

MÃ ĐỀ: 829, 830, 831, 832

(Đề kiểm tra gồm có ... trang)

Họ tên học sinh: SBD:

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K , khi đó hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

C. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

D. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

Giải

Chọn B.

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K.$$

Câu 2: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ trên \mathbb{R} ?

A. $F(x) = 6x$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

C. $F(x) = x^3 - x$.

D. $F(x) = x^3$.

Giải

Chọn C.

$$\int (3x^2 - 1) dx = x^3 - x + C.$$

Câu 3: Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

B. $\int_a^b x.f(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

C. $\int_a^a k.f(x) dx = 0$.

$$D. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Giải

Chọn B.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$, thỏa mãn $f(0) = 5$ và $f(3) = 2$. Khi đó

$$\int_0^3 f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. -3.

B. 3.

C. 7.

D. -1.

Giải

Chọn A.

$$\int_0^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^3 = f(3) - f(0) = 2 - 5 = -3.$$

Câu 5: Xét tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} x.e^{x^2} dx$. Sử dụng phương pháp đổi biến số với $t = x^2$, tích phân I được biến

đổi thành dạng nào sau đây

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} e^t dt.$

B. $I = 2 \int_1^{\sqrt{3}} e^t dt.$

C. $I = 2 \int_1^3 e^t dt.$

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 e^t dt.$

Giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = 1 \text{ và } x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_1^3 e^t dt.$$

Câu 6: Cho $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Phát biểu nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \int_a^b u(x).v'(x)dx = (u(x).v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx.$$

$$\text{B. } \int_a^b u(x).v(x)dx = (u'(x).v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx.$$

$$\text{C. } \int_a^b u(x).v'(x)dx = (u(x).v(x))\Big|_a^b + \int_a^b u'(x).v(x)dx.$$

$$\text{D. } \int_a^b u'(x).v'(x)dx = (u(x).v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v(x)dx.$$

Giải

Chọn A.

Áp dụng công thức tích phân từng phần.

Câu 7: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = g(x)$, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng $x = b$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức

$$\text{A. } S = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\text{B. } S = \int_a^b (|f(x)| - |g(x)|) dx.$$

$$\text{C. } S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{D. } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Giải

Chọn D.

Câu 8: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = -2$, $x = 1$.

$$\text{A. } S = 8.$$

$$\text{B. } S = 9.$$

$$\text{C. } S = 6.$$

$$\text{D. } S = \frac{13}{3}.$$

Giải

Chọn B.

Ta có: $x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên diện tích cần tìm: $S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = 9.$

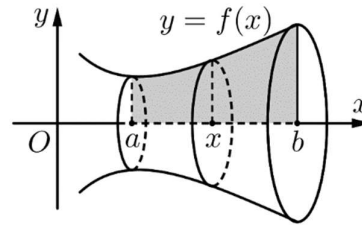
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

B. $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

D. $V = \int_a^b f(x) dx.$



Giải

Chọn A.

Dùng định nghĩa.

Câu 10: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox .

A. $\frac{3}{2}.$

B. $\frac{3\pi}{2}.$

C. $\frac{2\pi}{3}.$

D. $3\pi.$

Giải

Chọn B.

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^2 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Câu 11: Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là

A. $-3 - 4i.$

B. $-3 + 4i.$

C. $3 + 4i.$

D. $-4 + 3i.$

Giải

Chọn C.

Theo định nghĩa số phức liên hợp.

Câu 12: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương.

Phần thực của số phức $z_1 + 2z_2$ là

A. -3 .

B. 3 .

C. 0 .

D. 1 .

Giải

Chọn B.

Ta có: $z^2 - 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 3i = z_1 \\ z = 1 - 3i = z_2 \end{cases}$. Do đó: $z_1 + 2z_2 = 1 + 3i + 2(1 - 3i) = 3 - 3i$.

Vậy phần thực của số phức $z_1 + 2z_2$ là 3 .

Câu 13: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 1 .

C. 2 .

D. $\frac{1}{2}$.

Giải

Chọn D.

