

MỤC LỤC

PHẦN I	PHẦN MỞ ĐẦU	Trang
I.1	LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	Trang 2
I.2	MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU	Trang 2
I.3	ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU	Trang 3
I.4	PHẠM VI NGHIÊN CỨU	Trang 3
I.5	PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	Trang 3
PHẦN II	NỘI DUNG ĐỀ TÀI	
II.1	CƠ SỞ LÝ LUẬN	Trang 4-5
II. 2	THỰC TRẠNG CỦA ĐỀ TÀI	Trang 5-6
II.3	MỘT SỐ GIẢI PHÁP	Trang 7
	Giải pháp 1	Trang 7
	Giải pháp 2	Trang 10
	Giải pháp 3	Trang 11
	Giải pháp 4	Trang 16
	Giải pháp 5	Trang 17
PHẦN III	KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ	Trang 21
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	Trang 22

PHẦN I: MỞ ĐẦU

I.1) LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

+ Trong thực tế quá trình giảng dạy ở trường THPT, đặc biệt là quá trình ôn tập để các em học sinh chuẩn bị bước vào kỳ thi THPT Quốc Gia, tôi thấy đa số các em học sinh gần như không làm tốt được bài thi về phương trình vô tỉ. Đây là một điều rất đáng tiếc vì phần này sẽ giúp các em có thêm 1 điểm trong bài thi môn toán. Và điều tất yếu là không chỉ ảnh hưởng đến kết quả đậu - trượt của học sinh mà còn ảnh hưởng tới tương lai của các em và của gia đình các em.

+ Trong chương trình giáo dục phổ thông nói chung và trong các kỳ thi chính thức của các trường THPT và của Bộ Giáo Dục về môn Toán tôi thấy phần phương trình vô tỉ rất hay có trong đề thi, do vậy đây cũng là một vấn đề rất đáng quan tâm và chú ý.

+ Trong chương trình toán THPT, mà cụ thể là phân môn Đại số 10, các em học sinh đã được tiếp cận với phương trình chứa ẩn dưới dấu căn và được biết một vài cách giải thông thường đối với những bài toán cơ bản đơn giản. Tuy nhiên trong thực tế các bài toán giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn rất phong phú và đa dạng và đặc biệt là trong các đề thi Đại học - Cao đẳng -THCN, các em sẽ gặp một lớp các bài toán về phương trình vô tỉ mà chỉ có số ít các em biết phương pháp giải nhưng trình bày chưa được gọn gàng, sáng sủa thậm chí còn mắc một số sai lầm không đáng có trong khi trình bày. Tại sao lại như vậy?

- Lý do chính ở đây là: Trong SGK Đại số lớp 10 nâng cao hiện hành được trình bày ở phần cuối chương IV (trang 148) rất là ít và hạn hẹp chỉ có một tiết lý thuyết giới thiệu sơ lược 1 ví dụ và 5 bài tập đơn giản. Đặc biệt là trong chương trình chuẩn lớp 10 lại càng đơn giản. Mặt khác do số tiết phân phối chương trình cho phần này quá ít nên trong quá trình giảng dạy, các giáo viên không thể đưa ra đưa ra được nhiều bài tập cho nhiều dạng để hình thành kỹ năng giải cho học sinh. Nhưng trong thực tế, để biến đổi và giải chính xác phương trình chứa ẩn dưới dấu căn đòi hỏi học sinh phải nắm vững nhiều kiến thức, phải có tư duy ở mức độ cao và phải có năng lực biến đổi toán học nhanh nhẹn thuần thục.

+ Từ những thực tế nêu trên nên tôi lựa chọn vấn đề này mong muốn phần nào giúp học sinh có kiến thức và tự tin giải quyết tốt vấn đề về phương trình vô tỉ trong các kỳ thi THPT Quốc Gia về môn toán.

I.2) MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU.

- Giúp học sinh nắm vững và có kỹ năng tốt trong giải việc phương trình vô tỉ và để các em có thêm 1 điểm trong bài thi môn toán trong kỳ thi THPT Quốc Gia.

- Nhằm nâng cao nghiệp vụ chuyên môn và rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy

- Qua nội dung của đề tài này tôi mong muốn sẽ cung cấp cho học sinh một số phương pháp tổng quát và một số kỹ năng cơ bản và phát hiện được đâu là điều kiện cần và đủ. Học sinh thông hiểu và trình bày bài toán đúng trình tự, đúng logic,

không mắc sai lầm khi biến đổi. Hy vọng với đề tài nhỏ này sẽ giúp các bạn đồng nghiệp cùng các em học sinh có một cái nhìn toàn diện cũng như phương pháp giải một lớp các bài toán về giải phương trình vô tỉ.

I.3) ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU :

- Phương trình vô tỉ (*Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn*).
- Học sinh hai lớp 10E, 10D
- Từ lý do chọn đề tài, từ cơ sở thực tiễn giảng dạy khối lớp 10 và ôn thi THPT Quốc Gia ở trường THPT, cùng với kinh nghiệm trong thời gian giảng dạy. Tôi đã tổng hợp, khai thác và hệ thống hoá lại các kiến thức thành một chuyên đề: **“Rèn luyện kỹ năng giải phương trình vô tỉ và một số giải pháp giúp học sinh khắc phục sai lầm trong giải phương trình vô tỉ ”**.

