t-100>0 \Rightarrow t\in(4;+\infty)$ (vì $t>0$).

Vậy tại những thời điểm $t\in(4;+\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $-x^2+x+4m^2-5m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu.

Trả lời: $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$

Lời giải

Để phương trình $-x^2+x+4m^2-5m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu thì $x_1\cdot x_2<0 \Leftrightarrow -4m^2+5m-1<0$.

Tam thức $-4m^2+5m-1$ có hai nghiệm $m=1$ và $m=\frac{1}{4}$ và hệ số của m^2 bằng -4 nhỏ hơn 0 nên $-4m^2+5m-1<0$ khi $m<\frac{1}{4}$ hoặc $m>1$.

Vậy để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 8: Tìm m để bất phương trình $-3x^2-2mx+m-2\le 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Trả lời: $m\in\left[\frac{-3-\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right]$.

Lời giải

Để bất phương trình $-3x^2-2mx+m-2\le 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0. \end{cases}$ Ta có: $a=-3<0$ và $\Delta=(-2m)^2-4(-3)(m-2)\le 0 \Leftrightarrow 4m^2+12m-24\le 0$.

Tam thức $4m^2+12m-24$ có hai nghiệm $m=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$ và $m=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$ và hệ số của m^2 bằng 4 lớn hơn 0 nên $4m^2+12m-24\le 0$ khi $\frac{-3-\sqrt{33}}{2}\le m\le\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Vậy để bất phương trình $-3x^2-2mx+m-2\le 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $m\in\left[\frac{-3-\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right]$.

Câu 9: Với giá trị nào của tham số m, hàm số $y=\sqrt{x^2-2mx+m-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Trả lời: không tồn tại giá trị của tham số m

Lời giải

Để hàm số $y=\sqrt{x^2-2mx+m-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $x^2-2mx+m-1\ge 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0.\end{cases}$

Ta có: $a=1>0$ và $\Delta=(-2m)^2-4(m-1)\le 0\Leftrightarrow m^2-m+1\le 0$.

Tam thức m^2-m+1 vô nghiệm và hệ số của m^2 bằng 1 lớn hơn 0 nên $m^2-m+1>0\ \ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại giá trị của tham số m để thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Trả lời: $m\in\left[\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lời giải

Để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $2x^2-(2m-1)x+1>0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ Ta có: $a=2>0$ và $\Delta=(2m-1)^2-4.2.1<0\Leftrightarrow 4m^2-4m-7<0$

Tam thức $4m^2-4m-7$ có hai nghiệm $m=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}$ và $m=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ và hệ số của m^2 bằng 4 lớn hơn 0 nên $4m^2-4m-7<0$ khi $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-(2m-1)x+1}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $m\in\left[\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\right]$.

Câu 11: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2+300Q+200000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

Trả lời: xí nghiệp cần sản xuất nhiều hơn hoặc bằng 400 sản phẩm và ít hơn hoặc bằng 500 sản phẩm.

Lời giải

Lợi nhuận của xí nghiệp khi bán hết Q sản phẩm là:
$1200Q-\left(Q^2+300Q+200000\right)=-Q^2+900Q-200000$.

Để xí nghiệp không bị lỗ thì $-Q^2+900Q-200000\geq 0\Leftrightarrow 400\leq Q\leq 500$.

Vậy để không bị lỗ, xí nghiệp cần sản xuất nhiều hơn hoặc bằng 400 sản phẩm và ít hơn hoặc bằng 500 sản phẩm.

Câu 12: Tìm tất cả tham số m để: $f(x)=x^2-x-2m+3$ luôn dương với mọi $x\in\mathbb{R}$;

Trả lời: $m<\frac{11}{8}$

Lời giải

Ta có: $a=1,b=-1,c=-2m+3$.

Theo giả thiết: $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\text{ (luôn Đúng)}\\ (-1)^2-4.1.(-2m+3)<0\end{cases}$
$\Leftrightarrow 1+8m-12<0\Leftrightarrow m<\frac{11}{8}$.

Vậy với $m<\frac{11}{8}$ thì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 13: Tìm tất cả tham số m để: $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-m+1$ không âm với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Trả lời: $m\geq 0$

Lời giải

Ta có: $a=1,b=2(m-1),c=m^2-m+1,b'=\frac{b}{2}=m-1$.