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1 \Rightarrow F(0) = -\frac{1}{2} \cos 0 + 1 = \frac{1}{2}.$$

Câu 14: Biết $\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 3}{x} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $M = ab$.

A. $M = 16$.

B. $M = 10$.

C. $M = 0$.

D. $M = 4$.

Giải

Chọn A.

$$\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 3}{x} dx = \int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{3}{x}\right) dx = \left(x^2 - x + 3 \ln |x|\right) \Big|_1^2 = 2 + 3 \ln 2 = 2 + \ln 8.$$

Khi đó $a = 2$, $b = 8 \Rightarrow M = ab = 2 \cdot 8 = 16$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_3^4 f(x)dx = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x+3)dx$ có giá trị bằng

- A. 5.
- B. 13.
- C. 30.
- D. 10.

Giải

Chọn D.

Đặt $t = x + 3 \Rightarrow dt = dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 1 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$.

$$\int_0^1 f(x+3)dx = \int_3^4 f(t)dt = \int_3^4 f(x)dx = 10.$$

Câu 16: Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

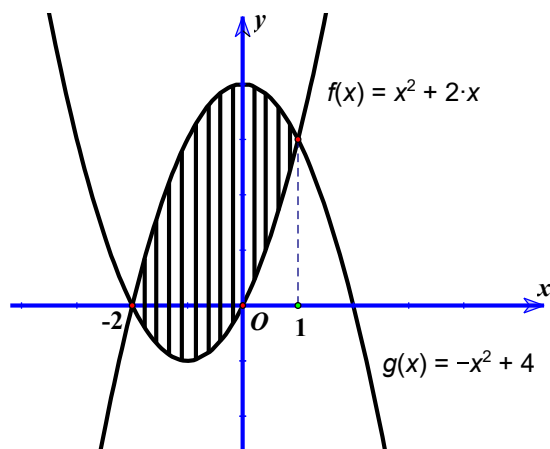
- A. $I = \frac{1}{2}$.
- B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$.
- C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Câu 17: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx$.

B. $\int_{-2}^1 (-2x + 4) dx$.

C. $\int_{-2}^1 (2x - 4) dx$.

D. $\int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx$.

Giải

Chọn D.

Ta thấy: $\forall x \in [-2; 1]: -x^2 + 4 \geq x^2 + 2x$ nên $S_{hp} = \int_{-2}^1 [(-x^2 + 4) - (x^2 + 2x)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx$.

Câu 18: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Biết rằng khi cắt

phần vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) thì ta được

thiết diện là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\cos x}$.

A. $V = 2\sqrt{3}$.

B. $V = \sqrt{3}$.

C. $V = 2\pi\sqrt{3}$.

D. $V = \sqrt{3}\pi$.

Giải

Chọn B.

Diện tích tam giác đều: $S(x) = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{\cos x})^2}{4} = \sqrt{3} \cos x$.

Vậy thể tích $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos x dx = \sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = m^2 - 4 + (m - 3)i$ ($m \in \mathbb{R}$). Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để $z_1 + z_2$ là số thuần ảo.

- A. $\{-2; 2\}$.
- B. $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
- C. $\{-\sqrt{3}\}$.
- D. $\{\sqrt{3}\}$.

Giải

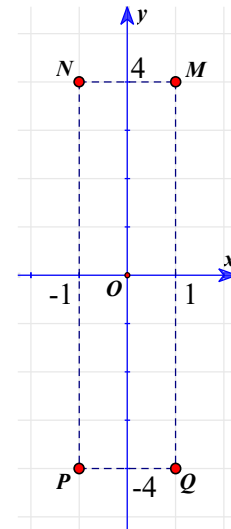
Chọn B.

$$z_1 + z_2 = m^2 - 3 + (m - 5)i.$$

$$z_1 + z_2 \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z = 3 + 5i$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

- A. M .
- B. N .
- C. P .
- D. Q .