I.4) PHẠM VI NGHIÊN CỨU :

- Nội dung phần phương trình vô tỉ và một số bài toán cơ bản, nâng cao nằm trong chương trình đại số 10.
- Một số bài giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn trong các tài liệu tham khảo và trong các đề thi Đại học - Cao đẳng - TCCN và đề thi THPT Quốc Gia của Bộ Giáo Dục.

I.5) PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

Phương pháp:

- Nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết.
- Khảo sát điều tra từ thực tế dạy và học .
- Tổng hợp so sánh, đúc rút kinh nghiệm.

Cách thực hiện:

- Tham khảo các tài liệu.
- Trao đổi với đồng nghiệp, tham khảo ý kiến giáo viên cùng bộ môn.
- Liên hệ thực tế trong nhà trường, áp dụng đúc rút kinh nghiệm qua quá trình giảng dạy.
- Thông qua việc giảng dạy trực tiếp ở các lớp khối 10 và các lớp ôn thi THPT Quốc Gia.
- Tham gia đầy đủ các buổi sinh hoạt tổ, nhóm chuyên môn.

PHẦN II: NỘI DUNG ĐỀ TÀI

II.1) CƠ SỞ LÝ LUẬN

- Nhiệm vụ trung tâm trong trường học THPT là hoạt động dạy của thầy và hoạt động học của trò, xuất phát từ mục tiêu đào tạo ***“Nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực, bồi dưỡng nhân tài”***. Giúp học sinh củng cố những kiến thức phổ thông đặc biệt là bộ môn toán học rất cần thiết và không thể thiếu trong đời sống của con người. Môn Toán là một môn học tự nhiên quan trọng và khó với kiến thức rộng, đa phần các em ngại học môn này.

- Muốn học tốt môn toán các em phải nắm vững những kiến thức cơ bản của môn toán một cách có hệ thống, biết vận dụng lý thuyết linh hoạt vào từng dạng bài tập. Điều đó thể hiện ở việc học đi đôi với hành, đòi hỏi học sinh phải có tư duy logic và cách biến đổi. Giáo viên cần định hướng cho học sinh học và nghiên cứu môn toán học một cách có hệ thống trong chương trình học phổ thông, vận dụng lý thuyết vào làm bài tập, phân dạng các bài tập rồi tổng hợp các cách giải.

- Do vậy, tôi mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm này với mục đích giúp cho học sinh THPT vận dụng và tìm ra phương pháp giải khi gặp các bài toán giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

Trong sách giáo khoa Đại số 10 chỉ nêu phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ và trình bày phương pháp giải bằng cách biến đổi hệ quả, trước khi giải chỉ đặt điều kiện $f(x) \geq 0$. Nhưng chúng ta nên để ý rằng đây chỉ là điều kiện đủ để thực hiện được phép biến đổi cho nên trong quá trình giải học sinh dễ mắc sai lầm khi lấy nghiệm và loại bỏ nghiệm ngoại lai vì nhầm tưởng điều kiện $f(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ của phương trình.

Tuy nhiên khi gặp bài toán giải phương trình vô tỉ, có nhiều bài toán đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng kết hợp nhiều kiến thức kỹ năng phân tích biến đổi để đưa phương trình từ dạng phức tạp về dạng đơn giản.

Trong giới hạn của SKKN tôi đề cập đến một số giải pháp cụ thể như sau:

Giải pháp 1:

**** Hướng dẫn học sinh sử dụng biến đổi phương trình dạng: $\sqrt{f(x)} = g(x)$***

Giải pháp 2

**** Hướng dẫn học sinh sử dụng biến đổi phương trình dạng: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$***

Giải pháp 3:

**** Hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.***

Giải pháp 4:

**** Hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp xuất hiện biểu thức liên hợp***

Giải pháp 5 :**** Hướng dẫn học sinh giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp đánh giá*****II.2) THỰC TRẠNG CỦA ĐỀ TÀI**

Học sinh trường THPT Hà Trung bên cạnh những học sinh có nhận thức tốt cũng còn không ít học sinh nhận thức còn chậm, chưa hệ thống được kiến thức. Khi gặp các bài toán về phương trình vô tỉ chưa phân loại và định hình được cách giải, lúng túng khi đặt điều kiện và biến đổi, trong khi đó phương trình loại này có rất nhiều dạng. Nhưng bên cạnh đó chương trình đại số 10 không nêu cách giải tổng quát cho từng dạng, thời lượng dành cho phần này là rất ít.

Khi giảng dạy cho học sinh tôi nhận thấy:***1. Khi gặp bài toán:***Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} = x-2$ (1)

(Ví dụ 2 trang 60 Đại số 10 Chương trình chuẩn)

Sách giáo khoa đại số 10 đã giải như sau:

Điều kiện $PT(1)$ là $x \geq \frac{3}{2}$ (*)Khi đó: Từ $PT(1) \Rightarrow 2x-3 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$ Phương trình cuối có nghiệm là $x = 3 + \sqrt{2}$ và $x = 3 - \sqrt{2}$.Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện (*) của phương trình (1) nhưng khi thay các giá trị của các nghiệm tìm được vào phương trình (1) thì giá trị $x = 3 - \sqrt{2}$ bị loại.Vậy nghiệm phương trình (1) là $x = 3 + \sqrt{2}$.

Mặt khác, một số học sinh còn có ý kiến sau khi giải được nghiệm ở phương trình cuối chỉ cần so sánh với điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$ (*) để lấy nghiệm và nghiệm phương trình là $x = 3 + \sqrt{2}$ và $x = 3 - \sqrt{2}$.