Theo giả thiết: $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\text{ (luôn Đúng)}\\ (m-1)^2-\left(m^2-m+1\right)\leq 0\end{cases}$
$\Leftrightarrow m^2-2m+1-m^2+m-1\leq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Vậy với $m\geq 0$ thì $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 14: Tìm tất cả tham số m để: $f(x)=mx^2-2x+m$ luôn âm với mọi $x\in\mathbb{R}$;

Trả lời: $m<-1$

Lời giải

Ta có: $a=m,b=-2,c=m$. Theo giả thiết: $mx^2-2x+m<0,\forall x\in\mathbb{R}(*)$.

Trường hợp 1: $a = m = 0$. Thay vào $(*): -2x < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (sai). Suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a = m \neq 0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (-2)^2 - 4m \cdot m < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ |m| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$

Vậy với $m < -1$ thì $f(x)$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 15: Tìm tất cả tham số m để: $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + m - 3$ không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trả lời: $m \leq 1$

Lời giải

Ta có: $a = m - 1, b = 2(m-1), b' = m - 1, c = m - 3$.

Theo giả thiết: $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$.

Trường hợp 1: $a = m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$. Thay vào (*): $1 - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng).

Suy ra $m = 1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a = m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ (m-1)^2 - (m-1)(m-3) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m^2 - 2m + 1 - (m^2 - 4m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$

Hợp hai kết quả trên, ta được $m \leq 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 16: Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách như sau:

50 khách đầu tiên có giá 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

Biết chi phí thực sự của chuyến đi là 15080000 đồng. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ?

Trả lời: số khách tối đa là 58 người

Lời giải

Với số lượng khách là $(50+x)$ người thì mỗi khách sẽ trả một khoản tiền $(300000-5000x)$ đồng.

Vậy tổng số tiền công ty thu được trong chuyến du lịch đó là:

$T(x)=(50+x)(300000-5000x)=-5000x^2+50000x+15000000$ (đồng).

Xét tam thức bậc hai:

$f(x)=T(x)-15080000=-5000x^2+50000x-80000.$

$\Delta>0, f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là 2 và 8. bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		2		8		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(x)\geq 0$ khi $x\in[2;8]$. Vậy nếu số khách tối đa là 58 người $(x=8)$ thì công ty sẽ không lỗ khi tổ chức chuyến du lịch này.

Câu 17: Một quả bóng được đá lên từ mặt đất, biết rằng chiều cao y (mét) của quả bóng so với mặt đất được biểu diễn bởi một hàm số bậc hai theo thời gian t (giây). Sau 3 giây kể từ lúc được đá lên, quả bóng đạt chiều cao tối đa là $21m$ và bắt đầu rơi xuống. Hỏi thời điểm t lớn nhất là bao nhiêu (t nguyên) để quả bóng vẫn đang ở độ cao trên $10m$ so với mặt đất?

Trả lời: $t=5$

Lời giải

Xét hàm số bậc hai $y=at^2+bt+c(a\neq 0)$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=3 \\ 9a+3b+c=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 6a+b=0 \\ 9a+3b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{3} \\ b=14 \\ c=0 \end{cases}$.

Vì vậy $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t$.

Ta cần xét: $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t>10$ hay $-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10>0$.

Đặt $f(t)=-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10;$ cho $f(t)=0\Rightarrow t_1=\dfrac{21-\sqrt{231}}{7}, t_2=\dfrac{21+\sqrt{231}}{7}$.

Bảng xét dấu $f(t)$

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận: $f(t)>0$ khi $t_1<t<t_2$ hay $\underbrace{\frac{21-\sqrt{231}}{7}}_{\approx 0,83}<t<\underbrace{\frac{21+\sqrt{231}}{7}}_{\approx 5,17}$.

Vì t nguyên nên $t\in[1;5]$. Do vậy giá trị $t=5$ thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x: $3x^2-2(m-1)x+m^2+4>0$

Trả lời: Với mọi m thuộc $\mathbb{R}$

Lời giải

Đặt $f(x)=3x^2-2(m-1)x+m^2+4$ với $a=3,b'=-(m-1),c=m^2+4$.

Theo giả thiết:

$$f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\ (luôn\ đúng.)\\ (m-1)^2-3\left(m^2+4\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow -2m^2-2m-11<0(*)$$.

Đặt $f(m)=-2m^2-2m-11$ có $\Delta_f=(-2)^2-(-2)(-11)=-18<0$.