Giải

Chọn B.

$$(1 - i)z = 3 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{3 + 5i}{1 - i} = -1 + 4i. \text{ Vậy điểm biểu diễn của } z \text{ là } N(-1; 4).$$

Câu 21: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 2z + 1 = 0$. Tính $|z_1| \cdot z_1 + |z_2| \cdot z_2$?

- A. -2 .
- B. $2\sqrt{2}$.
- C. 1 .
- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Chọn D.

Ta có: $|z_1|z_1 + |z_2|z_2 = \sqrt{z_1 z_2}(z_1 + z_2) = \sqrt{P} \cdot S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa điều kiện $\int_1^3 [3f(x) - g(x)] dx = 4$,

đồng thời $\int_1^3 [f(x) + 2g(x)] dx = 13$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- A. 6.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 9.

Giải

Chọn C.

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)] dx = 4 \Leftrightarrow 3 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 4 \quad (1)$$

$$\int_1^3 [f(x) + 2g(x)] dx = 13 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 2 \int_1^3 g(x) dx = 13 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $\int_1^3 f(x) dx = 3$ và $\int_1^3 g(x) dx = 5$, suy ra: $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 8$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $I = \int_0^1 (x-1)f'(x) dx = 2022$ và $f(0) = 2021$. Tính $J = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $J = -1$.
- B. $J = 1$.
- C. $J = 4043$.
- D. $J = -4043$.

Giải

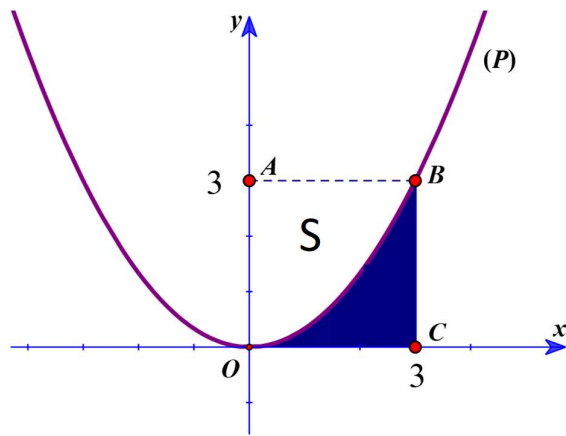
Chọn A.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = (x-1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2021 - \int_0^1 f(x) dx = 2022.$$

$$\text{Vậy } J = \int_0^1 f(x) dx = 2021 - 2022 = -1.$$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $OABC$ có độ dài cạnh bằng 3 được chia thành hai phần bởi parabol (P) có đỉnh tại O . Gọi S là hình phẳng không bị tô đậm (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng S quay quanh trục Ox .



- A. $V = \frac{27}{5}$.
- B. $V = \frac{27\pi}{5}$.
- C. $V = \frac{108\pi}{5}$.
- D. $V = \frac{108}{5}$.

Giải

Chọn C.

Ta có parabol (P) có đỉnh O và đi qua điểm B(3;3) có phương trình $y = \frac{1}{3}x^2$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (phần tô đậm) khi quay quanh trục Ox là:

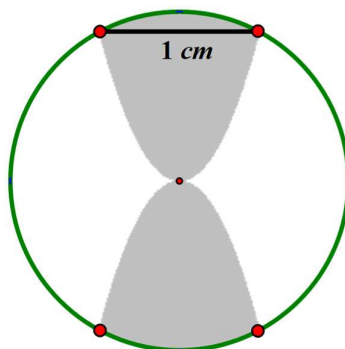
$$V_1 = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 \right)^2 dx = \frac{27\pi}{5}$$

Thể tích khối trụ khi quay hình vuông OABC quanh cạnh OC là: $V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi$.