Theo tôi cách giải vừa nêu trên rất phức tạp ở việc thay giá trị của nghiệm vào phương trình ban đầu để thử sau đó loại bỏ nghiệm ngoại lai và dễ dẫn đến sai lầm của một số học sinh khi lấy nghiệm cuối cùng vì nhầm tưởng điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$ là điều kiện cần và đủ.

2. Khi gặp bài toán:Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = \sqrt{4x - 1}$

Học sinh thường đặt điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \end{cases}$ sau đó bình phương hai vế để giải

phương trình.

Điều chú ý ở đây là học sinh cứ tìm cách để biểu thị hệ điều kiện của phương trình mà không biết rằng chỉ cần điều kiện $4x - 1 \geq 0$ là điều kiện cần và đủ mà không cần đặt đồng thời cả hai điều kiện.

3. Khi gặp bài toán:

Giải phương trình $(x + 6)\sqrt{x - 2} = 0$
 Một số HS đã có lời giải sai như sau:

$$\text{Ta có: } (x + 6)\sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 0 \\ \sqrt{x - 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Nhận xét:

Đây là một bài toán hết sức đơn giản nhưng nếu giải như vậy thì đã mắc một sai lầm mà không đáng có. Rõ ràng $x = -6$ không phải là nghiệm của phương trình

trên. Chú ý rằng: $A\sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = 0 \\ \sqrt{B} = 0 \end{cases}$ ở đây đã bị bỏ qua mất điều kiện là: $B \geq 0$

($x \geq 2$).

4. Khi gặp bài toán:

Giải phương trình : $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$:

Một số học sinh thường đặt điều kiện rồi bình phương hai vế đi đến một phương trình bậc bốn và rất khó để giải được kết quả cuối cùng vì phương trình bậc bốn chưa có cách giải cụ thể đối với học sinh bậc phổ thông.

5. Khi gặp bài toán: Giải phương trình $(x + 5)\sqrt{\frac{x - 2}{x + 5}} = x + 2$

Một số HS đã có lời giải sai như sau:

$$\text{Ta có: } (x + 5)\sqrt{\frac{x - 2}{x + 5}} = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 5)(x - 2)} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ (x + 5)(x - 2) = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 3x - 10 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x - 4x = 4 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = -14 \end{cases} \quad \text{Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.}$$

Nhận xét:

Rõ ràng $x = -14$ là nghiệm của phương trình. Lời giải trên đã làm cho bài toán có nghiệm trở thành vô nghiệm.

$$\text{Cần chú ý rằng: } B\sqrt{\frac{A}{B}} = \begin{cases} \sqrt{AB} & \text{khi } A \geq 0; B > 0 \\ -\sqrt{AB} & \text{khi } A < 0; B < 0 \end{cases}$$

Lời giải trên đã xét thiếu trường hợp $A < 0; B < 0$

Lúc này vai trò của người giáo viên là rất quan trọng, phải hướng dẫn chỉ rõ cho học sinh phương pháp giải từng dạng toán, nên giải như thế nào cho hợp lý đối với từng loại toán để được một bài toán đúng biến đổi đúng và suy luận có logic tránh được các tình huống rườm rà phức tạp dễ mắc sai lầm. Trên cơ sở đó hình thành cho học sinh kỹ năng tốt khi giải quyết các bài toán về phương trình vô tỉ.

II.3) MỘT SỐ GIẢI PHÁP

Qua nghiên cứu trao đổi và đúc rút kinh nghiệm từ thực tế và ý kiến của đồng nghiệp tôi mạnh dạn đưa ra hướng giải quyết các vấn đề trên của học sinh với những giải pháp cụ thể giúp học sinh khắc phục những sai lầm trên và qua đó rèn luyện kỹ năng khi biến đổi và giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

1/ Giải pháp 1:

* **Hướng dẫn học sinh sử dụng phép biến đổi phương trình dạng:** $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Phương pháp:

Giáo viên: Chỉ cho học sinh thấy được rằng nếu khi bình phương hai vế để đi đến phương trình tương đương thì hai vế đó phải không âm.

$$\text{Nên phương trình : } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Điều kiện $g(x) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ vì $f(x) = g^2(x) \geq 0$. Không cần đặt thêm điều kiện $f(x) \geq 0$

Bài toán 1: Giải phương trình

$$1. \sqrt{3x-4} = x-3 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{3x^2-2x-1} = 3x+1 \quad (2)$$

Bài giải:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } \sqrt{3x-4} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3x-4 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 9x + 13 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$.

2. **Nhận xét:**

Biểu thức dưới dấu căn là biểu thức bậc hai, nên nếu sử dụng phương pháp biến đổi hệ quả sẽ gặp khó khăn khi biểu thị điều kiện để $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$ và thay giá trị của các nghiệm vào phương trình ban đầu để lấy nghiệm.

Ta có thể giải như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \sqrt{3x^2-2x-1} = 3x+1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x^2-2x-1 = (3x+1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x^2+4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = -\frac{1}{3}$.