Vì vậy $f(m)$ luôn cùng dấu với -2 tức là $f(m)<0,\ \forall m\in\mathbb{R}$. Do đó (*) luôn đúng.

Vậy, với mọi m thuộc $\mathbb{R}$ thì $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 19: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x: $mx^2+(m-1)x+m-1<0$

Trả lời: $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Đặt $f(x)=mx^2+(m-1)x+m-1$ với $a=m,b'=m-1,c=m-1$.

Theo giả thiết: $f(x)=mx^2+(m-1)x+m-1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}(*)$.

Trường hợp 1: $a=m=0$.

Thay vào $(*):-x-1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x>-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (sai).

Suy ra $m=0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a=m\neq 0$.

Ta có: $$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ (m-1)^2-4m(m-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -3m^2+2m+1<0\end{cases}$$

Xét $g(m) = -3m^2 + 2m + 1; g(m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g(m)$:

m	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
g(m)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $g(m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Vậy $(1) \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$.

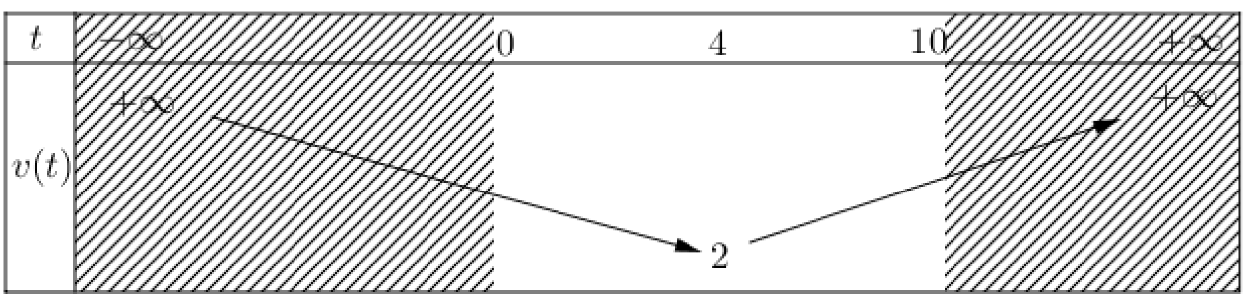
Kết hợp hai trường hợp đã xét, ta thu được $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Một vật chuyển động có vận tốc (mét/giây) được biểu diễn theo thời gian t (giây) bằng công thức $v(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 4t + 10$. Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: $v(t)_{\min} = 2$

Lời giải

Xét $v(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 4t + 10$ với $-\dfrac{b}{2a} = 4, a = \dfrac{1}{2} > 0$ nên bề lõm parabol hướng lên. Bảng biến thiên của $v(t)$:



Vậy, ở giây thứ tư thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất là $v(t)_{\min} = 2$.

Câu 21: Tìm tất cả giá trị m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3 \end{cases}$

Trả lời: $m < -\dfrac{8}{5}$ hoặc $m > 0$

Lời giải

Xét bất phương trình (1): $x^2+2x-15<0$. Đặt $f(x)=x^2+2x-15$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(1) có tập nghiệm $S_1=(-5;3)$.

Xét bất phương trình $(2):(m+1)x \geq 3$.

Trường hợp 1: $m+1=0 \Rightarrow m=-1$.

Thay vào (2): $0 \geq 3$ (vô lí). Khi đó (2) vô nghiệm, suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm. Loại $m=-1$.

Trường hợp 2: $m+1>0 \Rightarrow m>-1$. Khi đó: (2) trở thành $x \geq \frac{3}{m+1}$, nên có tập nghiệm là $S_2=\left[\frac{3}{m+1};+\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi: $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{3}{m+1}<3 \Leftrightarrow 3<3m+3($ do $m+1>0$) $\Leftrightarrow m>0$.

So điều kiện, ta thấy $m>0$ thỏa mãn.

Trường hợp 3: $m+1<0 \Rightarrow m<-1$. Khi đó: (2) trở thành: $x \leq \frac{3}{m+1}$, nên có tập nghiệm $S_3=\left(-\infty;\frac{3}{m+1}\right]$.

Hệ có nghiệm khi: $S_1 \cap S_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{3}{m+1}>-5 \Leftrightarrow 3<-5(m+1)$ (do $m+1<0)$ $\Leftrightarrow 5m<-8 \Leftrightarrow m<-\frac{8}{5}$.