Suy ra thể tích V của khối tròn xoay khi cho phần S quay quanh trục Ox là

$$V = V_2 - V_1 = 27\pi - \frac{27\pi}{5} = \frac{108\pi}{5}.$$

Câu 25: Một mặt đồng hồ hình tròn có bán kính 1 (cm). Để trang trí, người thiết kế đã sử dụng hai đường parabol có chung đỉnh tại tâm của mặt đồng hồ và có cùng trục đối xứng để tạo ra 2 cánh hoa (phần được tô màu đậm như hình vẽ). Biết hai đầu mút của mỗi cánh hoa nằm trên đường tròn của mặt đồng hồ cách nhau một khoảng bằng 1 (cm). Tổng diện tích của 2 cánh hoa bằng



A. $\frac{2\pi-1}{6} (cm^2)$.

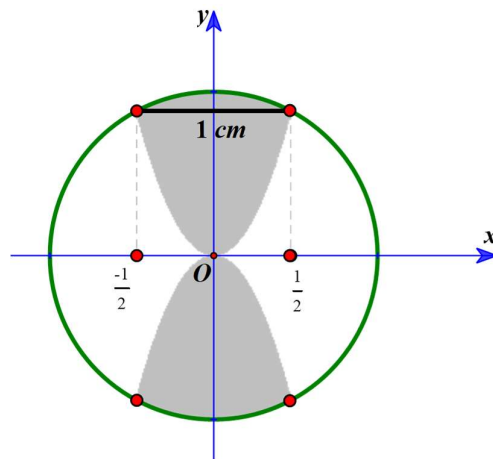
B. $\frac{2\pi-1}{12} (cm^2)$.

C. $\frac{2\pi+3\sqrt{3}-4}{6} (cm^2)$.

D. $\frac{2\pi+3\sqrt{3}-4}{12} (cm^2)$.

Giải

Chọn C.



Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn nằm trên trục Ox là $y = \sqrt{1-x^2}$.

Phương trình parabol (P) đỉnh O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, do đó:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \Rightarrow (P): y = 2\sqrt{3}.x^2.$$

Tổng diện tích của 2 cánh hoa bằng: $S = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{3}.x^2) dx$ Casio. chọn C.

Câu 26: Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{3}$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số

phức $w = \frac{3+iz}{2-z}$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I & tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(6;3), R = \sqrt{51}$.

B. $I(6;3), R = \sqrt{39}$.

C. $I(-6;-3), R = \sqrt{39}$.

D. $I(-6;-3), R = \sqrt{51}$.

Giải

Chọn B.

$$w = \frac{3+iz}{2-z} \Leftrightarrow (2-z)w = 3+iz \Leftrightarrow z(w+i) = 2w-3$$

$$\Rightarrow |z| \cdot |w+i| = |2w-3| \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot |w+i| = |2w-3| \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó thay vào (*) ta có:

$$\sqrt{3} \cdot |x + yi + i| = |2(x + yi) - 3| \Leftrightarrow 3 \left[x^2 + (y+1)^2 \right] = (2x-3)^2 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-3)^2 = 39.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3+iz}{2-z}$ là đường tròn có tâm $I(6;3)$ và bán kính $R = \sqrt{39}$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;1)$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn

$|z-i| = |z+3i|$, đồng thời $|MA-MO|$ lớn nhất. Khi đó $|z|^2$ có giá trị bằng:

A. $\sqrt{5}$.

B. 25.

C. 10.

D. 5.

Giải

Chọn D.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z-i| = |z+3i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow y = -1.$$

Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng $(d): y = -1$.

Hai điểm A, O nằm cùng phía đối với (d) , ta có: $|MA-MO| \leq AO$.

$\Rightarrow |MA-MO|$ lớn nhất khi và chỉ khi M, A, O thẳng hàng.

Gọi $M(a; -1)$, ta có: $\overline{AM} = (a-2; -2)$, $\overline{AO} = (-2; -1)$.

$$\overline{AM} \text{ cùng phương với } \overline{AO} \Leftrightarrow \frac{a-2}{-2} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow M(-2; -1).$$

$$\text{Vậy } |z_o|^2 = |\overline{OM}|^2 = 5.$$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) - \frac{1}{x} \cdot f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. $-\ln 2$.

D. $\ln 2$.

Giải

Chọn A.