Bài toán 2: Giải phương trình

$$1. \sqrt{x+2} + 2 = x^2 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1 \quad (2)$$

Bài giải

1. Điều kiện: $x \geq -2$, Khi đó phương trình (1) tương đương với phương trình :

$$x+2+\sqrt{x+2}+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2} \\ \sqrt{x+2}+\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}=x \\ \sqrt{x+2}=-x-1 \end{cases}$$

$$+\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=-1 \Leftrightarrow x=2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$+\sqrt{x+2}=-x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ x+2=(-x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm phương trình (1) là : $x=2, x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét:

Có thể đưa luôn phương trình (1) về dạng $\sqrt{x+2}=x^2-2$ và sử dụng phép biến đổi $\sqrt{f(x)}=g(x)$, dẫn đến phương trình bậc bốn (nhắm được nghiệm $x=-1$, và $x=2$) và tìm được các nghiệm của phương trình. Tuy nhiên với cách trình bày ở trên ta sẽ thu được hai phương trình dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ đơn giản hơn.

2. Nhận xét:

Trong phương trình (2) nếu bình phương hai vế sẽ cho ta một phương trình bậc 4 đầy đủ và không nhắm được nghiệm nên học sinh thường bế tắc. Tuy nhiên ta có thể hướng dẫn học sinh biến đổi về dạng $A^2=B^2$ từ đó sẽ có hai phương trình dễ hơn.

Giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$, Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} \text{PT(4)} &\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2 \Leftrightarrow 4x+5+2\sqrt{4x+5}+1=4x^2-8x+4 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{4x+5}+1)^2=(2x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5}+1=2x-2 \\ \sqrt{4x+5}+1=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5}=2x-3 \\ \sqrt{4x+5}=1-2x \end{cases} \end{aligned}$$

Giải hai phương trình trên và đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=1-\sqrt{2}$.

Bài toán 3: Giải phương trình

$$x^2 - 7x + 12 = \sqrt{(x-3)(x^2 - x - 6)} \quad (5)$$

Bài giải

Điều kiện : $(x-3)(x^2 - x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó PT(5)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ (x^2 - 7x + 12)^2 = (x-3)(x^2 - x - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3; x \geq 4 \\ (x-3)^2(x-4)^2 = (x-3)(x^2 - x - 6) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3; x \geq 4 \\ (x-3)(x^3 - 12x^2 + 41x - 42) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3; x \geq 4 \\ (x-3)(x-2)(x^2 - 10x + 21) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3; x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm $x = 3; x = 2; x = 7$.

Nhân xét:

Bài toán này HS có thể giải mắc sai lầm như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^2 - 7x + 12 &= \sqrt{(x-3)(x^2 - x - 6)} \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = \sqrt{(x-3)^2(x+2)} \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-4) = (x-3)\sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x-3)(x-4-\sqrt{x+2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-4-\sqrt{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x+2}=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+2=(x-4)^2 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 14 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$ và $x = 7$.

HS có thể kết luận với $x = 3$ và $x = 7$ là hai nghiệm thỏa mãn của phương trình. Mà không ngờ rằng phương trình đã cho còn có một nghiệm nữa là $x = 2$ cũng thỏa mãn.

$$\text{Chú ý rằng: } \sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} 0 & \text{khi } A = 0 \\ A\sqrt{B} & \text{khi } A > 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Lời giải trên đã bỏ sót mất trường hợp $A \leq 0$

* Như vậy khi gặp các bài toán thuộc các dạng nêu trên học sinh chủ động hơn trong cách đặt vấn đề bài giải: điều kiện phương trình là gì? đặt cái gì? biến đổi như thế nào là biến đổi tương đương? biến đổi như thế nào là biến đổi hệ quả? kết luận nghiệm cuối cùng dựa vào điều kiện nào?

2/ Giải pháp 2

* **Hướng dẫn học sinh sử dụng phép biến đổi phương trình dạng:** $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Phương pháp:

Giáo viên hướng dẫn học sinh đặt điều kiện và biến đổi

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Chú ý:

Không cần đặt đồng thời cả $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$ vì $f(x) = g(x)$ nên trong phương trình dạng (2) ta nên chọn hàm số đơn giản hơn làm điều kiện.

Bài toán 4: Giải phương trình

$$1. \sqrt{2-3x} = \sqrt{2x+1}$$

$$2. \sqrt{2x^2+3x-4} = \sqrt{7x+2}$$

Bài giải

$$1. \text{Ta có } \sqrt{2-3x} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 2-3x = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{1}{5}$.

Chú ý:

Các biểu thức trong căn bậc hai là các nhị thức bậc nhất nên ta chọn biểu thức nào làm điều kiện cũng được.

2. Nhận xét:

Biểu thức dưới dấu căn ở vế trái là biểu thức bậc hai nên ta chọn biểu thức $7x+2$ làm điều kiện.

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2+3x-4} = \sqrt{7x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+2 \geq 0 \\ 2x^2+3x-4 = 7x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{7} \\ 2x^2-4x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{7} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Bài toán 5: Giải phương trình

$$1. 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-16} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2} \quad (2)$$

Bài giải

$$1. \text{Ta có PT(1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x-1 = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chú ý: Học sinh có thể đưa ra lời giải sai như sau

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-16} \\ & \Leftrightarrow 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4(x-4)} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

phương trình đã cho có

ng nghiệm $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

Cần để ý rằng: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{A} + \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{B} = \sqrt{C} \end{cases}$

$$2. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 7 - x^2 + x\sqrt{x+5} \geq 0 \\ 3 - 2x - x^2 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) hai vế của PT (2) không âm, nên bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned} 7 - x^2 + x\sqrt{x+5} &= 3 - 2x - x^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x+5} = -2x - 4 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(2x+4) \leq 0 \\ x^2(x+5) = 4x^2 + 16x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ (x+1)(x^2 - 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện } (*) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

Chú ý: Hệ điều kiện (*) rất phức tạp nên ta không cần giải ra cụ thể.

