TÓM TẮT SÁNG KIẾN

Sáng kiến “Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ” với mục tiêu là bộ tài liệu cung cấp cho người đọc một số phương pháp giải phương trình vô tỷ nhằm định hướng giải quyết các bài toán giải phương trình vô tỷ hay và khó trong các đề thi các cấp. Đối với học sinh mũi nhọn của nhà trường thì đây là bộ tài liệu quan trọng giúp các em có đầy đủ kiến thức, kĩ năng giải tốt các phương trình vô tỷ.

Sau khi giảng dạy chuyên đề 90% học sinh trong đội tuyển có kỹ năng tốt khi vận dụng phương pháp để giải các bài tập phương trình. Số học sinh trong đối tượng ôn đại học tại các lớp 12 vận dụng được chiếm khoảng 70% .

Vì vậy việc sử dụng chuyên đề trong ôn luyện học mũi nhọn góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, giảm chi phí mua các loại sách tham khảo đắt đỏ mất thời gian tìm chọn mua mà hiệu quả chưa chắc đã hơn khi học chuyên đề. Các em học sinh không những nắm vững được phương pháp, biết cách vận dụng vào những bài toán cụ thể mà còn rất hứng thú khi học tập phần này.

I.MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn sáng kiến.

Luật Giáo dục Việt Nam, năm 2005 sửa đổi năm 2009, trong điều 28, đã ghi rõ: " Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học; bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kĩ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh".

Giải phương trình là nội dung kiến thức quan trọng, cơ bản đối với học sinh trung học phổ thông, đối với những phương trình bậc nhất, bậc hai hoặc phương trình quy về bậc nhất, bậc hai đơn giản hầu hết học sinh đều nắm được cách giải cơ bản. Tuy nhiên khi gặp các phương trình vô tỷ thì phần lớn học sinh bị lúng túng, ngỡ ngàng, không tìm được hướng giải.

Thực tế cho thấy trong những năm gần đây(từ 2002 đến 2013) phương trìnhvô tỷ xuất hiện hầu hết trong các đề thi cao đẳng, đại học, đặc biệt là khối A và B gây khó khăn khá nhiều cho học sinh. Trong khi đó chương trình học của sách giáo khoa lại không đề cập đến các dạng phương trình này hoặc nếu có thì chỉ dừng lại ở mức độ quá đơn giản, không đáp ứng được trong các kì thi cao đẳng, đại học.

Vậy làm thế nào để có thể giúp các em học tiếp cận với các phương trình đó và dần đi đến giải được các phương trình vô tỷ. Đây là lí do tôi chọn đề tài: " Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ"

Sáng kiến "Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ" với mục tiêu là bộ tài liệu cung cấp cho người đọc một số phương pháp giải phương trình vô tỷ nhằm định hướng giải quyết các bài toán giải phương trình vô tỷ hay và khó trong các đề thi các cấp. Đối với học sinh mũi nhọn của nhà trường thì đây là bộ tài liệu quan trọng giúp các em có đầy đủ kiến thức, kĩ năng giải tốt các phương trình vô tỷ.

2. Mục tiêu của sáng kiến

Giúp học sinh có cái nhìn sâu sắc hơn về bài toán giải phương trình vô tỷ, từ đó có kĩ năng giải thành thạo các bài tập thuộc chủ đề này và hơn thế có thể ứng dụng vào bài toán tính toán có liên quan đến phương trình vô tỷ.

Giải quyết một lớp các bài toán cơ bản về giải phương trình vô tỷ.

Học sinh chủ động định hướng được các phương pháp giải phương trình vô tỷ, tạo cho các em khả năng làm việc độc lập, sáng tạo, phát huy tối đa tính tích cực của học sinh theo đúng tinh thần phương pháp mới của Bộ giáo dục và đào tạo. Điều quan trọng là tạo cho các em niềm tin, khắc phục được tâm lí sợ bài toán giải phương trình vô tỷ.

3. Phạm vi sáng kiến

Học sinh mũi nhọn của nhà trường.Tôi đã áp dụng lần đầu tiên đối với học sinh trường trung học phổ thông Tràng Định năm học 2017 - 2018 tôi tự nhận thấy thiết thực và ý nghĩa trong việc nâng cao tỉ lệ học giỏi bộ môn toán của bản thân.