Từ $f'(x) - \frac{1}{x} \cdot f(x) = 0, f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$.

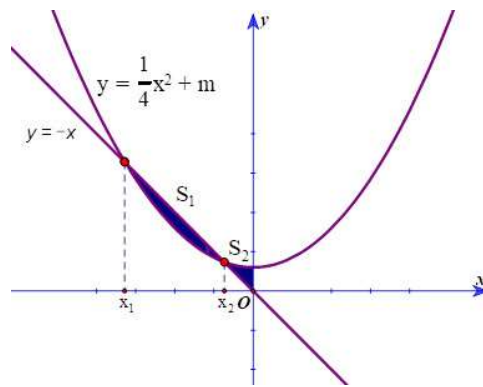
Đặt $t = f(x) < 0$ ta được $\int_{f(1)}^{f(2)} \frac{dt}{t} = \ln 2$.

Suy ra:

$$\left[\ln |t| \right]_{f(1)}^{f(2)} = \ln 2 \Leftrightarrow \left[\ln(-t) \right]_{f(1)}^{f(2)} = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(-f(2)) - \ln(-f(1)) = \ln 2 \Rightarrow \ln(-f(2)) = \ln 2 \Leftrightarrow f(2) = -2.$$

Câu 29: Cho đường thẳng $y = -x$ và parabol $y = \frac{1}{4}x^2 + m$ (với m là số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần

lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô màu đậm trong hình vẽ dưới đây:



Khi $S_1 = S_2$ thì m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right)$

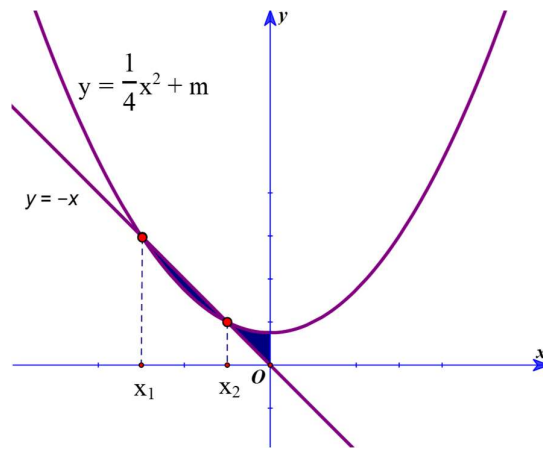
B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

C. $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Giải

Chọn C.



Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{4}x^2 + m = -x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4m = 0$ (1)

Phương trình (1) có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4m > 0 \\ -4 < 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Khi $0 < m < 1$ phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $x_1 < x_2$.

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{4}x^2 - x - m \right) dx = \int_{x_2}^0 \left(\frac{1}{4}x^2 + m + x \right) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{12}x_2^3 - \frac{x_2^2}{2} - mx_2 + \frac{1}{12}x_1^3 + \frac{x_1^2}{2} + mx_1 = -\frac{1}{12}x_2^3 - \frac{x_2^2}{2} - mx_2 \Leftrightarrow x_1^2 + 6x_1 + 12m = 0$$
 (2)

Từ (1) suy ra: $4m = -x_1^2 - 4x_1$.

Thế vào (2) ta được: $2x_1^2 + 6x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0(l) \\ x_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{4} \in \left(\frac{3}{5}; 1 \right)$.

Câu 30: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - m + i| = 4$ và $|z - 3 + 2i| = |\bar{z} - 1 + i|$.

A. 13.

B. 14.

C. 65.

D. 66.

Giải

Chọn B.

Gọi điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z \Rightarrow z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Do $|z - (m - i)| = 4$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm $I(m; -1)$ bán kính $R = 4$.

$$|z - 3 + 2i| = |\bar{z} - 1 + i| \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 2)i| = |(x - 1) - (y - 1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 + 4y + 4 = -2x + 1 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6y - 11 = 0$$

Do đó M thuộc đường thẳng $d: 4x - 6y - 11 = 0$.