So điều kiện, ta thấy $m<-\frac{8}{5}$ thỏa mãn.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m<-\frac{8}{5}$ hoặc $m>0$.

Câu 22: Tìm tất cả giá trị m để phương trình sau có nghiệm: $x^2-mx+m+3=0$;

Trả lời: $m\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$

Lời giải

Ta có: $a = 1 \neq 0, b = -m, c = m+3$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (-m)^2 - 4(m+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \geq 0$.

Xét $m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \vee m = -2$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$m^2-4m-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $m^2 - 4m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 6 \end{array}\right.$.

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 23: Tìm tất cả giá trị m để phương trình sau có nghiệm: $(m+4)x^2 - (m-1)x + 1 + 2m = 0$.

Trả lời: $m \in \left[-5; -\frac{3}{7}\right]$

Lời giải

Ta có: $a = m+4, b = -(m-1), c = 1+2m$.

Trường hợp 1: $a = m+4 = 0 \Rightarrow m = -4$. Thay vào phương trình:

$5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ (có nghiệm).

Do đó: $m = -4$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a = m+4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta = (m-1)^2 - 4(m+4)(1+2m) \geq 0$

$\Leftrightarrow -7m^2 - 38m - 15 \geq 0.$

Xét $-7m^2 - 38m - 15 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{7} \vee m = -5$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-5		$-\frac{3}{7}$		$+\infty$
$-7m^2-38m-15$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $-7m^2-38m-15\ge 0\Leftrightarrow -5\le m\le -\dfrac{3}{7}$.

Kết hợp cả hai trường hợp trên, ta có được $m\in\left[-5;-\dfrac{3}{7}\right]$ thỏa mãn đề bài.

Câu 24: Tìm tất cả giá trị m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2+(m-2)x-8m+1=0$

Trả lời: $m\in(-\infty;-28)\cup(0;+\infty)$

Lời giải

Ta có: $a=1\ne 0, b=m-2, c=-8m+1$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta=(m-2)^2-4(-8m+1)>0\Leftrightarrow m^2+28m>0$.

Xét $m^2+28m=0\Leftrightarrow m=0 \vee m=-28$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-28		0		$+\infty$
m^2+28m		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $m^2+28m>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-28)\cup(0;+\infty)$.

Vậy với $m\in(-\infty;-28)\cup(0;+\infty)$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 25: Tìm tất cả giá trị m để bất phương trình sau vô nghiệm: $x^2+6x+m+7\le 0$.

Trả lời: $m>2$

Lời giải

Ta có: $x^2+6x+m+7\le 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2+6x+m+7>0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}1>0 \text{ (luôn đúng)}\\ 3^2-(m+7)<0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Vậy với $m>2$ thì bất phương trình $x^2+6x+m+7\le 0$ vô nghiệm.

Câu 26: Tổng chi phí P (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $P=x^2+30x+3300$; giá bán một sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo nhà sản xuất không bị lỗ (giả sử các sản phẩm được bán hết)?

Trả lời: 30 đến 110 sản phẩm

Lời giải

Khi bán hết x sản phẩm thì số tiền thu được là: $170x$ (nghìn đồng).

Điều kiện để nhà sản xuất không bị lỗ là

$170x \geq x^2 + 30x + 3300 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 3300 \leq 0$.

Xét $x^2 - 140x + 3300 = 0 \Rightarrow x = 30 \vee x = 110$.

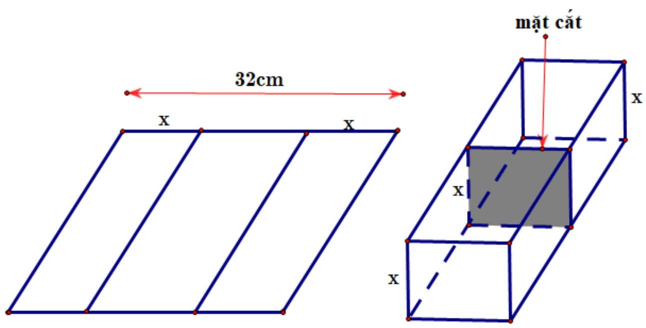
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		30		110		$+\infty$
$x^2 - 140x + 3300$		+	0	−	0	+	

Ta có: $x^2 - 140x + 3300 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [30;110]$.

