**Đề 63**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 KON TUM 2023-2024**

**Bài 1.** (5,0 điểm):

1/ Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ .

2/ Cho phương trình $x^{2}-2(m+1)x+2m+1=0$ (1) ($m$ là tham số). Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm $x\_{1},x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}^{2}+2(m+1)x\_{2}=57$ .

**Bài 2**. (5,0 điểm):

 1/ Tìm tất cả các cặp số nguyên không dương $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $x^{3}+y^{2}=xy^{2}+1$ .

 2/ Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường phân giác trong $AD$ vuông góc với đường trung tuyến $BE$ tại $F$. Tính diện tích tam giác $FED$ biết $AD=a\sqrt{2}$ .

**Bài 3**. (4,0 điểm):

Cho đường thẳng $d$ và điểm $A$ cố định không thuộc $d, H$ là hình chiếu của $A$ trên $d$. Đường tròn $(C)$ thay đổi qua $A$ cắt đường thẳng $d $tại $B,C$ sao cho $HB.HC=k, (k$ là hằng số dương$)$. Gọi $M,N$ tương ứng là hình chiếu của $H$ lên $AB, AC$.

 1/ Chứng minh tứ giác $MNCB$ nội tiếp.

 2/ Chứng minh đường thẳng $MN $đi qua một điểm cố định.

**Bài 4**. (4,0 điểm):

 1/ Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}y^{2}-x^{2}=1+2x\\x^{2}+xy+y^{2}=1\end{array}\right.$ .

 2/ Cho biểu thức $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$, biết $f(1)=10; f(2)=20.$ Tính giá trị biểu thức

 $S=\frac{f(11)-f(-8)-100}{100}$ .

**Bài 5** (2,0 điểm):

Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $a\geq \frac{1}{4}; b\geq \frac{1}{4}; c\geq \frac{1}{4}$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a-1}+\sqrt{4b-1}+\sqrt{4c-1}$ .

**---Hết---**

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1:** (5 điểm):

1/ *P=*$\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ =$\sqrt{6+2\sqrt{5}-\left(2\sqrt{5}-3\right)}=\sqrt{9}=3.$

2/ Ta có $Δ^{'}=\left(m+1\right)^{2}-\left(2m+1\right)=m^{2}\geq 0 với mọi m$. Phương trình luôn có hai nghiệm.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x\_{1}+x\_{2}=2m+2 ∨x\_{1}x\_{2}⇒2m+1.$

$$Ta có x\_{1}^{2}=2\left(m+1\right)x\_{1}-2m-1. Theo bài ra ta có$$

$$x\_{1}^{2}+2\left(m+1\right)x\_{2}=57⇔2\left(m+1\right)x\_{1}+2\left(m+1\right)x\_{2}-2m-1=57$$

$$⇔2\left(m+1\right)\left(x\_{1}+x\_{2}\right)-2m-1=57⇔\left(2m+2\right)\left(2m+2\right)-2m-1=57$$

$$⇔4m^{2}+6m-54=0⇔2m^{2}+3m-27=0⇔m=3 ∨m=-\frac{9}{2} (thỏa mãn)$$

$$Vậy, m \in \left\{3;\frac{-9}{2}\right\}.$$

**Bài 2:** (5,0 điểm):

1/ $x^{3}+y^{2}=xy^{2}+1 ⇔y^{2}\left(1-x\right)=1-x^{3} $

$$Nếu 1-x=0⇔x=1⇒ 1=0 \left(vô nghiệm\right)$$

$$Nếu 1-x\ne 0⇔x\ne 1, \left(1\right)⇔y^{2}=x^{2}+x+1 ⇔\left(2y\right)^{2}-\left(2x+1\right)^{2}=3$$

$$⇔\left(2y+2x+1\right)\left(2y-2x-1\right)=3. (2)$$

$$Nên ta có các trường hợp sau$$

$$TH1:\left\{\begin{array}{c}2y+2x+1=3\\2y-2x-1=1\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}y=1\\x=0\end{array} (loại)\right..$$

$$TH2:\left\{\begin{array}{c}2y+2x+1=-3\\2y-2x-1=-1\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}y=-1\\x=-1\end{array} \left(thỏa mãn\right)\right..$$

$$TH3:\left\{\begin{array}{c}2y+2x+1=-1\\2y-2x-1=-3\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}y=-1\\x=-1\end{array} (thỏa mãn)\right..$$

$$TH4:\left\{\begin{array}{c}2y+2x+1=1\\2y-2x-1=3\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}y=1\\x=-1\end{array} (loại)\right..$$

Vậy, cặp số nguyên không dương thỏa mãn bài toán là (−1; -1).