II. CƠ SỞ LÍ LUẬN, CƠ SỞ THỰC TIỄN

1. Cơ sở lý luận

Phương trình vô tỷ ở chương trình lớp 10 chủ yếu là các phương trình chứa căn bậc hai, căn bậc ba. Với những phương trình chứa căn cơ bản, đơn giản thì hầu như học sinh đều đã nắm được cách giải. Bên cạnh đó, các em còn gặp nhiều phương trình vô tỷ mà không có phương pháp giải cụ thể, mẫu mực, những phương trình này thường được giải bằng một số phương pháp: đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

2. Cơ sở thực tiễn.

2.1 Về phía học sinh.

Trong quá trình giảng dạy bộ môn toán lớp 10, tôi nhận thấy, khi dạy về giải phương trình bậc nhất, bậc hai hoặc các phương trình quy về bậc hai đơn giản, đây là những phương trình cơ bản, học sinh đều nắm được cách giải. Tuy nhiên, khi gặp phương trình khác lạ trong phạm vi lớp 10 thì học sinh bị bế tắc, không định hướng được cách giải. Các phương trình dạng này, phần lớn là phức tạp và hầu như không được giải theo cách phổ thông mà ở mỗi phương trình các biểu thức có mối liên hệ đặc biệt, đòi hỏi học sinh phải phát hiện được và đặt ẩn phụ thích hợp để đưa về giải vô tỷ hệ phương trình quen thuôc.

2.2 Về sách giáo khoa.

Sách giáo khoa chỉ đơn thuần đưa ra các ví dụ về giải các phương trình bậc hai, phương trình chứa căn bậc hai, phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối đơn giản. Ngay cả các phương trình chứa căn bậc hai, chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản cũng không đề cập đến cách giải tổng quát, vì vậy học sinh gặp rất nhiều khó khăn khi đối mặt với các phương trình vô tỷ.

2.3 Về phía giáo viên.

Với sức ép của chương trình, qui chế chuyên môn, thời lượng thực hiện chương trình sát sao, đã làm cho giáo viên chỉ đủ thời gian chuyển tải các nội dung trong sách giáo khoa, ít có thời gian mở rộng kiến thức cho học sinh, phần mở rộng chủ yếu ở các tiết phụ đạo, bồi dưỡng.

Từ những thực tiễn đó để giúp các em học sinh giải được các phương trình vô tỷ khác lạ, tạo cho các em niềm tin khắc phục tình trạng sợ phương trình vô tỷ, giúp các em yêu thích bộ môn Toán, đồng thời nâng cao chất lượng bộ môn.

III. NỘI DUNG SÁNG KIẾN

1. Nội dung và những kết quả nghiên cứu của sáng kiến

1.1.Một số phương trình vô tỷ cơ bản thường gặp

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}.$$

$\boxed{\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0}$

Bước 1. Đặt điều kiện.

Bước 2. Chuyển vế để hai vế đều dương, tức $(1) \Leftrightarrow \sqrt{A} + \sqrt{C} = \sqrt{B}$

Bước 3. Bình phương hai vế $A + C + 2\sqrt{AC} = B \Leftrightarrow 2\sqrt{AC} = B - A - C.$

Dạng: $\boxed{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}}$ (2)

Bước 1. Lũy thừa: $(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3 = (\sqrt[3]{C})^3 \Leftrightarrow A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C$ $(2')$

Bước 2. Thế $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$, thì $(2') \Rightarrow A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C.$

Dạng: $\boxed{\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}}$ (3) với $A + C = B + D$ hoặc $AC = BD.$

Bước 1. Đặt điều kiện.

Bước 2. Biến đổi $(3) \Leftrightarrow \sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{B} - \sqrt{D}$ và bình phương hai vế.

- Lưu ý: Biến đổi của 3 dạng trên là biến đổi hệ quả, do đó khi giải xong cần thay thế nghiệm lại đề bài và kiểm tra nhằm tránh thu nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

Đại học khối D – 2006

 Lời giải .