3/ Giải pháp 3:

*** Hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ khi giải phương trình vô tỉ.**

Trước hết giáo viên cần làm cho học sinh nhận thấy mục đích của phương pháp đặt ẩn phụ là chuyển phương trình đã cho về các phương trình hoặc các hệ phương trình đã biết cách giải.

Chú ý một số dạng

Bài toán 6: Giải phương trình

$$1. 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 4x^2 - 12x + 15$$

$$2. \sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - 8x - 2} - \sqrt{x-8}$$

Bài giải :

1. **Nhận xét:** Biểu thức ngoài dấu căn là biểu thức bậc hai, nếu ta bình phương hai vế thì sẽ đi đến một phương trình bậc bốn rất khó giải. Tuy nhiên ta chú ý rằng biểu thức trong căn và biểu thức ngoài dấu căn sai khác nhau hằng số nên ta có thể giải bài toán như sau:

$$5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 4x^2 - 12x + 15 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 11 - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 4 = 0$$

Đặt $\sqrt{4x^2 - 12x + 11} = t \geq 0$; Phương trình trở thành:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn } t \geq 0)$$

+ Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 10 = 0$ phương trình vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } t = 4 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$

Chú ý:

Nếu học sinh loay hoay đi tìm điều kiện để biểu thức trong căn xác định sẽ làm bài toán phức tạp hơn và dễ tính toán sai. Từ đó giáo viên tổng quát cách dạng phương trình sau: $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$, $a \neq 0$ thì phương pháp chung là đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$

2. Điều kiện: $\begin{cases} x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 8x - 2 \geq 0 \end{cases} (*)$, Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} &= \sqrt{x^2 - 8x - 2} - \sqrt{x-8} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x^2 - 8x - 2} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-8})^2 = x^2 - 8x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 2\sqrt{x^2 - 10x + 16} + 8 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 10x + 16}$, $t \geq 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow t = 4$

$$+ \text{ Với } t = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 16} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x = 10$.

Bài toán 7: Giải phương trình

$$1. \sqrt{x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{x-x^2} = 1 \quad (1)$$

$$2. 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 11 \quad (2)$$

Bài giải :

1. Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$ (*), Đặt $t = \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{x^2 - x} = \frac{1-t^2}{2}$; $-1 \leq t \leq 1$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t - \frac{1-t^2}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(t/m) \\ t = -3(l) \end{cases}$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2(1-x) + 2\sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Đổi chiều điều kiện (*) ta có nghiệm của phương trình là $x=1$.

2. Điều kiện: $x \geq 2$ (**), Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - x - 2} = \frac{1+t^2}{2}$

Khi đó PT(2) trở thành: $2t + \frac{t^2+1}{2} = 11 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7(l) \\ t = 3(t/m) \end{cases}$

+ Với $t=3 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ tm (**) suy ra nghiệm } x=3.$$

Nhận xét: Các phương trình (1) và (2) đã giải ở ví dụ trên đều có dạng $a[\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}] + b\sqrt{f(x)g(x)} + c[f(x) \pm g(x)] + d = 0$ nên ta chọn cách đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$.

Bài toán 8: Giải phương trình

$$1. (x+1)\sqrt{x^2 - 2x+3} = x^2 + 1 \quad (1)$$

$$2. 3\sqrt{1-x^3} = 2x^2 + 4x \quad (2)$$

$$3. \sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1} \quad (3)$$

Bài giải:

1. Ta có PT(1) $\Leftrightarrow (x^2 - 2x+3) - (x-1)\sqrt{x^2 - 2x+3} + 2x - 2 = 0$; Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x+3} \geq \sqrt{2}$ khi đó ta được phương trình: $t^2 - (x-1)t + 2x - 2 = 0$ (*)

Xem PT(*) là phương trình bậc hai đối với t ; x là tham số ta có: $\Delta = (x-3)^2$ nên PT (*) có hai nghiệm $t=2$ và $t=x-1$

+ Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

+ Với $t=x-1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x+3} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 - 2x+3 = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm.}$

Vậy PT đã cho có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Nhận xét:

+ Trong phương trình (1) ta chọn cách đặt ẩn phụ nhưng không biểu diễn triệt để ẩn x qua t . Cách đặt này chỉ giải quyết thuận lợi khi Δ là bình phương của một biểu thức nào đó.

+ Khi giải phương trình vô tỉ đôi khi ta còn chọn hai ẩn phụ để đưa phương trình đã cho về các phương trình thuần nhất.

