

CHUYÊN ĐỀ
HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

MỤC LỤC

VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I)	3
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	3
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	3
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	4
VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)	6
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	6
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	6
Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông.....	6
VẤN ĐỀ 3 : LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG	8
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	8
B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	8
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	9
VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I).....	10
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	10
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	10
Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc.....	10
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	11
VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II)	13
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	13
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	13
Dạng 2. Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác.....	13
Dạng 3. Dựng góc nhọn α biết tỉ số lượng giác của nó là $\frac{m}{n}$	14
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ :	15
VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I).....	16
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	16
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	16
Dạng 1. Giải tam giác vuông	16
Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác	17
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	17
VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II).....	19
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	19

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN	19
Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế.....	19
Dạng 4. Toán tổng hợp.....	20
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ	20
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3	21
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	21
B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	22
HƯỚNG DẪN GIẢI.....	26
VẤN ĐỀ 1.....	26
VẤN ĐỀ 2.....	26
VẤN ĐỀ 3.....	27
VẤN ĐỀ 4.....	28
VẤN ĐỀ 5.....	29
VẤN ĐỀ 6.....	31
VẤN ĐỀ 7.....	32
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3.....	32

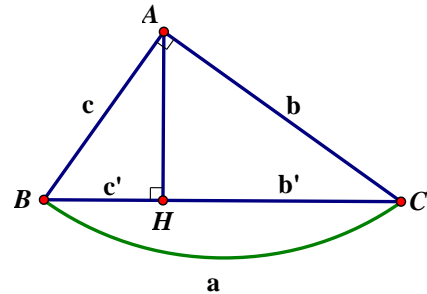
CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN 1)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$.
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pitago).



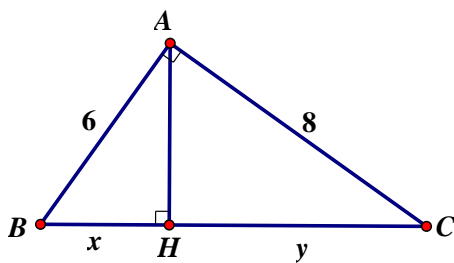
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

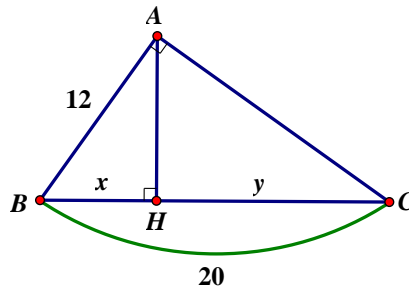
Phương pháp giải: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng AB, AC, BC, HA, HB, HC thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

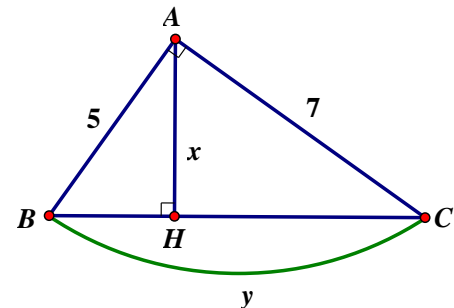
Bài 1. Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

a) Cho biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH và BC .

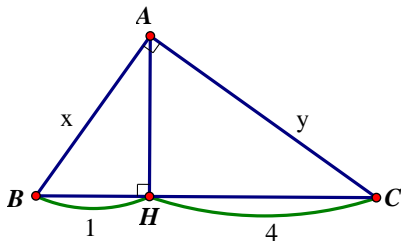
b) Cho biết $BH = 9\text{cm}$, $ch = 16\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC và AH .

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $BC = 15\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH .

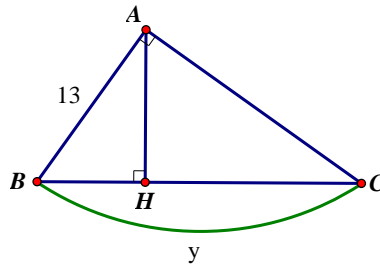
Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 6\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH .

* Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp :

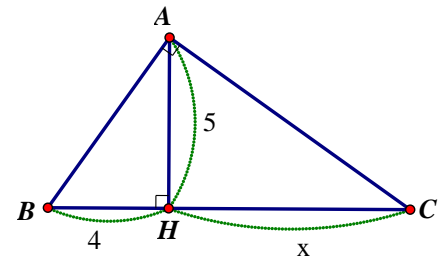
Bài 5. Tính x, y trong các hình vẽ sau :



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

- Cho biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH , AH và AC .
- Cho biết $AH = 60\text{cm}$, $CH = 144\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và BH .
- Cho biết $AC = 12\text{cm}$, $AH = \frac{60}{13}\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , BC , BH và CH .

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$ và $BC = 122\text{cm}$.

Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 12\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7,5\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH .

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $AH = 6\text{cm}$, $BH = 4,5\text{cm}$. Tính AB , AC , BC , HC .
- Biết $AB = 6\text{cm}$, $BH = 3\text{cm}$. Tính AH , AC , CH .

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính diện tích tam giác ABC , biết $AH = 12\text{cm}$, $BH = 9\text{cm}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC , biết $BC = 7,5\text{cm}$, $CA = 4,5\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$.

- Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC .
- Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH .

Bài 13. Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông là 7 và 24. Kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính độ dài đường cao và các đoạn thẳng mà đường cao đó chia ra trên cạnh huyền.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$, $AH = 15\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HB và HC .

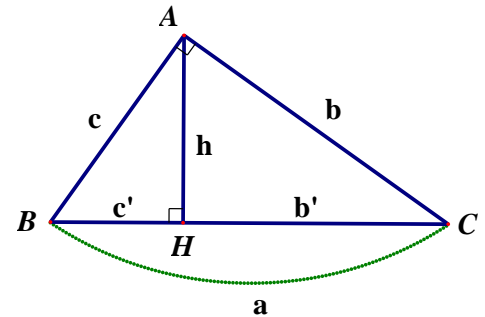
Bài 15. Cho ABCD là hình thang vuông tại A và D. Đường chéo BD vuông góc với BC. Biết $AD = 12\text{cm}$, $DC = 25\text{cm}$. Tính độ dài AB, BC và BD.

VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết : Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khi đó có các hệ thức sau :

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = a.b'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = a.h$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'.b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pitago)



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Phương pháp giải : Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo hướng :

Bước 1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

Bước 2. Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

Bước 3. Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

Bài 1. Cho tam giác CDE nhọn, đường cao CH . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên CD, DE . Chứng minh :

a) $CD.CM = CE.CN$;

b) Tam giác CMN đồng dạng với tam giác CED .