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=-x^2+3x-1\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\geq 0\\ 2x-1=(-x^2+3x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\geq 0\\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\geq 0\\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

Phân tích. Để kiểm tra phương trình có nghiệm hữu tỉ hay vô tỷ, ta nhập vào casio: $X^2-4X-3-\sqrt{X+5}$ và bấm shift solve 9 =, được kết quả $X=5.192582404$ là vô tỷ. Khi đó định hướng tìm lượng nhân tử bậc hai bằng chức năng table. Trước tiên ta lưu biến $X\to A,$ bằng cách nhập alpha) shift RCL (–). Kế đến ta chuyển về chế độ table bằng cách bấm mode setup 7 và nhập $f(X)=A^2-AX$ bằng cách bấm: alpha (–) x^2 – alpha (–) anpha), rồi bấm = . Nếu casio fx – 570 VN plus hoặc vina calc, ta sẽ bấm tiếp tục dấu =, còn fx – 570 ES thì không cần (tức không nhập $g(X)$), cho Start là -9, End là 9, Step là 1 thì casio cho ta bảng giá trị

	X	$F(X)$
14	4	6.1925
15	5	1

và ta chỉ quan tâm đến dòng có giá trị là số nguyên, tức dòng 15 có $X=5,\ F(X)=1,$ đó chính là hệ số b, c của nhân tử $x^2-bx-c,$ tức có $x^2-5x-1.$ Lúc này ta sẽ quyết định lũy thừa 2 vế theo công thức $\sqrt{A}=B$ được phương trình bậc bốn, sau đó lấy phương trình bậc bốn này chia cho lượng x^2-5x-1 sẽ thu được bậc 2 và viết lại tích của 2 bậc hai.

 <u>*Lời giải*</u> . Xem đây là phương trình dạng $\sqrt{A}=B.$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-3 \geq 0 \\ (x^2-4x-3)^2 = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2-\sqrt{7} \vee x \geq 2+\sqrt{7} \\ x^4-8x^3+10x^2+23x+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2-\sqrt{7} \vee x \geq 2+\sqrt{7} \\ (x^2-5x-1)\cdot(x^2-3x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$ hoặc $x=-1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1,\ x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$

 <u>*Lời giải*</u> .

. Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+5} = -\frac{2(x+2)}{x} \end{cases}$$ (do $x=0$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x+2}{x} \geq 0 \\ x^2(x+5) = 4(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq x < 0 \\ x^3+x^2-16x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1.$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $2\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x-1}$

Phân tích. Phương trình có dạng cơ bản $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\sqrt{C}$, ta sẽ đặt điều kiện, chuyển vế sao cho 2 vế đều dương và bình phương hai vế để đưa về dạng $\sqrt{A}=B.$

 ***Lời giải*.** Điều kiện: $x\ge 1.$ Khi đó: $PT\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1}+2\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 4(3x+1)=x-1+4(2x-1)+4\sqrt{(x-1)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2-3x+1}=3x+9\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ 23x^2-102x-65=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5.$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

Phân tích. Phương trình có dạng: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$ với $A+C=B+D,$ cụ thể: $(10x+1)+(2x-2)=(9x+4)+(3x-5)=12x-1,$ nên ta sẽ chuyển vế đưa về dạng: $\sqrt{A}-\sqrt{C}=\sqrt{D}-\sqrt{B}$ và bình phương hai vế. Nhưng do khi chuyển vế và bình phương là ta đã giải phương trình hệ quả, vì vậy khi giải xong ta cần thay thế nghiệm vào phương trình đầu đề bài nhằm nhận, loại nghiệm thích hợp.

 ***Lời giải*.** Điều kiện: $x\ge \frac{5}{3},$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{10x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x+4}-\sqrt{3x-5}$

$$\Rightarrow (\sqrt{10x+1}-\sqrt{2x-2})^2=(\sqrt{9x+4}-\sqrt{3x-5})^2$$

$$\Leftrightarrow 12x-1-2\sqrt{(10x+1)(2x-2)}=12x-1-2\sqrt{(9x+4)(3x-5)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(10x+1)(2x-2)}=\sqrt{(9x+4)(3x-5)}\Leftrightarrow 7x^2-15x-18=0\Leftrightarrow x=3, x=-\frac{6}{7}.$$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*),$ phương trình có nghiệm $x=3.$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

Phân tích. Phương trình có dạng cơ bản $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$, khi đó hướng xử lý là lập phương hai vế và thường sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, rồi thay thế $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ vào phương trình thu được sau khi lập phương và giải phương trình hệ quả dạng $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left[g(x)\right]^3$. Từ đó có lời giải sau:

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x+2+3.\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}.\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=-(x+1)$$

Thế: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ vào (1), suy ra: $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=-(x+1)$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3\Leftrightarrow (x+1).\left[(3x+1)(x-1)+(x+1)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)4x^2=0\Leftrightarrow x=-1$$ hoặc $x=0$.