2. Điều kiện: $x \leq 1$ (**). Để ý: $2x^2 + 4x = 2(x^2 + x + 1) - 2(1-x)$ nên:

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow 3\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)} = 2(x^2+x+1) - 2(1-x)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{1-x} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2+x+1} \geq 0 \end{cases} \text{ Khi đó ta có: } 3ab = 2b^2 - 2a^2 \Leftrightarrow (2a-b)(a+2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } 2a - b = 0 \Leftrightarrow 2a = b \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$+ \text{ Với } a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = -2\sqrt{x^2+x+1} \text{ (Vô lý)}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện (**). Vậy PT(2) có nghiệm } x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

3. Điều kiện: $x \geq 5$ (***). Ta có

$$\sqrt{5x^2+14x+9} = \sqrt{x^2-x-20} + 5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 5x^2+14x+9 = (\sqrt{x^2-x-20} + 5\sqrt{x+1})^2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)} \Leftrightarrow 2(x^2-4x-5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x^2-4x-5} \geq 0 \\ b = \sqrt{x+4} \geq 0 \end{cases}, \text{ ta có: } 2a^2 + 3b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(2a-3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 2a-3b=0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } a-b=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow \sqrt{x^2-4x-5} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow x^2-5x-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+\sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{-5-\sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } 2a-3b=0 \Leftrightarrow 2a=3b \Rightarrow 2\sqrt{x^2-4x-5} = 3\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện (***)}. \text{ Vậy PT(3) có nghiệm } x=8 \text{ và } x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}.$$

Có những phương trình bằng cách đặt ẩn phụ để chuyển phương trình đã cho về các hệ phương trình như bài toán sau.

Bài toán 9: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2x+8} - \sqrt[3]{2x-9} = 5 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{2-x^2} = (2-\sqrt{x})^2 \quad (2)$$

$$3. 4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2} \quad (3)$$

$$4. x + \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 6 \quad (4)$$

Bài giải: 1. Điều kiện: $x \geq -4$ (*).

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2x+8} \geq 0 \\ b = \sqrt[3]{2x-9} \geq -\sqrt[3]{17} \end{cases} \text{ khi đó ta có hệ phương trình sau:}$$

$$\begin{cases} a-b=5 \\ a^2-b^3=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5+b \\ (b+5)^2-b^3=17 \end{cases} \Rightarrow b^3-b^2-10b-8=0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)(b^2-2b-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ b=-2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ b=4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } b=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{2x-9} = -1 \Leftrightarrow x=4$$

+ Với $b = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{2x-9} = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

+ Với $b = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{2x-9} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{73}{2}$

Vậy PT (1) có ba nghiệm: $x = 4, x = \frac{1}{2}, x = \frac{73}{2}$.

2. Điều kiện: $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ (**).

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = 2 - \sqrt{x} \leq 2 \end{cases}$ khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b^2 = \sqrt{2-a^4} \\ a+b=2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4+b^4=2 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 2 \\ a+b=2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 = 2 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - 8ab + 7 = 0 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ ab=7 \\ a+b=2 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $\begin{cases} ab=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$

+ Với $\begin{cases} ab=7 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2-a)=7 \\ b=2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+7=0 \\ b=2-a \end{cases} \Rightarrow \text{PTVN}$

Đổi chiều điều kiện (**) ta có PT (2) có nghiệm: $x=1$.

3. Điều kiện: $x \geq -2$ (***). Khi đó PT(3) $\Leftrightarrow (2x+1)^2 + 3x = 2\sqrt{2(2x+1)-3x}$

Đặt $\begin{cases} a = 2x+1 \\ b = \sqrt{2a-3x} \geq 0 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2+3x=2b \\ b^2+3x=2a \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=2b-2a \Leftrightarrow (a-b)(a+b+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ b=-a-2 \end{cases}$$

+ Với $b=a \Rightarrow a^2+3x=2a \Rightarrow (2x+1)^2+3x=2x+1 \Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \quad T/m(***)$

+ Với $b=-a-2 \Rightarrow a^2+3x=2(-a-2) \Rightarrow (2x+1)^2+3x=2(-2x-1-2)$

$$\Leftrightarrow 4x^2+11x+7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{7}{4} \end{cases} \quad T/m(***)$$

Vậy PT(3) có ba nghiệm: $x=-1, x=\frac{1}{4}, x=-\frac{7}{4}$.

Nhận xét: Trong phương trình (2) và (3) bằng cách đặt ẩn phụ ta thu được các hệ phương trình đối xứng loại 1 và hệ đối xứng loại 2.

4. $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$

Điều kiện: $x \geq 1$ (****)

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{5} \end{cases}$ Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 + 1 + b = 6 \\ b^2 = 5 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b = 5 \\ b^2 - a = 5 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(a-b+1) = 0 \Leftrightarrow b = a+1 \text{ vì } a+b > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow 5+\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^2 - 11x + 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện (****) phương trình có nghiệm $x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$.

4/ Giải pháp 4:

* *Hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp xuất hiện biểu thức liên hợp.*

Bài toán 10. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ (1)

2. $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$ (2)

3. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$ (3)

Bài giải:

1. Ta có PT(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm thì $x > \frac{5}{3}$.

Khi đó ta có:

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+12}-4) - (\sqrt{x^2+5}-3) - (3x-6) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$; Ta có PT(2)

$$\text{PT}(2) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2-1}-2) + (x-3) = \sqrt{x^3-2}-5 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4} + (x-3) = \frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4} + 1 - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Vì: } \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4} + 1 = \frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3} < 2 < \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

3. Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned} \text{PT}(3) &\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1) + (\sqrt{4-x}-1) = 2x^2 - 5x - 3 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1} - (x-3)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x-1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x-1 = 0, (*) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có PT}(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} = 2x+1$$

$$\text{Mà: } \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq 1; \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \leq 2-\sqrt{2}$$

và $2x+1 \geq 5$ nên PT(*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3$.

