ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

MÔN TOÁN 8

Bài 1 (3 điểm) Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2. (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9}$

b) Cho $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 (x, y, z \neq 0)$. Tính $\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2}$

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Bài 4. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):

$M = 4x^2 + 4x + 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}.(2^4 + 1) = 2^{11}.17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

b) Áp dụng hằng đẳng thức

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ..... - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19+69)(19^{18} - 19^{17}.69 + ... + 69^{18})$

$= 88.(19^{18} - 19^{17}.69 + ... + 69^{18})$ chia hết cho 44

Bài 2.

a) Ta có:

$*) x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x-2)(x+3)$

$*) x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9$

$= x^2(x+3) - 7x(x+3) + 3(x+3)$

$= (x+3)(x^2 - 7x + 3)$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x^2 - 7x + 3)} = \frac{x-2}{x^2 - 7x + 3} (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$$

b) Vì

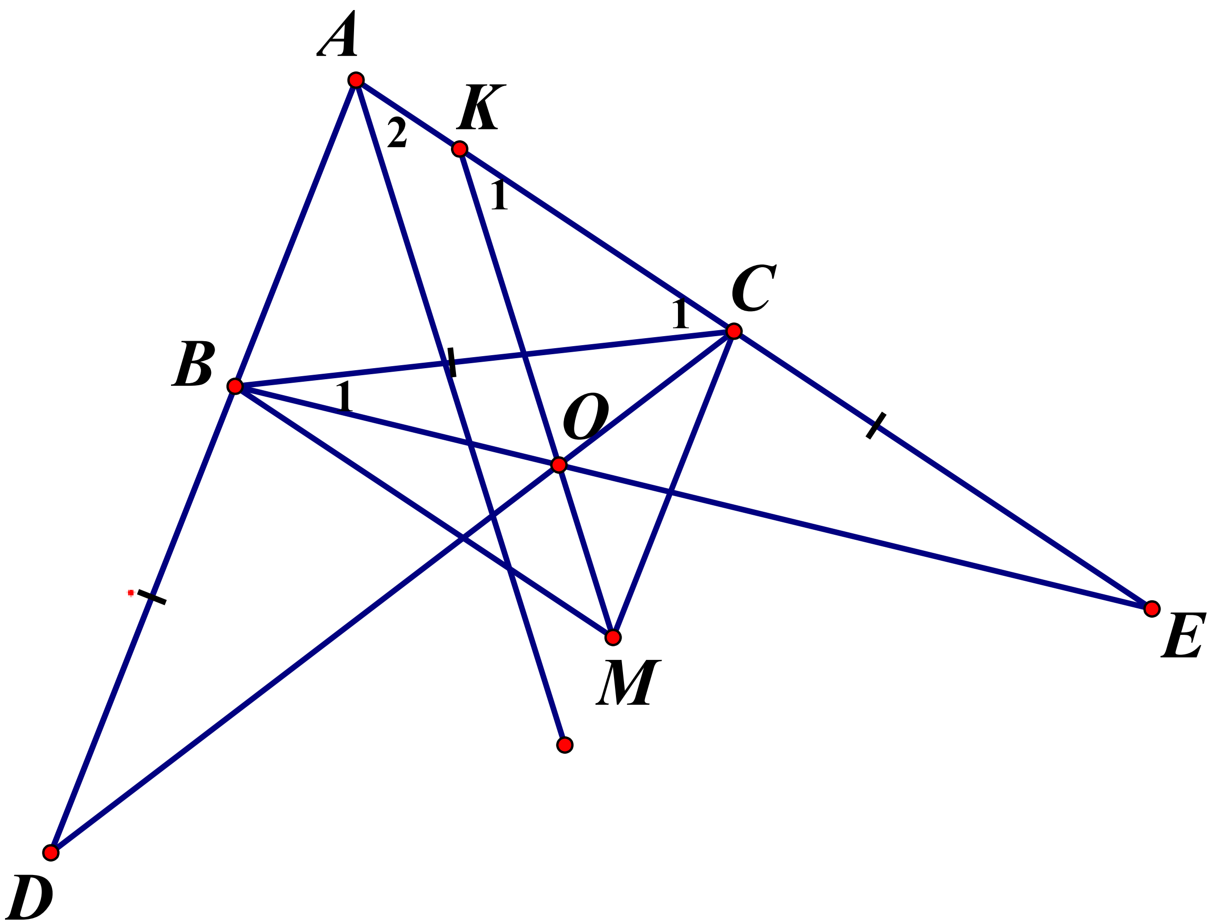
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3} + 3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y} + 3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3.\frac{1}{xyz}$$

Do đó: $xyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$

Bài 3.



Vẽ hình bình hành $ABMC$ ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE\,(gt) \Rightarrow \Delta CBE$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E}$

Vì góc C_1 là góc ngoài của tam giác BCE

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1} + \widehat{E} \Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{C_1}$ mà $AC // BM$ (ta vẽ) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{CBM} \Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{CBM}$ nên BO là tia phân giác của $\widehat{CBM}$. Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của $\widehat{BCM}$. Trong tam giác BCM, OB, CO, MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của $\widehat{CMB}$

Mà $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$ là hai góc đối của hình bình hành BMCA $\Rightarrow MO //$ với tia phân giác của góc A theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK

$\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Ta lại có: $\widehat{M_1} = \frac{1}{2}\widehat{BMC}(cmt); \widehat{A} = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{K_1}$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow \Delta CKM$ cân tại C $\Rightarrow CK = CM.$

Kết hợp $AB = CM \Rightarrow AB = CK \quad (dfcm)$

Bài 4.

Ta có $M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x+1)^2 + 4$

Vì $(2x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$

Vậy $Min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$