- Với $x=0$ không thỏa mãn nên loại nghiệm $x=0$
- Với $x=-1$ thỏa mãn phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

Bài tập tương tự

Bài 1: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-42x+49}-1=3\sqrt{x^2-6x+6}$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x^2-4x+1}$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7}=2\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-x+1}$

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7}=2\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}$

1.2.Giải phương trình vô tỷ bằng cách đưa về phương trình tích

Phương pháp:

Dùng các phép biến đổi, đồng nhất kết hợp với việc tách, nhóm, ghép thích hợp để đưa phương trình đã cho về dạng tích số đơn giản hơn và biết cách giải, chẳng hạn như: $A.B=0\Leftrightarrow A=0$ hoặc $B=0...$

Một số biến đổi thường gặp:

- $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f(x)=0.$
- Dùng các hằng đẳng thức cơ bản, lưu ý các biến đổi thường gặp sau:

\+ $u+v=1+uv\Leftrightarrow (u-1)-v(u-1)=0\Leftrightarrow (u-1)(1-v)=0\Leftrightarrow u=v=1.$

\+ $au+bv=ab+vu\Leftrightarrow a(u-b)-v(u-b)=0\Leftrightarrow (u-b)(a-v)=0.$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

<u>Phân tích</u>. Thấy vế phải phân tích được thành tích số: $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$ dựa vào $f(x)=ax^2+bx+c=a.(x-x_1)(x-x_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $f(x)=0,$ nên sẽ có nhân tử $x+3$ với vế trái và có lời giải sau:

 <u>Lời giải</u>. Điều kiện: $10-x^2\geq 0\Leftrightarrow -\sqrt{10}\leq x\leq\sqrt{10}.$

$(*)\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2}=(x+3)(x-4)\Leftrightarrow (x+3).\left[\sqrt{10-x^2}-(x-4)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ \sqrt{10-x^2}=x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $\begin{cases} x \geq 4 \\ 2x^2-8x+6=0 \end{cases}$ PT vô nghiệm

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3.$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1$

Phân tích. Với điều kiện $x \geq 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ và có dạng $u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0 \Leftrightarrow u=v=1$ và có lời giải sau:

 ***Lời giải*.** Điều kiện: $x \geq 0.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x+1})=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1$ hoặc $\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0,\ x=1.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

Phân tích. Sử dụng phân tích $\sqrt{-x^2+8x-7}=\sqrt{(x-1)(7-x)}$ và ghép từng cặp lại với nhau sẽ xuất hiện nhân tử chung và đưa được về tích số.

 ***Lời giải*.** Điều kiện: $1 \leq x \leq 7.$

$(*) \Leftrightarrow \left[(x-1)-2\sqrt{x-1}\right]+\left[2\sqrt{7-x}-\sqrt{(x-1).(7-x)}\right]=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)+\sqrt{7-x}(2-\sqrt{x-1})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-2).(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4 \end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=4,\ x=5.$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x+2\sqrt{5-x}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{10+3x-x^2}-2$

Phân tích. Tương tự thí dụ trên, thấy $\sqrt{10+3x-x^2}=\sqrt{(x+2)(5-x)}$ nên ghép các biểu thức thích hợp với nhau sẽ đưa được về phương trình tích số và có lời giải sau:.

 Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 5.$

$$(*)\Leftrightarrow\left[(x+2)-\sqrt{(x+2)(5-x)}\right]+\left[2\sqrt{5-x}-2\sqrt{x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})-2(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})(\sqrt{x+2}-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=\sqrt{5-x}\\ \sqrt{x+2}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=2\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{3}{2},\ x=2.$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}-1=0$

Phân tích. Do biểu thức trong và ngoài dấu căn cùng là bậc hai, nên ta nghĩ đến việc phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức trong dấu căn, cụ thể ở đây tôi viết: $x^2-4x-1=(x^2-x-1)-3x$ và xuất hiện thêm hạng tử có chứa $3x,$ nên sẽ phân tích: $(x-3)\sqrt{x^2-x-1}=x\sqrt{x^2-x-1}-3\sqrt{x^2-x-1}$ và ghép hạng tử phù hợp sẽ xuất hiện nhân tử chung và đưa được về phương tình tích số.