Vậy M là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng d .

$$\text{Để có đúng 2 số phức } z \Leftrightarrow (C) \text{ và } d \text{ có đúng 2 giao điểm} \Leftrightarrow d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{|4m-5|}{\sqrt{4^2+6^2}} < 4$$

$$\Leftrightarrow |4m-5| < 8\sqrt{13} \Leftrightarrow -8\sqrt{13} < 4m-5 < 8\sqrt{13} \Leftrightarrow \frac{5-8\sqrt{13}}{4} < m < \frac{5+8\sqrt{13}}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-5; -4; \dots; 7; 8\} \Rightarrow$ có 14 giá trị.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overline{OM} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ điểm M là

A. $M(1; 2; 3)$.

B. $M(1; -2; 3)$.

C. $M(0; -2; 3)$.

D. $M(0; 2; 3)$.

Giải

Chọn B.

Theo định nghĩa.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-3; 4; 1)$, $B(3; -4; -1)$. Tọa độ vectơ \overline{AB} là

A. $\overline{AB} = (6; -8; -2)$.

B. $\overline{AB} = (-6; 8; 2)$.

C. $\overline{AB} = (0; 0; 0)$.

D. $\overline{AB} = (6; -8; 0)$.

Giải

Chọn A.

$$\overline{AB} = (3+3; -4-4; -1-1) = (6; -8; -2).$$

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính

AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Giải

Chọn C.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3; 3; 1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z - 7 = 0$.

A. $I(-1; 1; -3), R = 3$.

B. $I(1; -1; 3), R = 3\sqrt{2}$.

C. $I(1; -1; -3), R = 18$.

D. $I(1; -1; -3), R = 3\sqrt{2}$.

Giải

Chọn D.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 18$.

Vậy $I(1; -1; -3), R = 3\sqrt{2}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$, vectơ nào dưới đây là một vectơ

pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

A. $\vec{n}_1 = (3; 6; 2)$.

B. $\vec{n}_2 = (-3; 6; 2)$.

C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$.

D. $\vec{n}_4 = (-3; 6; -2)$.

Giải

Chọn A.

Ta có phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y + 2z - 6 = 0$.

Do đó một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; 6; 2)$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -1), B(2; -1; 4)$. Phương trình mặt phẳng (OAB) là

A. $3x + 14y + 5z = 0$.

B. $3x - 14y + 5z = 0$.

C. $3x + 14y - 5z = 0$.

D. $3x - 14y - 5z = 0$.

Giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{OA} = (3; 1; -1), \vec{OB} = (2; -1; 4) \Rightarrow [\vec{OA}; \vec{OB}] = (3; -14; -5)$ là VTPT của (OAB) .

$\Rightarrow (OAB): 3x - 14y - 5z = 0$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Điểm nào sau đây **không**

thuộc đường thẳng (d) ?

A. $M(1; -1; -5)$.

B. $M(1; -1; 3)$.

C. $M(3; -2; -1)$.

D. $M(5; -3; 3)$.

Giải

Chọn B.

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 4y + 7z + 2 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 2t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 7 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 4t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

Giải

Chọn B.

Gọi \vec{u}_Δ là vector chỉ phương của đường thẳng (Δ) .

Ta có vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = (3; -4; 7)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} (\Delta) \perp (P) \\ A \in (\Delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (3; -4; 7) \\ A(1; 2; 3) \in (\Delta) \end{cases} \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 7t \end{cases}$$

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (3; -2; 4)$. Tìm tọa độ của vector \vec{u} sao cho

$$2\vec{u} + 3\vec{i} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

A. $\left(\frac{-5}{2}; \frac{-3}{2}; -3\right)$.

B. $\left(\frac{-5}{2}; 0; \frac{-9}{2}\right)$.

C. $(-4; 0; -3)$.

D. $\left(4; \frac{-3}{2}; -3\right)$.

Giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{u} = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{i} = (-4; 0; -3)$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Số phần tử của S là

A. 6.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Giải

Chọn D.

$$YCBT \Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - (7m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5$$

\Rightarrow có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 13 = 0$ và $(Q): x - 2y + 2z - 5 = 0$ bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 6.