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm chính giữa A và B . Tia DI và tia CB cắt nhau ở K . Kẻ đường thẳng qua D , vuông góc với DI , cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh :

a) Tam giác DIL là tam giác cân ;

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB .

* Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp :

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AH là đường cao.

a) Chứng minh $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$;

b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AB, AC . Chứng minh :

$$AM \cdot AB = AN \cdot AC.$$

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết khoảng cách từ O tới mỗi cạnh của hình thoi là $h, AC = m, BD = n$. Chứng minh : $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4h^2}$.

C.BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8\text{cm}, BC = 15\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BD .

b) Vẽ AH vuông góc với BD tại H . Tính độ dài đoạn thẳng AH .

c) Đường thẳng AH cắt BC và DC lần lượt tại I và K . Chứng minh $AH^2 = HI \cdot HK$.

Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Cho biết $AB = 15\text{cm}, AD = 20\text{cm}$, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau ở O . Tính

a) Độ dài các đoạn thẳng OB và OD ;

b) Độ dài đoạn thẳng AC ;

c) Diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC . Chứng minh :

a) $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$;

b) $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A có AH và BK là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt tia CA tại D . Chứng minh :

a) $BD = 2 \cdot AH$;

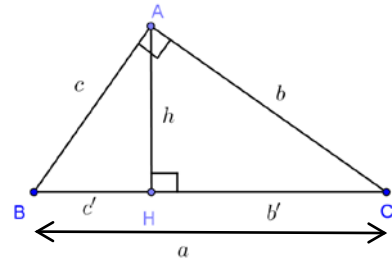
b) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$.

VẤN ĐỀ 3 : LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết : Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH \cdot BC$ hay $c^2 = a \cdot c'$
- $AC^2 = CH \cdot BC$ hay $b^2 = a \cdot b'$
- $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ hay $c \cdot b = a \cdot h$
- $HA^2 = HB \cdot HC$ hay $h^2 = c' \cdot b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pitago)



B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết BH = 4cm, CH = 9cm. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB và AC.

- Tính độ dài đoạn thẳng DE.
- Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E lần lượt cắt BC tại M, N. Chứng minh $MN = \frac{1}{2} BC$.
- Tính diện tích của tứ giác DENM.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh

- $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$;
- $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{EC}$;
- $DE^2 = BD \cdot CE \cdot BC$;
- $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

*Học sinh tự luyện các bài tập sau đây

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Cho biết AB = 6cm, AC = 8cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH và BC.
- Cho biết AB = 6cm, BC = 10cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH và AC.

- Bài 4.** Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông nếu đường cao ứng với cạnh huyền có độ dài 48cm và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền theo tỉ lệ 9 : 16.
- Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 15\text{cm}$, $CD = 20\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HB, HC.
- Bài 6.** Cho hình thang cân ABCD có độ dài cạnh đáy $AB = 26\text{cm}$ và cạnh bên $AD = 10\text{cm}$. Cho biết đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Tính diện tích hình thang ABCD.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.
- Nếu $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn AB, AC, BC, AH.
 - Nếu $AH = 5\text{cm}$, $CH = 16\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, BH.
- Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 12\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH.
- Bài 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Cho biết $BD = 15\text{cm}$, $CD = 20\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HB và HC.
- Bài 10.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính chu vi của tam giác ABC biết $AH = 14\text{cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$.
- Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng $AH = 12\text{cm}$, $BH = 9\text{cm}$.
- Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CK.
- Cho biết $AB = 10\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính BC, CK, BK và AK.
 - Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC. Chứng minh $CB \cdot CH = CA \cdot CI$
 - Gọi M là chân đường vuông kẻ từ K xuống IH. Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$.
 - Chứng minh $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$.

VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$.

Từ đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}; \quad \sin \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn α bất kì, ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; \quad 0 < \cos \alpha < 1$$

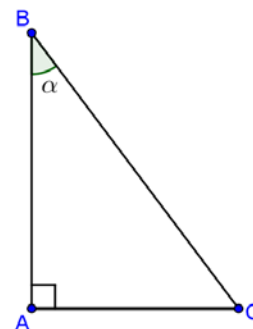
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

- Bảng tỉ số lượng giác các góc đặc biệt

Tỉ số \ α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức trong phần Tóm tắt lý thuyết ở trên.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2\text{ cm}$, $AC = 0,9\text{ cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hãy tính $\sin B$, $\sin C$ trong các trường hợp sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 4):

a) $AB = 13 \text{ cm}, BH = 0,5 \text{ dm};$ b) $CH = 4 \text{ cm}, BH = 3 \text{ cm}.$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}$

- Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B = 0,6$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5 \text{ cm}, \cot B = \frac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC .

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1,6 \text{ cm}, CA = 1,2 \text{ cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C .

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{5}$.

- Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Cho biết $\cos B = 0,8$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C .

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}, \tan B = \frac{5}{12}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 60 \text{ mm}, CA = 8 \text{ cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C .

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 30 \text{ cm}, \tan B = \frac{5}{12}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC .

Bài 12. Tính $\sin \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$ biết $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC biết:

a) $AB = 12 \text{ cm}, \tan B = \frac{3}{4}$ b) $AB = 15 \text{ cm}, \cos B = \frac{5}{13}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông ở A , $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = 10\text{cm}$.

- a) Tính AB , AC .
- b) Kẻ từ A các đường thẳng AM , AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B . Chứng minh MN song song với BC và $MN = BC$.
- c) Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có :

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn α bất kỳ, ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

α	30°	45°	60°
Tỉ số			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác

Phương pháp giải: Để sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác cho trước ta cần làm được hai bước sau:

Bước 1: Đưa về các tỉ số lượng giác trong bài toán cùng loại bằng cách sử dụng tính chất "Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia"

Bước 2: Với góc nhọn α, β , ta có:

$$\begin{aligned}\sin \alpha < \sin \beta &\Leftrightarrow \alpha < \beta; \\ \cos \alpha < \cos \beta &\Leftrightarrow \alpha > \beta; \\ \tan \alpha < \tan \beta &\Leftrightarrow \alpha < \beta; \\ \cot \alpha < \cot \beta &\Leftrightarrow \alpha > \beta.\end{aligned}$$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh

- a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$. b) $\cos 60^\circ$ và $\cos 70^\circ$.
c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 45^\circ$. d) $\cot 20^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$.