Vậy nếu nhà sản xuất làm ra từ 30 đến 110 sản phẩm thì họ sẽ không bị lỗ.

Câu 27: Một người muốn uốn tấm tôn phẳng hình chữ nhật có bề ngang 32 cm, thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đố thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình vẽ. Biết rằng diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng tổng $120cm^2$. Hỏi độ cao tối thiểu và tối đa của rãnh dẫn nước là bao nhiêu cm?



Trả lời: $6cm$ và $10cm$.

Lời giải

Bề ngang còn lại của tấm tôn sau khi gập thành rãnh dẫn nước: $32 - 2x(cm)$.

Diện tích mặt cắt ngang rãnh dẫn nước: $S = x(32 - 2x) = -2x^2 + 32x$.

Theo giả thiết: $S \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0$.

Xét $-2x^2 + 32x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		6		10		$+\infty$
$-2x^2 + 30x - 120$		−	0	+	0	−	

Ta có: $-2x^2+32x-120\ge 0 \Leftrightarrow x\in[6;10]$.

Vậy rãnh dẫn nước chỉ đạt yêu cầu khi độ cao tối thiểu và tối đa của nó lần lượt bằng $6cm$ và $10cm$.

Câu 28: Tìm m để hệ bất phương trình sau có 8 nghiệm nguyên: $\begin{cases}2x+m\ge 0\\ x^2-10x\le 0\end{cases}$.

Trả lời: $m\in[-6;-4)$

Lời giải

Xét $x^2-10x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=10$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
x^2-10x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $x^2-10x\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 10$. Do vậy: $\begin{cases}2x+m\ge 0\\ x^2-10x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{m}{2}\\ 0\le x\le 10\end{cases}$.

Hệ có 8 nghiệm nguyên khi và chỉ khi $2<-\dfrac{m}{2}\le 3 \Leftrightarrow 4<-m\le 6 \Leftrightarrow -6\le m<-4$.
Vậy $m\in[-6;-4)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 29: Tìm m để phương trình $5x^2-4mx+m=0$ có nghiệm.

Trả lời: $m\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{5}{4};+\infty\right)$

Lời giải

Phương trình $5x^2-4mx+m=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta'=(-2m)^2-5m\ge 0 \Leftrightarrow 4m^2-5m\ge 0.$

Xét $4m^2-5m=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=\dfrac{5}{4}$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		0		$\dfrac{5}{4}$		$+\infty$
$4m^2-5m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $4m^2 - 5m \ge 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;0] \cup \left[\frac{5}{4};+\infty\right)$.

Vậy, với $m \in (-\infty;0] \cup \left[\frac{5}{4};+\infty\right)$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 30: Tìm m để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x - m + 2 = 0$ vô nghiệm.

Trả lời: $m \in \left[-1;\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Trường hợp 1: $a = m+1 = 0 \Rightarrow m = -1$. Thay vào phương trình: $3 = 0$ (vô nghiệm), nhận $m = -1$.

Trường hợp 2: $a = m+1 \ne 0 \Rightarrow m \ne -1$. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = (m+1)^2 - (m+1)(-m+2) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 + m^2 - m - 2 < 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 < 0$.

Xét $2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = \frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2m^2+m-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $2m^2 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$.

Kết hợp hai kết quả trên, ta thu được $m \in \left[-1;\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 31: Tìm m để phương trình $\frac{1}{m}x^2 + 2(m-2)x + m^2 > 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Trả lời: $m \in (-\infty;1) \cup (4;+\infty)$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \frac{1}{m} \ne 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - \frac{1}{m}\cdot m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ m^2 - 5m + 4 > 0 \end{cases} (*)$$

Xét $m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 4$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		1		4		$+\infty$
m^2-5m+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Từ $(*)$, ta có $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 32: Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $x^2+6x+m+7\le 0$

Trả lời: $m>2$

Lời giải

Bất phương trình $x^2+6x+m+7\le 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$x^2+6x+m+7>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta'=3^2-(m+7)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 9-m-7<0 \Leftrightarrow m>2.$$

Vậy với $m>2$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 33: Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $mx^2-4(m+1)x+m-5<0$.

Trả lời: không có m thỏa mãn đề bài.

Lời giải

Bất phương trình $mx^2-4(m+1)x+m-5<0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $mx^2-4(m+1)x+m-5\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} (*)$.