D. $\frac{13}{3}$.

Giải

Chọn A.

Lấy điểm $M(13; 0; 0) \in (P)$.

$$\text{Do } (P) \parallel (Q) \text{ nên } d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|x_M - 2y_M + 2z_M - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - m^2y + 2z - 1 = 0$ và $(\beta): m^2x + y - (m^2 - 1)z + 2 = 0$ vuông góc nhau khi và chỉ khi

A. $|m| = \sqrt{3}$.

B. $|m| = 2$.

C. $|m| = 1$.

D. $|m| = \sqrt{2}$.

Giải

Chọn D.

(α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -m^2; 2)$.

(β) có VTPT $\vec{n}_\beta = (m^2; 1; -m^2 + 1)$.

$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow |m| = \sqrt{2}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$.

Giải

Chọn C.

Đường thẳng (d) đi qua A và song song với BC nhận $\overline{BC} = (2; 3; -1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Phương trình của đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ và (d_2) : $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z-4}{6}$. Tính

góc hợp bởi đường thẳng (d_1) và (d_2) .

A. 0° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Giải

Chọn A.

Ta có: (d_1) có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-1; 4; -3)$ và (d_2) có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; -8; 6)$.

Vì \vec{u}_1 và \vec{u}_2 cùng phương với nhau nên góc hợp bởi đường thẳng (d_1) và (d_2) là 0° .

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 0)$ và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). \text{ Gọi điểm } M(a; b; c) \text{ thuộc } (d) \text{ sao cho } MA^2 + MB^2 = 22, \text{ biết } c > 0. \text{ Giá trị}$$

của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 10.

B. 14.

C. $\frac{22}{3}$.

D. 6.

Giải

Chọn B.

$$M \in (d) \Rightarrow M(1+t; 2-t; 1+2t), \text{ Đk: } 1+2t > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1}{2}.$$

$$MA^2 + MB^2 = 22 \Leftrightarrow (-t)^2 + (-2+t)^2 + (1-2t)^2 + (-2-t)^2 + t^2 + (-1-2t)^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 + 10 = 22 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 (n) \\ t = -1 (l) \end{cases}.$$

Với $t = 1$, ta có $M(2; 1; 3) \Rightarrow T = 14$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và đường thẳng

$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Biết đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) theo một dây cung AB có độ dài bằng

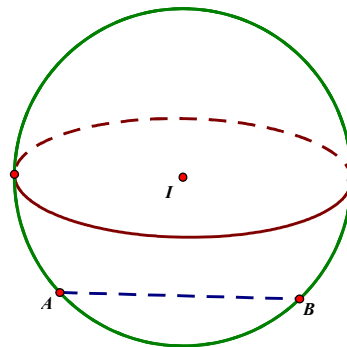
$2\sqrt{2}$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 2z - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 2z - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 2 = 0$.



Giải

Chọn C.

(d) đi qua điểm $M(0; 1; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

$$d(I, (d)) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 2\sqrt{2}.$$

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) .

$$\text{Ta có: } R^2 = \frac{AB^2}{4} + [d(I, d)]^2 = 10.$$

$$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 4 = 0.$$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 4x + 3y - 12z - 39 = 0$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là

A. $4x + 3y - 12z - 65 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z + 71 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z - 19 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 91 = 0$.

Giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

$$(P) // (Q) \Rightarrow (P): 4x + 3y - 12z + m = 0 \quad (m \neq -39).$$

$$\text{Vì } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \Rightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 5 \Leftrightarrow |m - 26| = 65 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 91 \text{ (n)} \\ m = -39 \text{ (l)} \end{cases}.$$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -4; 1), B(0; 0; 3)$. Viết phương trình đường trung trực (Δ) của đoạn thẳng AB , biết (Δ) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 2 = 0$.