Điều kiện: $x^2-x-1\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

 Lời giải. Tách ghép đưa về tích số.

$$(*)\Leftrightarrow\left[(x^2-x-1)+x\sqrt{x^2-x-1}\right]-(3x+3\sqrt{x^2-x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{x^2-x-1})^2+x\sqrt{x^2-x-1}\right]-3(x+\sqrt{x^2-x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-1}(\sqrt{x^2-x-1}+x)-3(x+\sqrt{x^2-x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-x-1}+x)\cdot(\sqrt{x^2-x-1}-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x-1}=-x\\ \sqrt{x^2-x-1}=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x\ge 0\\ -x-1=0\end{cases}\\ x^2-x-1=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.:$$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=-1,\ x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{2},\ x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $2x^2-6x+10-5.(x-2)\sqrt{x+1}=0$

Phân tích. Khác với các thí dụ trên, biểu thức trong căn thức là bậc nhất và có dạng tổng quát là $ax^2+bx+c=(dx+e).\sqrt{\alpha x+\beta}.$ Khi đó sẽ phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức tích mang dấu căn bằng đồng nhất thức, nghĩa là biểu diễn $2x^2-6x+10=m.(x-2)^2+n.(\sqrt{x+1})^2=mx^2+(n-4m).x+(n+4m)$ và so sánh hệ số trước $x^2,\ x$ và hệ số tự do được $m=n=2.$ Khi đó, ta có 2 hướng xử lý thường gặp là tách ghép đưa về tích số hoặc đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp, hoặc chia cho lượng dương để đưa về phương trình bậc 2.

Điều kiện: $x\ge -1.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 2(x-2)^2+2(\sqrt{x+1})^2-5(x-2)\sqrt{x+1}=0$ (1)

 ***Lời giải*.** Tách ghép đưa về tích số.

$$(1)\Leftrightarrow \left[2(x-2)^2-(x-2)\sqrt{x+1}\right]+\left[2(\sqrt{x+1})^2-4(x-2)\sqrt{x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[2(x-2)-\sqrt{x+1}\right]+2\sqrt{x+1}\left[\sqrt{x+1}-2(x-2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[2(x-2)-\sqrt{x+1}\right]\cdot\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=2(x-2)\\ 2\sqrt{x+1}=x-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ x+1=4(x^2-4x+4)\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 4(x+1)=x^2-4x+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ 4x^2-17x+15=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-8x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=8\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=3,\ x=8.$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Giải phương trình: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$

Bài 2: Giải phương trình: $x\sqrt{2x+3}+3(\sqrt{x+5}+1)=3x+\sqrt{2x^2+13x+15}+\sqrt{2x+3}$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$

Bài 6: Giải phương trình: $3.(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$

1.3.Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Có rất nhiều cách đặt ẩn phụ khác nhau tùy thuộc vào đặc điểm của từng phương trình mà ta có thể đặt một ẩn phụ, hai ẩn phụ, ba ẩn phụ,… để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình. Sau khi đặt ẩn phụ, ta cần đi tìm điều kiện cho ẩn phụ. Tùy vào mục đích của ẩn phụ mà ta đi tìm điều kiện cho hợp lý (dễ, không gây sai sót).

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

Đại học khối D – 2006

 ***Lời giải* .** Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II.

Đặt $y=\sqrt{2x-1}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} y^2=2x-1 \\ y+x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2x+1=0 \\ x^2-3x+y+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (y^2-x^2)+(x-y)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=1-x \end{array}\right.$.

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{2x-1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- Với $y=1-x,$ suy ra: $\sqrt{2x-1}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{2}.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1,\ x=2-\sqrt{2}.$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

 ***Lời giải* .** Đặt một ẩn phụ đưa về hệ đối xứng.

Đặt: $y-2=\sqrt{x+5}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} (y-2)^2=x+5 \\ x^2-4x-3=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y-x-1=0 \\ x^2-4x-y-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (y^2-x^2)-3(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=3-x \end{array}\right.$.