Chú ý: Ở các bài toán trên ta nhằm được nghiệm nên đã thêm bớt để sau khi nhân, chia với biểu thức liên hợp xuất hiện các nhân tử chung.

5/ Giải pháp 5:

* *Hướng dẫn học sinh giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp đánh giá.*

Bài toán 11. Giải các phương trình sau:

$$1. x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - 2x+16} + 2x^2 - 6x + 20 = 0 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{1-2015x} + \sqrt{1+2015x} = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad (2)$$

$$3. \sqrt{2x^3+x^2-10x+15} = x^2 - 2x + 4 \quad (3)$$

Bài giải:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có PT}(1) &\Leftrightarrow \left[x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - 2x+16} + (x^2 - 2x+16) \right] + (x^2 - 4x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{x^2 - 2x+16})^2 + (x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - 2x+16} = 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x=2. \end{aligned}$$

Chú ý: Ở đây ta đã sử dụng tính chất: $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.

$$2. \text{ Giải phương trình: } \sqrt{1-2015x} + \sqrt{1+2015x} = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Điều kiện: $-\frac{1}{2015} \leq x \leq \frac{1}{2015}$; Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-2015x} + \sqrt{1+2015x})^2 &\leq 2(1-2015x+1+2015x) = 4 \\ \Rightarrow \sqrt{1-2015x} + \sqrt{1+2015x} &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}} \Rightarrow \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \geq 2$$

$$\text{Nên PT(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-2015x} + \sqrt{1+2015x} = 2 \\ \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-2015x} = \sqrt{1+2015x} \\ \sqrt{2x+1} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Nhận xét:

Ta sử dụng phương pháp đánh giá $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases}, \forall x \in D$ nên phương trình

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$$

$$3. \sqrt{2x^3+x^2-10x+15} = x^2-2x+4 \quad (3)$$

Điều kiện: $2x^3+x^2-10x+15 \geq 0$; Ta có:

$$\sqrt{2x^3+x^2-10x+15} = \sqrt{x+3}\sqrt{2x^2-5x+5} \leq \frac{x+3+2x^2-5x+5}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^3+x^2-10x+15} \leq x^2-2x+4$$

$$\text{Nên PT(3)} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{2x^2-5x+5} \Leftrightarrow 2x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện, Phương trình có nghiệm } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

*** Sau khi ra bài tập giải phương trình vô tỉ và hướng dẫn học sinh giải. Giáo viên ra dạng bài tập tương tự để học sinh giải. Qua đó học sinh rèn luyện phương pháp giải hình thành kỹ năng giải phương trình vô tỉ.**

Bài tập tự luyện:

Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{3x-2} = 2x-3$$

$$2. \sqrt{5-2x} = \sqrt{x-1}$$

$$3. \sqrt{3x^2-9x+1} + 4x-2 = 0$$

$$4. x^2-3x + \sqrt{x^2-3x+5} = 7$$

$$5. \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{5x-1}$$

$$6. \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$7. (x+5) \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x+5}} = x+2$$

$$8. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$$

$$9. \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 4$$

$$10. x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$$

$$11. x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$$

12. $(4x - 1)\sqrt{x^3 + 1} = 2x^3 + 2x + 1$
13. $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2 - 2x}$
14. $x^2 + 4x = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$
15. $\sqrt{x^2 + 5x + \sqrt{x^3 + 2x + 1}} = x + 1$
16. $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{x^2 + 8x + 7}$
17. $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$
18. $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$
19. $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + 6\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = 5$
20. $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$
21. $2\sqrt{2x + 4} + 4\sqrt{2 - x} = \sqrt{9x^2 + 16}$
22. $x^3 + (3 - \sqrt{x^2 + 2})x = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2}$
23. $\sqrt{2x + 15} = 32x^2 + 32x - 20$
24. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$
25. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - x - 1}$
26. $\sqrt{5x + 4} + \sqrt{2 - x} = 2(3x + 1)$
27. $x + \sqrt{2x + 3} = 2x(x - 2)$
28. $(x^2 + x)\sqrt{2x + 3} = x^3 + 3x^2 + x - 2$
29. $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{7x + 18} = \frac{2x + 9}{x^2 + 3x + 7}$
30. $\sqrt[3]{3x^2 + 11x + 9} = (x - 6)(2x^2 - 15)$

II.4) HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

- Sáng kiến kinh nghiệm này giúp cho tôi và các đồng nghiệp thực hiện tốt nhiệm vụ và nâng cao chất lượng giáo dục, giúp học sinh hình thành tư duy logic kỹ năng phân tích để đi đến một hướng giải đúng và thích hợp khi gặp bài toán giải phương trình vô tỉ từ phức tạp đưa về dạng đơn giản, cơ bản và giải được một cách dễ dàng, học sinh biết các dạng toán và phân biệt được điều kiện nào là điều kiện cần và đủ của phương trình, khi nào thì ta có phép biến đổi tương đương, khi nào thì ta có phép biến đổi hệ quả và lưu ý đến việc loại bỏ nghiệm ngoại lai của phương trình.

- Đề tài được sử dụng để giảng dạy và bồi dưỡng cho các em học sinh khối 10 và khối 12 hệ THPT và làm tài liệu tham khảo cho các thầy cô giảng dạy môn Toán. Các thầy cô và học sinh có thể sử dụng các bài toán trong đề tài này làm bài toán gốc để đặt và giải quyết các bài tập cụ thể.