Trường hợp 1: $a=m=0$. Thay vào $(*)$:

$-4x-5\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\le -\dfrac{5}{4}, \forall x\in\mathbb{R}$ (mệnh đề sai).

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a=m\ne 0$. Khi đó: $(*)$ tương đương

$$\begin{cases} a=m>0 \\ \Delta'=4(m+1)^2-m(m-5)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 3m^2+13m+4\le 0 \end{cases}.$$

Xét $3m^2+13m+4=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3} \vee m=-4$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3m^2+13m+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $3m^2+13m+4\le 0 \Leftrightarrow m\in\left[-4;-\frac{1}{3}\right]$.

Vì vậy: $\begin{cases} m>0 \\ 3m^2+13m+4\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\in\left[-4;-\frac{1}{3}\right]\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có m thỏa mãn đề bài.

Câu 34: Độ cao (tính bằng mét) của một quả bóng (trong môn bóng đá) khi cầu thủ sút phạt so với xà ngang của khung thành khi bóng di chuyển được x mét theo phương ngang được mô phỏng bằng hàm số $k(x)=-0,2x^2+3x-3$. Trong các khoảng nào của x thì bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành? Làm tròn kết quả đến hàng phân trăm.

Trả lời: $x\in(1,08;13,92)$

Lời giải

Ta có $k(x)=-0,2x^2+3x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{15-\sqrt{165}}{2}\approx 1,08 \\ x=\frac{15+\sqrt{165}}{2}\approx 13,92\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $k(x)$

x	$-\infty$		$1,08$		$13,92$		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành khi $k(x)>0$ tức là $x\in(1,08;13,92)$.

Câu 35: Một khung dây thép hình chữ nhật với chiều dài $30\,cm$ và chiều rộng $20\,cm$ được uốn lại thành hình chữ nhật mới với kích thước $(30-x)$ cm và $(20+x)cm$. với x nằm trong khoảng nào thì diện tích của khung sau khi uốn: tăng lên

Trả lời: $x\in(0;10)$

Lời giải

Ta có điêu kiện: $-20<x<30$

Diện tích hình chữ nhật lúc sau là: $S=(30-x)\cdot(20+x)=-x^2+10x+600\,cm^2$.

Diện tích hình chữ nhật lúc đầu là $600\,cm^2$

Đặt $f(x)=-x^2+10x+600-600=-x^2+10x$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=10 \end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Diện tích của khung sau khi uốn tăng lên khi $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$.

Câu 36: Cho phương trình $x^4+mx^3-2\left(m^2-1\right)x^2+mx+1=0$. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Trả lời: $|m|>2$

Lời giải

$x^4+mx^3-2\left(m^2-1\right)x^2+mx+1=0$ (1)

Nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$ ta được:

$$x^2+mx-2\left(m^2-1\right)+m\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+m\left(x+\frac{1}{x}\right)-2m^2+2=0.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$, điều kiện $|t|\geq 2$, suy ra $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Khi đó, phương trình có dạng: $f(t)=t^2+mt-2m^2=0$ (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt tức (1) có nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} 2<t_1<t_2\,(*) \\ t_1<t_2<-2\,(*) \\ t_1<-2<2<t_2\,(**) \end{array}\right.$.

Nhận xét: Phương trình (2) có $ac=-2m^2<0$ nên $(*)$ không thể xảy ra.

Khi đó, để có $(**)$ thì điều kiện là:

$$\left\{\begin{array}{l} f(2)<0 \\ f(-2)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4+2m-2m^2<0 \\ 4-2m-2m^2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-m-2>0 \\ m^2+m-2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m|>2.$$

Vậy với $|m|>2$ thì thỏa mãn đề bài cho.

Câu 37: Tìm m để biểu thức sau luôn dương $f(x)=\left(m^2+2\right)x^2-2(m+1)x+1$;

Trả lời: $m<\frac{1}{2}$

Lời giải

Vì $m^2+2>0$ nên yêu câu bài toán $\Leftrightarrow \left(m^2+2\right)x^2-2(m+1)x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'<0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-\left(m^2+2\right)<0\\ m^2+2>0\end{cases}\Leftrightarrow (m+1)^2-\left(m^2+2\right)<0$$

$$\Leftrightarrow 2m<1\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}.$$

Vậy $m<\frac{1}{2}$ thỏa mãn

Câu 38: Tìm m để biểu thức sau luôn dương $f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$

Trả lời: $m\geq -2$

Lời giải

Với $m=-2$, biểu thức đã cho trở thành $1>0$: luôn đúng với mọi x.