Bài 2. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

- a) $\tan 42^\circ, \cot 71^\circ, \tan 38^\circ, \cot 69^\circ 15', \tan 28^\circ$;
b) $\sin 32^\circ, \cos 51^\circ, \sin 39^\circ, \cos 79^\circ 13', \sin 38^\circ$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp :

Bài 3. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh :

- a) $\sin 40^\circ$ và $\sin 70^\circ$; b) $\cos 80^\circ$ và $\cos 50^\circ$;
c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 65^\circ$; d) $\cot 53^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$.

Bài 4. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn :

- a) $\tan 12^\circ, \cot 61^\circ; \tan 28^\circ; \cot 79^\circ 15'; \tan 58^\circ$;
b) $\cos 67^\circ, \sin 56^\circ, \cos 63^\circ 41', \sin 74^\circ, \cos 85^\circ$.

Dạng 3. Dựng góc nhọn α biết tỉ số lượng giác của nó là $\frac{m}{n}$.

Phương pháp giải: Dựng một tam giác vuông có hai cạnh là m và n trong đó m và n là hai cạnh góc vuông hoặc một cạnh góc vuông và một cạnh huyền rồi vận dụng định nghĩa tỉ số lượng giác để nhận ra góc α .

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 5. Dựng góc nhọn α biết rằng :

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; b) $\cos \alpha = \frac{4}{7}$; c) $\tan \alpha = \frac{3}{2}$; d) $\cot \alpha = \frac{5}{6}$.

* Học sinh tự luyện ở lớp :

Bài 6. Dựng góc nhọn α biết rằng:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$; c) $\tan \alpha = \frac{3}{7}$; d) $\cot \alpha = \frac{4}{5}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ :

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 30\text{cm}$, $\widehat{B} = \alpha$, $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Tính cạnh BC, AC .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính $\sin B; \sin C$ biết rằng:

a) $AB = 13; BH = 5;$

b) $BH = 3; HC = 4.$

Bài 9. Dựng góc nhọn α biết rằng:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2};$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3};$

c) $\tan \alpha = \frac{4}{5};$

d) $\cot \alpha = \frac{3}{4}.$

Bài 10. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn.

a) $\sin 35^\circ, \cos 28^\circ; \sin 34^\circ 72'; \cos 62^\circ; \sin 45^\circ;$

b) $\cos 37^\circ, \cos 65^\circ 30', \sin 72^\circ, \cos 59^\circ, \sin 47^\circ.$

Bài 11. Tính giá trị biểu thức :

a) $A = \cos^2 52^\circ \sin 45^\circ + \sin^2 52^\circ \cos 45^\circ;$

b) $B = \sin 45^\circ \cos^2 47^\circ + \sin^2 47^\circ \cos 45^\circ.$

Bài 12. Tìm $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{cm}$.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC .

b) Kẻ từ A các đoạn thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B . Chứng minh MN song song với BC và $MN = BC$.

c) Chứng minh tam giác MAB đồng dạng với tam giác ABC . Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 14. Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính :

a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ.$

b) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ.$

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM , đường cao AH , $MA = MB = MC = a$. Chứng minh :

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$

c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha.$

VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I).

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

- Cho tam giác ABC vuông tại A có

$BC = a, AC = b, AB = c$. Ta có :

- Trong một tam giác vuông :

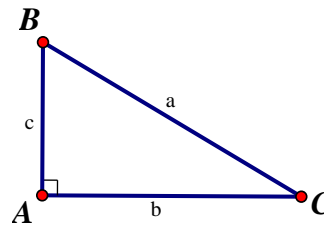
$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$

- Cạnh góc vuông = (cạnh huyền) \times (sin góc đối)
= (cạnh huyền) \times (cosin góc kề)
- Cạnh góc vuông = (cạnh góc vuông) \times (tang góc đối)
= (cạnh góc vuông còn lại) \times (cotang góc kề).



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Phương pháp giải:

1. Giải tam giác là tính độ dài các cạnh và số đo các góc dựa vào dữ kiện cho trước của bài toán.
2. Trong tam giác vuông, ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc của một tam giác vuông và sử dụng máy tính cầm tay hoặc bảng lượng giác để tính các yếu tố còn lại.
3. Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm :
 - i) Giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn.
 - ii) Giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng :

a) $b = 10\text{cm}; \hat{C} = 30^\circ;$

b) $a = 20\text{cm}; \hat{B} = 35^\circ.$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng :

a) $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm};$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}.$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng:

a) $b = 28\text{cm}; c = 21\text{cm};$

b) $a = 10\text{cm}; b = 6\text{cm}.$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng:

a) $c = 3,8\text{cm}; \hat{B} = 51^\circ;$

b) $a = 11\text{cm}; \hat{C} = 60^\circ.$

Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp giải: Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 11\text{cm}, \widehat{ABC} = 38^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC . Hãy tính:

a) Độ dài đoạn thẳng AN ;

b) Độ dài đoạn thẳng AC .

Bài 6. Cho tam giác ABC , có $BC = 6\text{cm}, \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính:

a) Chiều cao CH và cạnh AC ;

b) Diện tích tam giác ABC .

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 7. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 3,5\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 8. Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết $AC = 4\text{cm}, BD = 5\text{cm}, \widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng:

a) $b = 5,4\text{cm}, \hat{C} = 30^\circ;$

b) $c = 10\text{cm}, \hat{C} = 45^\circ.$

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng:

a) $a = 15\text{cm}, b = 10\text{cm};$

b) $b = 12\text{cm}, c = 7\text{cm}.$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng:

a) $\hat{A} = 40^\circ, AC = 8;$

b) $\hat{C} = 28^\circ, AB = 5;$

c) $AB = 8, BC = 15.$

Bài 12. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{C} = 40^\circ, AB = 4\text{cm}, AD = 3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH ; $HB = 9\text{cm}, HC = 16\text{cm}$.

a) Tính AB, AC, AH .

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Tứ giác $ADHE$ là hình gì?

c) Tính chu vi và diện tích của tứ giác $ADHE$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}$.

a) Giải tam giác vuông ABC (số đo góc làm tròn đến độ).

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD, BD .