- Đề tài này tôi đã kiểm nghiệm trong các năm học giảng dạy lớp 10, và ôn tập cho các em học sinh lớp 12 ôn thi Đại học và THPT Quốc Gia, đã được học sinh đồng tình và đạt được kết quả cao, nâng cao khả năng giải phương trình vô tỉ. Các em hứng thú học tập hơn, ở những lớp có hướng dẫn kỹ các em học sinh với mức học từ trung bình hay trung bình khá trở lên đã có kỹ năng giải các bài tập. Học sinh biết áp dụng tăng rõ rệt.

- Đợt đầu mới học theo SGK tôi tiến hành kiểm tra trên cả hai lớp với nội dung như nhau đã có kết quả thu được như sau:

Lớp	Sĩ số	Điểm Giỏi		Điểm Khá		Điểm TB		Điểm yếu kém	
		Số Hs	%	Số Hs	%	Số Hs	%	Số Hs	%
10E	35	2	5,7	3	8,6	17	48,6	13	37,1
10H	39	1	2,6	2	5,1	20	51,3	16	41

Sau một thời gian dạy theo chuyên đề này tôi tiếp tục tiến hành kiểm tra trên cả hai lớp cũng với nội dung như nhau đã có kết quả thu được như sau:

Lớp	Sĩ số	Điểm Giỏi		Điểm Khá		Điểm TB		Điểm yếu kém	
		Số Hs	%	Số Hs	%	Số Hs	%	Số Hs	%
10E	35	8	22,9	14	40	10	28,5	3	8,6
10H	39	6	15,4	13	33,3	15	38,5	5	12,8

Nhận xét:

* Tỷ lệ học sinh đạt loại khá, giỏi tăng nhiều so với kết quả kiểm tra trước.

* Tỷ lệ học sinh đạt loại trung bình đã giảm nhiều so với kết quả kiểm tra trước. và đặc biệt tỷ lệ học sinh chưa đạt yêu cầu đã giảm rõ rệt.

- Với kết quả như trên đối với các lớp có lực học trung bình hay trung bình khá, kể cả các lớp có lực học dưới trung bình đã làm cho đa số học sinh đều cảm thấy mình đã học giỏi hơn, mình có hứng thú học tập cao hơn trước. Điều này đã làm cho các bậc phụ huynh yên lòng về kết quả học tập của con em mình, từ đó đã thúc đẩy phong trào học tập của nhà trường và của cả các địa phương trong khu vực.

PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1/ Kết luận:

- Trên đây là những giải pháp mà tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy tại các trường THPT.

- Như vậy tôi thấy các phương pháp nêu trên đã có hiệu quả cao hơn. Theo tôi khi dạy phần toán giải phương trình vô tỉ giáo viên cần chỉ rõ các dạng toán và cách giải tương ứng để học sinh nắm được bài tốt hơn.

- Trong chương trình giáo dục phổ thông nói chung và trong các kỳ thi chính thức của các trường THPT và của Bộ Giáo Dục về môn Toán tôi thấy phần phương trình vô tỉ rất hay có trong đề thi Đại học, do vậy đây cũng là một vấn đề rất đáng quan tâm và chú ý cho đa số các học sinh và giáo viên trong việc ôn luyện thi THPT Quốc Gia. Tôi thấy vấn đề này có rất nhiều khả năng để nghiên cứu và mở rộng hơn, sâu hơn trong lĩnh vực nghiên cứu khoa học.

+ Mặc dù cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn còn có nhiều thiếu sót và hạn chế. Tôi rất mong được sự quan tâm của tất cả các đồng nghiệp bổ sung và góp ý cho tôi để bản sáng kiến kinh nghiệm này ngày càng được hoàn thiện và ứng dụng trong thực tế tốt hơn nữa.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

2/ Kiến nghị và đề xuất:

- Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu sách tham khảo đổi mới và phòng thư viện để nghiên cứu học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ .

- Nhà trường cần tổ chức các bồi trao đổi phương pháp giảng dạy. Có tủ sách lưu lại các tài liệu chuyên đề bồi dưỡng ôn tập của giáo viên hàng năm để làm cơ sở nghiên cứu phát triển chuyên đề.

- Các bản sáng kiến kinh nghiệm được xếp loại cấp Tỉnh cần được phổ biến rộng rãi hơn và cần được áp dụng nhiều hơn trong giảng dạy và cho các đồng nghiệp cùng học tập.

- Học sinh cần tăng cường học tập trao đổi, học nhóm nâng cao chất lượng học tập.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh Hóa, ngày 30 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

TRẦN THANH HẢI

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- + Sách giáo khoa đại số 10 - *Nhà xuất bản giáo dục*
- + Sách hướng dẫn giảng dạy - *Nhà xuất bản giáo dục*
- + Tài liệu tập huấn thay sách giáo khoa - *Nhà xuất bản Giáo dục*
- + Các bài giảng luyện thi môn toán - *Nhà xuất bản giáo dục*
(TG: Phan Đức Chính - Vũ Dương Thụy - Đào Tam - Lê Thống Nhất)
- + Toán nâng cao đại số 10 - *Phan Huy Khải*
- + Báo Toán học tuổi trẻ- *Nhà xuất bản giáo dục*
- + Các đề thi đại học của BGD các năm trước.
- + Hướng dẫn ôn tập thi THPT Quốc Gia năm 2014-2015 và năm 2015-2016.
(TG: Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Nguyễn Khắc Minh, Phạm Đức Tài)