Với $m\neq -2$, yêu câu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2+2(m+2)x+m+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m+2>0\\ (m+2)^2-(m+2)(m+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m+2>0\\ -m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 39: Tìm m để biểu thức sau luôn âm $f(x)=mx^2-x-1$

Trả lời: $-\frac{1}{4}<m<0$

Lời giải

Với $m=0$, ta có $f(x)=-x-1<0\Leftrightarrow x>-1$: không thỏa mãn.

Với $m\neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mx^2-x-1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<0\\ 1+4m<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<0\\ m>-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<m<0$$

Vậy với $-\frac{1}{4}<m<0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

Câu 40: Tìm m để biểu thức sau luôn âm $f(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$.

Trả lời: $m\le 4$

Lời giải

Với $m=4$, ta có $f(x)=-1<0$: đúng với mọi x.

Với $m\ne 4$, yêu câu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2+(2m-8)x+m-5<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4<0 \\ (m-4)^2-(m-4)(m-5)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<4$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\le 4$.

Câu 41: Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{(m+10)x^2-2(m-2)x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Trả lời: $-1\le m\le 6$

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow (m+10)x^2-2(m-2)x+1\ge 0(*)$.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $(*)$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

+) $m=-10:(*)$ trở thành: $24x+1\ge 0$ không đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $m=-10$ loại.

+) $m\ne -10:(*)$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+10>0 \\ (m-2)^2-(m+10)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5m-6\le 0 \\ m>-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 6 \\ m>-10 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 6.$

Vậy với $-1\le m\le 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Câu 42: Cho phương trình $x^4-2x^2-2-m=0(1)$. Tìm m để phương trình sau phương trình có đúng 2 nghiệm

Trả lời: $m=-3$ hoặc $m>-2$.

Lời giải

Đặt: $x^2=t(t\ge 0)$. Khi đó (1) trở thành: $t^2-2t-2-m=0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm khi (2) phải có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t_1=t_2>0 \\ t_1<0<t_2 \end{array}\right.$

TH1: $t_1=t_2>0$. Khi đó $\Delta'=0 \Leftrightarrow m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Với $m=-3$ thì phương trình (2) nghiệm $t_1=t_2=1$ thỏa mãn.

TH2: $t_1<0<t_2$. Khi đó: $-2-m<0 \Leftrightarrow m>-2$.

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm khi $m=-3$ hoặc $m>-2$.

Câu 43: Cho phương trình $x^4-mx^3-2x^2+mx+1=0$. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Trả lời: $m\neq 0$

Lời giải

Nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$ ta được:

$$x^2-mx-2+m\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-m\left(x-\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}$, suy ra $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$.

Khi đó, phương trình có dạng: $f(t)=t^2-mt=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=m \end{array}\right.$.

Với $t=0$ ta được: $x-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt điêu kiện là $m\neq 0$.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Trả lời: $m\in[-2;2]$

Lời giải

Ta có $-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Nên $\frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+1>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta=m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow m\in[-2;2]$.

Câu 45: Cho $y=\sqrt{x^2+2x+m}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+mx-1}}$, tìm m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: không tồn tại giá trị m

Lời giải

Để hàm số trên xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+2x+m \geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \\ x^2+mx-1>0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geq 1-m, \forall x\in\mathbb{R} \\ x^2+mx-1>0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m\leq 0 \quad (1) \\ f(x)=x^2+mx-1>0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow m\geq 1$.

Vì $f(x)=x^2+mx-1$ là hàm Parabol với hệ số $a=1>0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{m}{2}$.

Do đó hàm số $f(x)=x^2+mx-1>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2+4<0$ (Vô lý)

Suy ra không tồn tại giá trị m để $x^2+mx-1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại giá trị m để $y=\sqrt{x^2+2x+m}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+mx-1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2-2x+1-m^2\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$.

Trả lời: $m\leq -1 \vee m\geq 1$

Lời giải

Ta có $\Delta'=m^2\geq 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1=1-m$ và $x_2=1+m$

- Nếu $m=0$ thì bpt trở thành $x^2-2x+1\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m>0$ thì $x_1=1-m<x_2=1+m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1-m;1+m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2]\subset[1-m;1+m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\geq 1-m \\ 2\geq 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1$

- Nếu $m<0$ thì $x_1=1-m>x_2=1+m$.