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BC và BD . Chứng minh :

$$BF \cdot BD = BE \cdot BC.$$

VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho tam giác ABC vuông tại A
có $BC = a, AC = b, AB = c$. Ta có :

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$

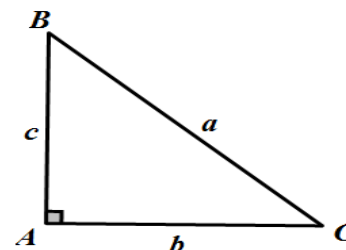
- Trong một tam giác vuông

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{Cạnh huyền}) \times (\sin \text{ góc đối})$$

$$= (\text{Cạnh huyền}) \times (\cos \text{ góc kề})$$

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{Cạnh góc vuông}) \times (\tan \text{ góc đối})$$

$$= (\text{Cạnh góc vuông}) \times (\cot \text{ góc kề})$$



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế

Phương pháp giải: Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết tình huống trong thực tế.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $7,5m$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 2. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là $2,1m$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $5m$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 50° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 4. Một cột đèn điện AB cao $6m$ có bóng in trên mặt đất là AC dài $3,5m$. Hãy tính góc \widehat{BCA} (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

Dạng 4. Toán tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng linh hoạt một số hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải toán.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC > AB$. Đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

- Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tam giác ABC đồng dạng với tam giác AED .
- Cho biết $BH = 2\text{cm}, HC = 4,5\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng DE .
- Tính số đo góc \widehat{ABC} (làm tròn đến độ).
- Tính diện tích tam giác ADE .

**Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC tại H . Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD .

- Chứng minh tứ giác $EFCH$ là hình bình hành.
- Chứng minh $\widehat{BEG} = 90^\circ$.
- Cho biết $BH = h, \widehat{BAC} = \alpha$. Tính S_{ABCD} theo h và α .
- Tính độ dài đường chéo AC theo h và α .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 21\text{cm}, \widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD của góc \widehat{ABD}, D nằm trên cạnh AC .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông ở $A, \widehat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{cm}$.

- Tính AB, AC .
- Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B . Chứng minh MN song song với BC và $2MN = BC$.
- Chứng minh tam giác MAB đồng dạng với tam giác ABC . Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC > AB$, đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

- Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tam giác ABC đồng dạng với tam giác AED .
- Cho biết $BH = 2\text{cm}, HC = 4,5\text{cm}$. Tính:
 - Độ dài đoạn thẳng DE ;
 - Số đo \widehat{ABC} (làm tròn đến độ);
 - Diện tích tam giác ADE .

Bài 10. Chứng minh:

- a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

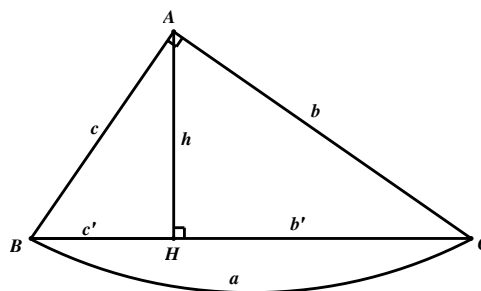
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khi đó ta có các hệ thức sau :

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = a.b'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $c.b = a.h$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'.b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pitago)



2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

- Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có :

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC} .$$

- Với góc nhọn α bất kỳ, ta luôn có :
 $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1;$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha . \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} .$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỷ số lượng giác của các góc đặc biệt :

α	30°	45°	60°
Tỷ số			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

- Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a; AC = b; AB = c$. Ta có :

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$
- Trong một tam giác vuông

Cạnh góc vuông = (cạnh huyền) \times (sin góc đối)

= (cạnh huyền) \times (cosin góc kề)

Cạnh góc vuông = (cạnh góc vuông) \times (tang góc đối)

= (cạnh góc vuông còn lại) \times (cotang góc kề)

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trong các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH, HB, HC , hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết :

- $AB = 6\text{ cm}$ và $AC = 9\text{ cm}$;
- $AB = 15\text{ cm}$ và $HB = 9\text{ cm}$;
- $AC = 44\text{ cm}$ và $BC = 55\text{ cm}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và $AH = 12\text{ cm}; BC = 25\text{ cm}$.

- Tìm độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AB và AC .
- Vẽ trung tuyến AM . Tìm số đo của góc \widehat{AMH} .
- Tính diện tích tam giác AHM .

Bài 3. Cho tam giác ABC có đường cao CH , $BC = 12\text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 40^\circ$.

- Tính độ dài các đoạn thẳng CH và AC .
- Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH , $AB = 3\text{ cm}, AC = 4\text{ cm}$.

- Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH .
- Tính số đo các góc \widehat{B}, \widehat{C} .
- Đường phân giác trong của góc \widehat{A} cắt cạnh BC tại E . Tính độ dài các đoạn thẳng BE và CE .

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH . Từ H kẻ HE vuông góc với AB (E thuộc AB) và kẻ HF vuông góc với AC (F thuộc AC).

- a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
- b) Cho biết $AB = 4\text{cm}$, $AH = 3\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AE và BE .
- c) Cho biết $\widehat{HAC} = 30^\circ$. Tính độ dài đoạn thẳng FC .

Bài 6. Tứ giác $MNEF$ vuông tại M, F , có EF là đáy lớn, hai đường chéo ME và NF vuông góc với nhau tại O .

- a) Cho biết $MN = 9\text{cm}$ và $MF = 12\text{cm}$. Hãy:
 - i) Giải tam giác MNF .
 - ii) Tính độ dài các đoạn thẳng MO, FO .
 - iii) Kẻ NH vuông góc với EF tại H . Tính diện tích tam giác FNE . Từ đó tính diện tích tam giác FOH .
- b) Chứng minh $MF^2 = MN \cdot FE$.

Bài 7. Cho tam giác DEF biết $DE = 6\text{cm}$, $DF = 8\text{cm}$, $EF = 10\text{cm}$.

- a) Chứng minh rằng DEF là tam giác vuông.
- b) Vẽ đường cao DK . Hãy tính DK, FK .
- c) Giải tam giác vuông EDK .
- d) Vẽ phân giác trong DM của tam giác DEF . Tính các độ dài các đoạn thẳng ME, MF .
- e) Tính $\sin F$ trong các tam giác vuông DFK và DEF . Từ đó suy ra $ED \cdot DF = DK \cdot EF$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 6\text{cm}$.

- a) Tính độ dài các cạnh AB, AC .
- b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$
- c) Dường thẳng song song với phân giác góc \widehat{CBD} kẻ từ A cắt CD tại H . Chứng minh
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

Bài 9. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm E tùy ý trên cạnh BC . Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt CD kéo dài tại F . Kẻ trung tuyến AI của tam giác AEF và kéo dài cắt cạnh CD tại K .

- a) Chứng minh $AE = AF$.
- b) Chứng minh các tam giác AKF, CAF đồng dạng và $AF^2 = KF \cdot CF$

c) Cho $AB = 4\text{cm}$; $BE = \frac{3}{4}BC$. Tính diện tích tam giác AEF .

d) AE kéo dài cắt CD tại J . Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AJ^2}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm E .