2/



$Từ giả thiết, ta suy ra FA=FB=FE , tam giác ABE vuông cân tại A nên AB=AE=EC=\frac{1}{2}AC$.

$$Ta có S\_{∆ABF}=S\_{∆AEF}=\frac{1}{2}S\_{∆ABE}=\frac{1}{4}S\_{∆ABC}. (1)$$

$$Ta lại có S\_{∆ABD}=S\_{∆ADE}=S\_{∆DEC}=\frac{1}{3}S\_{∆ABC}. \left(2\right)$$

$$Từ đó suy ra S\_{∆DEF}=\frac{1}{3}S\_{∆AEF} ⇒AF=3FD⇒À=\frac{3}{4}AD=\frac{3\sqrt{2}a}{4}. (1)$$

$Ta có S\_{∆ABF}=\frac{1}{2}AF^{2}=\frac{9}{16}a^{2}$. (2)
$$Từ \left(1\right) và \left(2\right)suy ra S\_{∆DEF}=\frac{1}{3}S\_{∆AEF}=\frac{3}{16}a^{2}.$$

**Bài 3:** (4,0 điểm)



a/ $Xét ∆AHC vuông tại H , có HN là đường cao ta có AH^{2}=AN.AC. \left(1\right)$

$$∆AHB vuông tại H , có HM là đường cao ta có AH^{2}= AM. AB . (2) $$

$$Từ \left(1\right)và \left(2\right)suy ra AN.AC=AM.AB⇒\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AB}, ta lại có \hat{MAN}=\hat{CAB} nên suy ra $$

$∆ANM\~∆ABC \left(c.g.c\right), suy ra \hat{ANM}=\hat{ABC}⇒$ Tứ giác *MNCB* nội tiếp một đường tròn.

b/ $Gọi AH∩\left(O\right)=\left\{D\right\}, MN∩\left\{AH\right\}=\left\{I\right\}.$

$Ta chứng minh được ∆AHC \~ ∆BHD \left(g.g\right)suy ra\frac{AH}{HC}=\frac{HC}{HD}⇒ HB.HC=HA.HD=k nên $

$HD=\frac{k}{AH} không đổi, suy ra D cố định. $

Ta lại có $\hat{ANM }$=$\hat{ADC }$(=$ \hat{ABC })$. Xét ∆ANI và ∆ADC có $\hat{NAI}$ chung và $\hat{ANM }$=$\hat{ADC }$ (cmt) $Do đó ∆ANI\~∆ADC \left(g.g.\right) suy ra\frac{AN}{AD}=\frac{AI}{AC}⇒AI=\frac{AN.AC}{AD}= \frac{AH^{2}}{AD}không đổi, mà A cố định nên I cố$ $định.$

$Vậy MN đi qua điểm I cố định$

**Bài 4:** (4,0 điểm)

1/
$$\left\{\begin{array}{c}y^{2}-x^{2}=1+2x \left(1\right)\\x^{2}+xy+y^{2}=1 \left(2\right)\end{array}. Từ PT \left(1\right) ta có y^{2}=\left(x+1\right)^{2}\right.⇔y=x+1 ∨ y=-x-1 ,$$

$$xét các trường hợp ta có$$

$$TH1:y=x+1, thay vào PT \left(2\right) ta có x^{2}+x\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^{2}=1$$

$⇔ 3x\left(x+1\right)=0⇔$ $\left[\begin{matrix}x=0⇒y=1\\x=-1 ⇒y=0\end{matrix}.\right.$

$$ TH2:y=-x-1, thay vào PT \left(2\right) ta có x^{2}-x\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^{2}=1$$

$⇔ x\left(x+1\right)=0⇔$ $\left[\begin{matrix}x=0⇒y=-1\\x=-1 ⇒y=0\end{matrix}.\right.$

Vậy, tập nghiệm của hệ phương trình là S$ \in $ $\left\{(0;1) ;( -1;0 );( 0;-1) ;(-1;0) \right\}$.

2/ Xét đa thức $Px=f\left( x\right)-10x, ta có P\left(1\right)=0và P\left(2\right)=0, mà đa thức P\left(x\right)bậc 3 nên P\left(x\right)$

$$có dạng$$

$$P\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+m\right)⇒f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+m\right)+10x. (1) $$

Thay x =11 và x = −8 vào đa thức $f\left(x\right)$ ta có S=19.

**Bài 5** (2,0 điểm)

Áp dụng BĐT AM – GM ta có

$\sqrt{\left(4a-1\right).\frac{1}{3}}\leq \frac{4a-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6a-1}{3}⇒\sqrt{4a-1}\leq \frac{\sqrt{3}}{3}⋅\left(6a-1\right). $ (1)

$\sqrt{\left(4b-1\right).\frac{1}{3}}\leq \frac{4b-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6b-1}{3}⇒\sqrt{4b-1}\leq \frac{\sqrt{3}}{3}⋅\left(6b-1\right). $ (2)

$\sqrt{\left(4c-1\right)\frac{1}{3}}\leq \frac{4c-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6c-1}{3}⇒\sqrt{4c-1}\leq \frac{\sqrt{3}}{3}⋅\left(6c-1\right). $ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có $P\leq \frac{\sqrt{3}}{3}.\left(6\left(a+b+c\right)-3\right)=\sqrt{3}.$

Vậy, P có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$ khi $a=b=c =\frac{1}{3}.$