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}.$

- Với $y=3-x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1,\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Đặt ẩn phụ dạng $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{cx+d}+qx+r$ đưa về hệ.

Đặt: $ay+b=\sqrt[n]{cx+d}$ nếu tích số $p.c>0.$

Đặt $-(ay+b)=\sqrt[n]{cx+d}$ nếu tích số $p.c<0.$

Khi đó ta đưa về hệ đối xứng loại II hoặc hệ gần đối xứng loại II

Lời giải **.**

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2-12y+9=4x+5 \\ 2x^2-6x-1=2y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3y-x+1=0 \\ x^2-3x-y+1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (y-x)(y+x)-2(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2-x \end{array}\right..$$

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ x^2-4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}.$
- Với $y=2-x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\ge 0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1-\sqrt{2},\ x=2+\sqrt{3}.$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $6x^2+2x+\sqrt[3]{3x^2+x+4}-10=0$

Phân tích. Nhận thấy nếu đặt $t = \sqrt[3]{3x^2 + x + 4},$ thì biểu thức chứa biến số ngoài căn thức: $6x^2 + 2x = 2.(3x^2 + x)$ có mối liên hệ với nhau nên có lời giải chi tiết như sau:

 <u>Lời giải</u>. Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

Đặt $t = \sqrt[3]{3x^2 + x + 4} \Rightarrow t^3 = 3x^2 + x + 4 \Rightarrow 3x^2 + x = t^3 - 4.$

$(*) \Leftrightarrow 2(t^3 - 4) + t - 10 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + t - 18 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(2t^2 + 4t + 9) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Với $t = 2,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x^2 + x + 4} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{4}{3}.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1,\ x = -\dfrac{4}{3}.$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $(x + 3)\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x - 24$

Điều kiện: $-x^2 - 8x + 48 \ge 0 \Leftrightarrow -12 \le x \le 4.$

 <u>Lời giải</u>. Đặt 2 ẩn $u,\ v$ đưa về hằng đẳng thức: $(u \pm v)^2 = k^2,\ (k = const).$

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{-x^2 - 8x + 48} \ge 0 \\ v = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = -x^2 - 8x + 48 & (1) \\ v^2 = x^2 + 6x + 9 & (2) \\ 2uv = 2x - 48 & (3) \end{cases}$

(phương trình (3) có được là do nhân số 2 ở hai vế của $(*)$)

Lấy $(1) + (2) + (3),$ suy ra: $(u + v)^2 = 9 = 3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 3 \\ u + v = -3 \end{array}\right.$

- Với $u + v = 3,$ suy ra: $\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 + 4x - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{7}.$
- Với $\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -6 - x \Leftrightarrow x = -5 - \sqrt{31}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2-2\sqrt{7},\ x=-5-\sqrt{31}.$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3$

 Lời giải . Đặt 2 ẩn $u,\ v$ đưa về hằng đẳng thức: $(u\pm v)^2=k^2,\ (k=const).$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{-x^2-2x+3}\geq 0 \\ v=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=-x^2-2x+3 & (1) \\ v^2=x^2+4x+4 & (2) \\ 2uv=2x+6 & (3) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)-(3),$ suy ra: $(u-v)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=1 \\ u-v=-1 \end{array}\right.$.

- Với $u-v=1,$ suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$
- Với $u-v=-1,$ suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1,\ x=\sqrt{2}-1.$

Nhận xét:. Dạng tổng quát là $(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}=px+q,\ (a<0),$ khi đó ta thường đặt 2 ẩn phụ $u,\ v$ để đưa về dạng $(u\pm v)^2=k^2,\ (k=const),$

Bài tập tương tự

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+4x=\sqrt{x+6}.\ (x\in \mathbb{R})$

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}.\ (x\in R)$

Bài 3: Giải phương trình: $3x^2+6x-3=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$

Bài 4: Giải phương trình: $x^2 + 4x = \sqrt{x + 6}$.

Bài 5: Giải phương trình: $4x^2 + 4x - 3 = \sqrt{2x + 5}$.

Bài 6: Giải phương trình: $9x^2 - 6x - 5 = \sqrt{3x + 5}$.

2. Đánh giá kết quả thu được.