Bài 10. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn :

a) $\sin 24^\circ, \cos 35^\circ, \sin 54^\circ, \cos 70^\circ, \sin 78^\circ$.

b) $\cot 24^\circ, \tan 16^\circ, \cot 57^\circ 67', \sin 78^\circ$.

Bài 11. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 40^\circ, \cos 28^\circ, \sin 65^\circ, \cos 88^\circ, \cos 20^\circ$

b) $\tan 32^\circ 48', \cot 28^\circ 36', \tan 56^\circ 32', \cot 67^\circ 18'$.

Bài 12. Cho góc α nhọn.

a) Tính $\sin \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$ biết $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

b) Tính $\cos \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

c) Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$.

d) Cho $\cot \alpha = 3$. Tính $\sin \alpha, \cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

Bài 13. Một cột cờ cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m . Tính góc α mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (làm tròn đến phút).

Bài 14. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $6,5\text{m}$, các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 44° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 15.

a) Tính giá trị biểu thức $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

Bài 16. Cho $0^\circ < x < 90^\circ$. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$.

Bài 17. Cho $0^\circ < x < 90^\circ$. Chứng minh các đẳng thức sau :

$$\text{a) } \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\text{b) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\text{c) } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI
CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC VUÔNG

VẤN ĐỀ 1.

Bài 1. Hình 1: $x = 3,6; y = 6,4;$

Hình 2: $x = 7,2; y = 12,8;$

Hình 3: $x = \frac{35\sqrt{74}}{74}; y = \sqrt{74}.$

Bài 2. a) $BH = 1,8; CH = 3,2;$

c) $AB = 5cm; BC = 13cm;$

$$BH = \frac{25}{13}cm; CH = \frac{144}{13}cm.$$

Bài 7. $BH = 50cm; CH = 72cm.$

Bài 8. $BH = 9cm; CH = 16cm.$

Bài 9. $BH = \frac{32}{17}cm; CH = \frac{225}{34}cm.$

Bài 10. a) $AB = 7,5cm;$
 $AC = 10cm; BC = 12,5cm; HC = 8cm.$

b) $AH = 3\sqrt{3}cm;$
 $AC = 6\sqrt{3}cm; CH = 9cm.$

Bài 11. $S = 150cm^2.$

Bài 12. a) $AH = 3,6cm.$

b) $BH = 4,8cm; CH = 2,7cm.$

Bài 13. Đường cao : $6,72$; Độ dài hai đoạn
chia cạnh huyền : $1,96 ; 23,04.$

Bài 14. $HB = \frac{75}{7}cm; CH = 21cm.$

Bài 15. $AB = 9cm; BC = 20cm; BD = 15cm.$

Bài 5. a) $BD = 17$; b) $AH = \frac{120}{7}$;

$$AH = 2,4; BC = 5;$$

b) $AB = 15; AC = 20; BC = 25; AH = 12.$

Bài 3. $BH = 5,4; HC = 9,6.$

Bài 4. $BH = 4,5; CH = 8.$

Bài 5. $x = \sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}.$

Bài 6. a) $BH = 1,8cm; CH = 3,2cm;$

$$AH = 2,4cm; AC = 4cm;$$

b) $AB = 65cm; AC = 156cm;$

$$BC = 169cm; BH = 25cm;$$

VẤN ĐỀ 2

Bài 1. a) $CD.CM = CE.CN (= CH^2) ;$

b) $\triangle CMN \sim \triangle CDE$ (c.g.c) vì

\hat{C} chung và $\frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CD}.$

Bài 2. a) $\triangle ADI = \triangle CDL$ (g.c.g)

$\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \triangle DIL$ là tam giác cân ;

$$b) \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$$

Bài 3. a) $AB^2 + CH^2 = (BH^2 + AH^2)$

$$+ CH^2 = BH^2 + (AH^2 + CH^2)$$

$$= BH^2 + AC^2 ;$$

b) Làm tương tự câu a) bài 1, có
 $AM.AB = AN.AC (= AH^2).$

Bài 4. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{4}{BD} \Rightarrow đpcm.$

c) $\triangle BHI \sim \triangle IKC$ (g.g)

$$\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{IKC}.$$

$$\Rightarrow \Delta HKD \sim \Delta HBI \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{HK}{HB} = \frac{HD}{HI}$$

$$\Leftrightarrow HK.HI = HD.DB = AH^2.$$

$$= \left(\frac{AB^2}{BC} : \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$= \left(\frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^3$$

Bài 6. a) $OB = 9 \text{ (cm)}; OD = 16 \text{ (cm)}$

b) $OA = 12; AC = \frac{100}{3};$

c) $S_{ABCD} = \frac{1250}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$

b) $BC.BE.CF = BC \cdot \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC}$
 $= \frac{BC}{AB.AC} \cdot (HB.HC)^2$

$$= \frac{1}{AH} \cdot AH^4 = AH^3$$

Bài 7. a) $\frac{FB}{FC} = \frac{HB^2}{AB} : \frac{HC^2}{AC}$

Bài 8. a) AH là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow BD = 2AH.$

b) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \sqrt[3]{\frac{BD^2}{CE^2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left(\frac{BC}{AC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{BC}{CE} = \left(\frac{BC}{AC} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AC}{BC} \right)^3 = \frac{CE}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \widehat{ABC} = \frac{CE.AC}{AC^2} = \frac{HC^2}{AC^2}$$

$$= \cos^2 \widehat{ACB} \text{ (đpcm)}$$

VẤN ĐỀ 3

Bài 1. a) $DE = 6\text{cm}$; b) Chứng minh M là trung điểm BH , N là trung điểm CH ; c) $S = 19,5\text{cm}^2.$

Bài 2. a) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB.BC}{HC.BC} = \frac{HB}{BC}$

b) $\frac{ED}{EC} = \frac{HB^2}{AB} : \frac{HC^2}{AC}$

$$= \left(\frac{AB^2}{BC} : \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$= \left(\frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^3$$

c) $BE.CF.BC = \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} \cdot BC$

$$= (HB.HC)^2 \cdot \frac{BC}{AB.AC}$$

$$= AH^4 \cdot \frac{1}{AH} = AH^3 = DE^3;$$

d) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$

Bài 3. a) $BH = 3,6\text{cm}; CH = 6\text{cm};$
 $AH = 4,8\text{cm}; BC = 10\text{cm}.$

b) $BH = 3,6\text{cm}; CH = 6,4\text{cm};$
 $AH = 4,8\text{cm}; AC = 8\text{cm}.$

Bài 4. Cạnh huyền : 100 cm ; Các cạnh góc vuông : 60 cm và $80\text{ cm}.$

Bài 5. $HB = 22,4\text{cm}; HC = 12,6\text{cm}.$

Bài 6. $S = \frac{34560}{169} \approx 204,5 \text{ cm}^2$.