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1+m;1-m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2]\subset[1+m;1-m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\geq 1+m \\ 2\geq 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 0 \\ m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq -1$. Vậy $m\leq -1 \vee m\geq 1$ thỏa mãn.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2+(3-m)x-2m+3>0$ nghiệm đúng với mọi $x\le 4$.

Trả lời: $m>-\frac{7}{2}$

Lời giải

Ta có $\Delta=(3-m)^2-4(-2m+3)=m^2+2m-3$

- Nếu $m=1$ thì bpt trở thành $x^2+2x+1>0\Leftrightarrow (x+1)^2>0\Leftrightarrow x\ne -1$ thỏa mãn.

- Nếu $m=-3$ thì bpt trở thành $x^2+6x+9>0\Leftrightarrow (x+3)^2>0\Leftrightarrow x\ne -3$ thỏa mãn

- Nếu $-3<m<1$ thì $\Delta<0$ mà hệ số $a=1>0$ nên $x^2+(3-m)x-2m+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$ thì $\Delta>0$ nên phương trình $x^2+(3-m)x-2m+3=0$ có hai nghiệm.

Do đó ta có tập nghiệm của $x^2+(3-m)x-2m+3>0$ là

$$S=\left(-\infty;\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+m+\sqrt{m^2+2m-3}}{2};+\infty\right).$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\le -4$ khi và chi khi $(-\infty;-4]\subset\left(-\infty;\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow -4<\frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-3}<m+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-5^{\vee}\ m>1 \\ m>-5m>-\frac{7}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{7}{2}<m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ m+5>0 \\ m^2+2m-3<(11-m)^2 \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m>-\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2mx+1\le 0 \end{cases}$

Trả lời: $m>1$

Lời giải

Bất phương trình $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Suy ra $S_1=(1;+\infty)$.

Bất phương trình $x^2-2mx+1\le 0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2\le m^2-1 \Leftrightarrow (x-m)^2\le m^2-1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2-1}\le x-m\le\sqrt{m^2-1}$ (điều kiện: $m^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -1 \end{array}\right.$)

$\Leftrightarrow m-\sqrt{m^2-1}\le x\le m+\sqrt{m^2-1}$. Suy ra $S_2=\left[m-\sqrt{m^2-1};m+\sqrt{m^2-1}\right]$.

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-1}>1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-1}>1-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-m<0 \\ m^2-1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-m\ge 0 \\ m^2-1>(1-m)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ m\le -1 \vee m\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m\le 1 \\ m>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>1$$

Câu 49: Tìm m để mọi $x\in[0;+\infty)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(m^2-1)x^2-8mx+9-m^2\ge 0$

Trả lời: $m\in[-3;-1]$

Lời giải

$m=1$ không thỏa mãn ycbt; $m=-1$ thỏa mãn ycbt

Với $m\ne\pm 1$ ta có bpt $\Leftrightarrow [(m+1)x+m-3][(m-1)x-m-3]\ge 0$

Đáp số $m\in[-3;-1]$

Câu 50: Tìm m để bất phương trình $2x^2-(2m+1)x+m^2-2m+2\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Trả lời: $2\le m\le\frac{21+2\sqrt{34}}{10}$

Lời giải

Đặt $f(x)=2x^2-(2m+1)x+m^2-2m+2$, có $\Delta=-4m^2+20m-15$

- $\Delta\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le\frac{5-\sqrt{10}}{2} \\ m\ge\frac{5+\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$, suy ra $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}; \frac{5+\sqrt{10}}{2} \right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{4} (x_1 < x_2)$ Và $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le \frac{1}{2} \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \le 2\sqrt{\Delta} \\ 7-2m \le \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \le 4\Delta \\ (7-2m)^2 \le \Delta \\ \frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \le 0 \\ m^2 - 6m + 8 \le 0 \\ \frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$$

Vậy $2 \le m \le \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 51: Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Trả lời: $-1 \le m \le 6$

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow (m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1 \ge 0 (*)$.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (*) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) $m = -10$ (*) trở thành: $24x + 1 \ge 0$ không đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m = -10$ loại.

+) $m \ne -10$ (*) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 10 > 0 \\ (m-2)^2 - (m+10) \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m - 6 \le 0 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 6 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 6.$$

Vậy với $-1 \le m \le 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}$.