2.1. Tính mới, tính sáng tạo

Sáng kiến "Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ" với mục tiêu là bộ tài liệu cung cấp cho người đọc một số phương pháp giải phương trình vô tỷ nhằm định hướng giải quyết các bài toán giải phương trình vô tỷ hay và khó trong các đề thi các cấp. Đối với học sinh mũi nhọn của nhà trường thì đây là bộ tài liệu quan trọng giúp các em có đầy đủ kiến thức, kĩ năng giải tốt các phương trình vô tỷ.

Giúp học sinh có cái nhìn sâu sắc hơn về bài toán giải phương trình vô tỷ, từ đó có kĩ năng giải thành thạo các bài tập thuộc chủ đề này và hơn thế có thể ứng dụng vào bài toán tính toán có liên quan đến phương trình vô tỷ.

Giải quyết một lớp các bài toán cơ bản về giải phương trình vô tỷ.

Học sinh chủ động định hướng được các phương pháp giải phương trình vô tỷ, tạo cho các em khả năng làm việc độc lập, sáng tạo, phát huy tối đa tính tích cực của học sinh theo đúng tinh thần phương pháp mới của Bộ giáo dục và đào tạo. Điều quan trọng là tạo cho các em niềm tin, khắc phục được tâm lí sợ bài toán giải phương trình vô tỷ.

2.2. Khả năng áp dụng, nhân rộng:

Sáng kiến ‘’Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ’’ là một tài liệu cần thiết trong việc dạy và học của thầy và trò đặc biệt là trong ôn luyện học sinh thi trung học phổ thông quốc gia, thi học sinh giỏi các cấp nhằm tăng tỉ lệ học sinh giỏi bộ môn là tiêu chí đánh giá chất lượng giáo dục trong nhà trường. Vì vậy chuyên đề này cần được triển khai sâu rộng để tài liệu thực sự hữu ích với các thầy cô và các em học sinh.

III. KẾT LUẬN

Trong những năm qua, khi giảng dạy, luyện thi đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi về phần phương trình, tôi đã cung cấp cho các em học sinh chuyên đề này, kết quả cho thấy phương pháp này đã giúp cho học sinh một hướng đi rõ ràng, một cách nhìn tổng quát, toàn diện, tự tin hơn khi giải các bài tập phương trình

Trước khi giảng dạy chuyên đề này số các em trong phạm vi mà tôi áp dụng giải được bài tập phương trình là rất khiêm tốn, khoảng 25% giải được, số lượng học sinh giải được là rất thấp.

Sau khi giảng dạy chuyên đề 90% học sinh trong đội tuyển có kỹ năng tốt khi vận dụng phương pháp để giải các bài tập phương trình. Số học sinh trong đối tượng ôn đại học tại các lớp 12 vận dụng được chiếm khoảng 70% .

Vì vậy việc sử dụng chuyên đề trong ôn luyện học mũi nhọn góp phần nâng cao chất lượng giáo dục, giảm chi phí mua các loại sách tham khảo đắt đỏ mất thời gian tìm chọn mua mà hiệu quả chưa chắc đã hơn khi học chuyên đề. Các em học sinh không những nắm vững được phương pháp, biết cách vận dụng vào những bài toán cụ thể mà còn rất hứng thú khi học tập phần này. Khi học trên lớp và qua các lần thi thử đại học, thi học sinh giỏi số học sinh làm được bài về giải phương trình cao hơn hẳn các năm trước, từ đó nâng cao ý thức chủ động tích cực của học sinh, góp phần rèn luyện hình thành nhân cách cho các thế hệ học sinh góp phần đào tạo nguồn nhân lực chất lượng.

XÁC NHẬN CỦA CƠ QUAN ĐƠN VỊ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN

CAM ĐOAN CỦA TÁC GIẢ VỀ SÁNG KIẾN

Nông Thị Phương Lan

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1.Toán nâng cao Đại số 10(NXBGD). Tác giả: Nguyễn Huy Đoan.

2.Phương pháp giải toán Đại số 10(NXB TP Hồ chí Minh)

3.Bồi đưỡng Đại số 10(NXB Đại học quốc gia Hà Nội). Tác giả Phạm Quốc Phong.

4. Dùng ẩn phụ để giải toán(NXBGD). Tác giả: Nguyễn Thái Hoè.