Bài 7. a) $AB = 4 \text{ cm}$; $AB = 2\sqrt{5} \text{ cm}$;
 $AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}$; $BC = 10 \text{ cm}$.

b) $AB = \frac{5\sqrt{281}}{16} \text{ cm}$; $AC = \sqrt{281} \text{ cm}$;

$BC = \frac{281}{16} \text{ cm}$; $BH = \frac{25}{16} \text{ cm}$.

Bài 8. $BH = 9 \text{ cm}$; $BH = 16 \text{ cm}$.

Bài 9. Tương tự Bài 3.

Bài 10. $P = 35 + 21\sqrt{5} \approx 81,95 \text{ (cm)}$.

Bài 11. $S = 1500 \text{ cm}^2$.

VẤN ĐỀ 4

Bài 1. $\sin B = \frac{3}{5}$; $OK = \sqrt{41}$; $OH = 3$.

Bài 2. a) $\sin B = \frac{12}{13} \approx 0,9231$;

$\sin C = \frac{5}{13} \approx 0,3846$.

b) $\sin B = \sqrt{\frac{4}{7}} \approx 0,7559$;

$\sin C = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,6547$.

Bài 3. a) Vì $OK = 2\sqrt{2}$.

b) $\sin B = \cos A = \frac{\sqrt{10}}{5}$;

$\cos B = \sin A = \frac{\sqrt{15}}{5}$;

$\tan B = \cot A = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

$\cot B = \tan A = \frac{3}{\sqrt{6}}$.

Bài 12. a) $BC = 6 \text{ cm}$; $CK = 4,8 \text{ cm}$;
 $BK = 3,6 \text{ cm}$; $AK = 6,4 \text{ cm}$.

b) $CB \cdot CH = CK^2 = CA \cdot CI$.

c) $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{KI^2}$
 $= \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$.

d) $\frac{AI}{BH} = \frac{KA^2}{AC} : \frac{KB^2}{BC}$
 $= \left(\frac{AC^2}{AB} : \frac{BC^2}{AB} \right) \cdot \frac{BC}{AC}$
 $= \left(\frac{AC}{BC} \right)^4 \cdot \frac{BC}{AC} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^3$.

Bài 4. $\cos C = 0,8$; $\sin C = 0,6$; $\cot C = \frac{4}{3}$;
 $\tan C = \frac{3}{4}$.

Bài 5. $AC = 8$; $BC = \sqrt{89}$.

Bài 6. $\sin B = \cos C = \frac{3}{5}$;

$\cos B = \sin A = \frac{4}{5}$;

$\tan B = \cot C = \frac{3}{4}$;

$\cot B = \tan C = \frac{4}{3}$.

Bài 7. a) Vì $HN = \frac{18\sqrt{13}}{13}$

b) $\sin B = \cos C = \frac{\sqrt{10}}{5}$;

$\cos B = \sin C = \frac{\sqrt{15}}{5}$;

$\tan B = \cot C = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

$$\cot B = \tan C = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Bài 8. $\cos C = 0,8$; $\sin C = 0,6$; $\cot C = \frac{4}{3}$;

$$\tan C = \frac{3}{4}.$$

Bài 9. $AC = \frac{5}{2}$; $BC = \frac{13}{2}$.

Bài 10. $O \in Ay$.

Bài 13. a) $AC = 9$; $BC = 15$.

$$AN = BM.$$

c) $\Delta MAB \simeq \Delta ACB$ (g.g).

VẤN ĐỀ 5

Bài 1. a) $\sin 20^\circ < \sin 70^\circ$;

b) $\cos 60^\circ > \cos 70^\circ$;

c) $\tan 73^\circ 20' > \tan 45^\circ$;

d) $\cot 20^\circ > \cot 37^\circ 40'$.

Bài 11. $AC = 72$; $BC = 12\sqrt{61}$.

Bài 12. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\tan \alpha = 2\sqrt{6}$;

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b) $ANBM$ là hình chữ nhật vì $AN \parallel BM$;

Bài 2. a) $\cot 71^{\circ}(= \tan 19^{\circ})$

$$< \cot 69^{\circ}15'(= \tan 20^{\circ}85')$$
$$< \tan 28^{\circ} < \tan 38^{\circ} < \tan 42^{\circ};$$

b) $\cos 79^{\circ}13' = \sin 10^{\circ}87'$

$$< \sin 32^{\circ} < \sin 36^{\circ}$$
$$< \cos 51^{\circ} = \sin 39^{\circ}.$$

Bài 3. a) $\sin 40^{\circ} < \sin 70^{\circ};$

b) $\cos 80^{\circ} < \cos 50^{\circ};$

c) $\tan 73^{\circ}20' > \tan 65^{\circ};$

d) $\cot 53^{\circ} < \cot 37^{\circ}40'.$

Bài 4. a) $\cot 79^{\circ}15' = \tan 10^{\circ}85'$

$$< \tan 12^{\circ} < \tan 28^{\circ}$$
$$< \cot 61^{\circ}(= \tan 29^{\circ}) < \tan 58^{\circ};$$

b) $\cos 85^{\circ} < \cos 67^{\circ}(= \sin 23^{\circ})$

$$< \cos 63^{\circ}41'(= \sin 26^{\circ}59')$$
$$< \sin 56^{\circ} < \sin 74^{\circ}.$$

Bài 5. Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 3, cạnh huyền là 5, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc α ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 4, cạnh huyền là 7, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là α ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 3 là góc α ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 5 và 6, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 6 là góc α .

Bài 6. Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc α ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 5, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là góc α ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 3 là góc α ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 5 là góc α .

Bài 7. $BC = 32,5\text{cm}; AC = 12,5\text{cm}$

Bài 8. a) $\sin B = \frac{12}{13}; \sin C = \frac{5}{13}$

b) $\sin B = \frac{2}{\sqrt{7}}; \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Bài 9. Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 1, cạnh huyền là 2, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc α ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là góc α ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 4 là góc α ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 4, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 4 là góc α .