A. $(\Delta): \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

B. $(\Delta): \begin{cases} x = 3t \\ y = -4 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

C. $(\Delta): \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

D. $(\Delta): \begin{cases} x = -3t \\ y = -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Giải

Chọn C.

$$(\alpha) \text{ có VTPT } \vec{n} = (1; -1; 1), \overline{AB} = (0; 4; 2) \Rightarrow [\vec{n}, \overline{AB}] = (-6; -2; 4)$$

(Δ) có VTCP $\vec{u} = (3; 1; -2)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0; -2; 2)$.

$$\text{Vậy } (\Delta): \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 1)$, $B(1; 2; -3)$ và mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 1$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ bằng

A. 16.

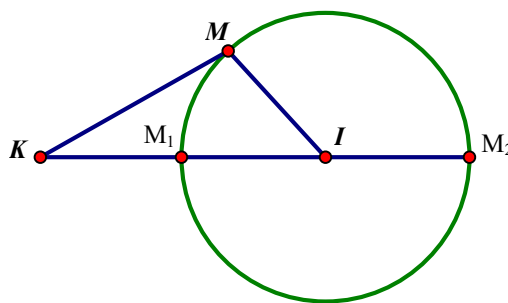
B. 22.

C. 40.

D. 13.

Giải

Chọn A.



Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow K(2; 0; -1)$.

$$\text{Ta có } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = (\overline{MK} + \overline{KA}) \cdot (\overline{MK} + \overline{KB}) = (\overline{MK} + \overline{KA}) \cdot (\overline{MK} - \overline{KA}) = MK^2 - KA^2.$$

Do $KA = 3$ nên $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất khi MK nhỏ nhất

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 4; 1)$ và bán kính $R = 1$, K nằm ngoài (S) .

$$\text{Mà } MK + MI \geq KI \Rightarrow MK \geq KI - R = 5 \Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} \geq 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với M_1 trên hình vẽ.

Vậy $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ có GTNN bằng 16.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{1}$ và

$(d_2): \frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng $(P): ax + y + cz + d = 0$ chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc lớn

nhất. Hỏi giá trị của biểu thức $T = a - c + d$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 3$.

B. $T = 7$.

C. $T = 0$.

D. $T = -147$.

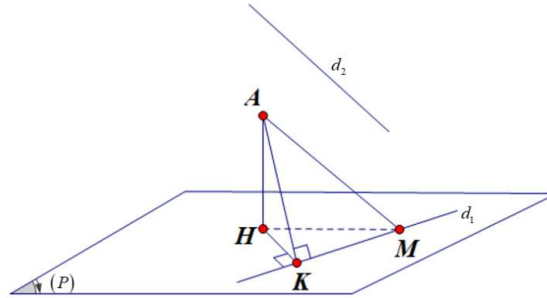
Giải

Chọn B.

(d_1) qua $M(1;3;4)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (2; -4; 1)$.

(d_2) qua $N(6; -2; -1)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (3; 1; -2)$.

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (7; 7; 14), \vec{MN} = (5; -5; -5) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = -60 \neq 0 \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.



Dựng đường thẳng qua M và song song d_2 . Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(P)$, K là hình chiếu của A lên đường thẳng (d_1) .

Góc giữa $mp(P)$ và đường thẳng (d_2) là \widehat{AMH} .

Ta có: $\sin(\widehat{(d_2), (P)}) = \sin \widehat{HMA} = \frac{AH}{AM} \leq \frac{AK}{AM}$ (do $AH \leq AK$).

$(\widehat{(d_2), (P)})$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(\widehat{(d_2), (P)})$ lớn nhất.

Do $\frac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin(\widehat{(d_2), (P)})$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với mặt phẳng (AKM) , hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vectơ \vec{u}_1 và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

Ta có: $[\vec{u}_1, [\vec{u}_1, \vec{u}_2]] = (-63; -21; 42) \Rightarrow$ Ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = (3; 1; -2)$.

Mặt phẳng (P) chứa (d_1) nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;3;4)$.

$(P): 3x + y - 2z + 2 = 0$. Suy ra $a - c + d = 3 + 2 + 2 = 7$.

HẾT