Bài 10.a) $\cos 62^{\circ}(= \sin 28^{\circ}) < \sin 34^{\circ}$

$$< \sin 35^{\circ} < \sin 45^{\circ}$$
$$< \cos 28^{\circ}(= \sin 62^{\circ});$$

b) $\cos 65^{\circ}30'(= \sin 24^{\circ}70')$

$$< \cos 59^{\circ}(= \sin 31^{\circ})$$
$$< \sin 47^{\circ} < \cos 37^{\circ}(= \sin 53^{\circ})$$
$$< \sin 72^{\circ}.$$

Bài 11. a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 12. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}},$

$$\cot \alpha = 2\sqrt{6}.$$

Bài 13. Tương tự Bài 14. Vấn đề 4.

Bài 14. a) $A = 3$; b) $B = 2,5$.

Bài 15. Góc 2α là góc AMH

a)

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{BC} \\ &= 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 + \cos 2\alpha &= 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} \\ &= 2 \frac{HC}{BC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2} = 2 \cos^2 \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 - \cos 2\alpha &= 1 - \frac{HM}{AM} = \frac{HB}{AM} \\ &= 2 \frac{HB}{BC} = 2 \frac{AB^2}{BC^2} = 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 6.

Bài 1. a) $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$; $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

b) $b = 20 \cdot \sin 35^\circ \approx 11,48$;

$c = 20 \cdot \cos 35^\circ \approx 16,38$.

Bài 2. a) $c = \sqrt{115}$; $\sin B = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 48,2^\circ$.

b) $a = \sqrt{193}$; $\tan B = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 30,3^\circ$.

Bài 3. a) $a = 35$; $\hat{B} \approx 53,1^\circ$; $\hat{C} \approx 36,9^\circ$;

b) $c = 8$; $\hat{B} \approx 41,8^\circ$; $\hat{C} \approx 48,2^\circ$.

Bài 4. a) $b \approx 2,95$; $a \approx 4,69$; $\hat{C} = 49^\circ$.

b) $c \approx 9,53$; $b = 5,5$; $\hat{B} = 30^\circ$.

Bài 5. $AN \approx 3,65\text{cm}$; $AC \approx 7,3\text{cm}$.

Bài 6. a) $CH = 3\sqrt{3}\text{cm}$;

$AC = 3\sqrt{3}$; $\sin 80^\circ \approx 5,28\text{cm}$.

b) $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6,92 \approx 17,98\text{cm}^2$.

Bài 7. $S \approx 5,09\text{cm}^2$.

Bài 8. $S = 7,66\text{cm}^2$.

Bài 9. a) $c \approx 3,12$; $a \approx 6,24$; $\hat{B} = 60^\circ$.

b) $a = 10\sqrt{2}$.

Bài 10. a) $c = \sqrt{115}$; $\sin B = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ \Rightarrow \hat{C} = 48,2^\circ$.

b) $a = \sqrt{193}$; $\tan B = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 30,3^\circ$.

Bài 11. a) $a \approx 5,14\text{cm}$; $b \approx 6,13\text{cm}$;

$\hat{C} = 50^\circ$. b) $\hat{A} = 62^\circ$; $a \approx 9,4\text{cm}$;

$\hat{A} = 61,93^\circ$; $\hat{C} = 28,07^\circ$.

Bài 12. $S \approx 509,08\text{cm}^2$.

Bài 13. $S = \frac{24 + 9\sqrt{3}}{2} \text{cm}^3$.

Bài 14. a) $AB = 15\text{cm}$; $AC = 20\text{cm}$;

$BC = 25\text{cm}$; $AH = 12\text{cm}$;

b) $ADHE$ là hình chữ nhật;

c) $S = 69,12\text{cm}^2$; $P = 33,6\text{cm}$.

Bài 15. a) $AC = 4\text{cm}$; $\hat{B} = 53,13^\circ$;

$\hat{C} = 36,87^\circ$;

b) $AD = 2,25\text{cm}$; $BD = 3,75\text{cm}$;

c) $BF \cdot BD = BA^2 = BE \cdot BC$.

VẤN ĐỀ 7

Bài 1. Chiều cao $\approx 6,75 m$.

Bài 2. Độ dài $= \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,5 m$.

Bài 3. Chiều cao $= 5 \cdot \tan 50^\circ \approx 5,96 m$.

Bài 4. $\widehat{BCA} \approx 59^\circ 44'$.

Bài 5. a) $AE \cdot AC = AH^2 = AD \cdot AB$
 $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED$ (c-g-c);

b) $DE = 3 cm$.

c) $\widehat{ABC} = 56^\circ$;

d) $S_{ADE} = \frac{54}{13} cm^2$.

Bài 6. a) Vì $EF = CG = \frac{1}{2} AB$;

$EF \parallel CG \parallel AB$;

b) $CF \perp BE$ mà $EG \parallel CF$

$\Rightarrow EG \perp BE \Rightarrow \widehat{BEG} = 90^\circ$.

c) $S_{ABCD} = \frac{h^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$;

d) $AC = \frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

Bài 7. $BD = \frac{21}{\cos 22,5^\circ} \approx 22,73 cm$.

Bài 8. a) $AB = 5 cm$; $AC = 5\sqrt{3} cm$.

b) $AMBN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \widehat{NMB}$

$\Rightarrow MN \parallel BC$ (so le trong)

$AMBN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN = AB = \frac{1}{2} BC$.

c) $\widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$= 30^\circ = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta ABC$ (g-g)

Tỉ số đồng dạng : $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$.

Bài 9. Tương tự Bài 5.

Bài 10. a) Giả sử tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$,
 kẻ đường cao BH .

Ta có : $BH = AB \cdot \sin \widehat{A}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A}$.

b) $ABCD$ là hình bình hành

có $\widehat{A} < 90^\circ$, $\Delta ABD = \Delta CBD$,

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{A}$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3

Bài 1. a) $BC = 3\sqrt{13}cm$;

$$AH = \frac{18\sqrt{13}}{13}cm ; BH = \frac{12\sqrt{13}}{13}cm ;$$

$$CH = \frac{27\sqrt{13}}{13}cm .$$

b) $BC = 25cm$; $AC = 20cm$;
 $HC = 16cm$; $AH = 12cm$.

c) $AB = 33cm$; $AH = \frac{132}{5}cm$;

$$BH = \frac{99}{5}cm ; CH = \frac{176}{5}cm .$$

Bài 2. a) Đặt $BH = 9cm$; $CH = 16cm$;
 $AB = 15cm$; $AC = 20cm$.

b) $\widehat{AMH} \approx 73,74^{\circ}$.

c) $S_{AHM} = 84cm^2$.

Bài 3.a) $CH = 6\sqrt{3}cm$;

$$AC = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 80^{\circ}} \approx 10,55cm ;$$

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6\sqrt{3}(6+1,83)$
 $\approx 40,69cm^2$.

Bài 4.a) $BC = 5cm$; $AH = \frac{12}{5}cm$

b) $\hat{B} \approx 53,13^{\circ}$; $\hat{C} \approx 36,87^{\circ}$

c) $BE = \frac{15}{7}cm$; $CE = \frac{20}{7}cm$.

Bài 5.a) $AE \cdot AB = AH^2 = AE \cdot AC$

b) $AE = \frac{9}{4}$; $BE = \frac{7}{4}$;

Bài 9. a) $\Delta ABE = \Delta ADF$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AE = AF$$

b) \hat{F} chung, $\widehat{FAK} = \widehat{FCA} = 45^{\circ}$

$$\Rightarrow \Delta AKF \sim \Delta CAF$$
 (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{KF} = \frac{CF}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = KF \cdot CF ;$$

c) $S_{\Delta AEF} = \frac{93}{2}cm^2$;

c) $FC = \frac{\sqrt{3}}{2}cm$.

Bài 6. a) i) $NF = 15cm$;

$$\widehat{MFN} \approx 48,59^{\circ} ; \widehat{MNF} = 41,41^{\circ} .$$

ii) $MO = \frac{36}{5}$; $FO = \frac{48}{5}$.

iii) $S_{FNE} = 96cm^2$.

$$\frac{S_{\Delta FOH}}{S_{\Delta FNE}} = \frac{FO}{FN} \cdot \frac{FH}{FE} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta FOH} = 34,56cm^2 .$$

b) $\Delta MFN \sim \Delta FEM$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MF}{FE} = \frac{MN}{FM} \Leftrightarrow MF^2 = MN \cdot FE$$

Bài 7. a) Vì $DE^2 + DF^2 = FE^2$

b) $DK = \frac{24}{5}cm$; $FK = \frac{32}{5}cm$.

c) $EK = \frac{18}{5}cm$; $\widehat{DKE} = 90^{\circ}$;

$$\widehat{KDE} \approx 36^{\circ}52' ; \widehat{KED} = 53^{\circ}8'$$

d) $ME = \frac{30}{7}cm$; $MF = \frac{40}{7}cm$.

e) $\sin \widehat{DFK} = \frac{DK}{DF}$, $\sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{EF}$

$$\Rightarrow \frac{DK}{DF} = \frac{DE}{EF} \Leftrightarrow DE \cdot DF = DK \cdot EF .$$

Bài 8.a) $AB = 3cm$; $AC = 6\sqrt{3}cm$.

b) $\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC} = \cos \widehat{ABC}$

$$= \cos 60^{\circ} = \cos \widehat{ACD} = \frac{AC}{CD} ;$$

c) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

Bài 12. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$;

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}} ; \cot \alpha = \sqrt{24}$$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

$$\begin{aligned} \text{d) } AE = AF &\Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} \\ &= \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AD^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Bài 10. a) $\cos 70^\circ (= \sin 20^\circ)$
 $< \sin 24^\circ < \sin 54^\circ$
 $< \cos 35^\circ (= \sin 55^\circ) < \sin 78^\circ;$
 b) $\tan 16^\circ (= \cot 74^\circ)$
 $< \cot 57^\circ 67' < \cot 30^\circ$
 $< \cot 24^\circ < \tan 80^\circ (= \cot 10^\circ).$

Bài 11. a) $\cos 20^\circ < \sin 65^\circ$
 $(= \cos 25^\circ) < \cos 28^\circ$
 $< \sin 40^\circ (= \cos 50^\circ) < \cos 88^\circ.$
 b) $\cot 67^\circ 18' (= \tan 22^\circ 42')$
 $< \cot 28^\circ 36' (= \tan 61^\circ 24')$
 $< \tan 32^\circ 48' < \tan 56^\circ 32'$

Bài 17. a) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
 $\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$
 $\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

b) $VT = \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{\sin x(1 + \cos x)}$
 $= \frac{2 + 2\cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = VP;$

c) Biến đổi tương đương tương tự câu a.

CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN VẤN ĐỀ 1.

Bài 1. a) Gọi O là trung điểm của BC
 $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn đi qua

$$\begin{aligned} \text{c) } \cot \alpha &= \frac{1}{2}; \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}; \\ \sin \alpha &= \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \tan \alpha &= \frac{1}{3}; \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}; \\ \cos \alpha &= \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Bài 13. $\tan \alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 15'.$

Bài 14. 6,28cm.

Bài 15. a) $A = 2.$

b) $B = 3 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha.$

Bài 16. a) $\sin^4 x + \cos^4 x$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x;$
 b) $\sin^6 x + \cos^6 x$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3$
 $- 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$
 $= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$
 c) $\sin^4 x - \cos^4 x$
 $= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$
 $= 1 - 2 \cos^2 x.$

Bài 4. MNPQ là hình chữ nhật tâm O
 $\Rightarrow M, N, P, Q$ cùng thuộc (O; OM).

Bài 5. Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của MA, MB, MC, MD.
 Chứng minh tứ giác EFPQ có hai góc đối có tổng bằng 180° .
 $\Rightarrow E, F, P, Q$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. Trong hình thoi, đường chéo này là Trung trực của đường chéo kia. Do đó, điểm E là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC. Nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Tương tự, F là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABD .

Bài 7. a) Ta có: $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AD.

A, B, C ;

b) $OA = OB = OC \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

Bài 2. Gọi O là trung điểm BC .

Chứng minh: B, C, D, E nằm

trên $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$.

Bài 3. a) $IFEK$ là hình bình hành tâm O có:

$CH \perp IK, KE // CH$

$\Rightarrow IK \perp KE \Rightarrow IFEK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow I, F, E, K$ cùng thuộc $(O; OI)$.

b) Chứng minh $KD \perp DF$

$\Rightarrow \Delta KDF$ vuông.

Chứng minh $\widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính $AD \Rightarrow B, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AD ;

b) $AD = 10cm$.

Bài 8. a) Gọi O là trung điểm BC .

Mà $D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right)$

$\Rightarrow OB = OC = OD$

$\Rightarrow \Delta BDC$ vuông tại D .

$\Rightarrow CD \perp AB$. Tương tự $\Rightarrow BE \perp AC$;

b) Xét ΔABC có K là trực tâm

$\Rightarrow AK \perp BC$.