

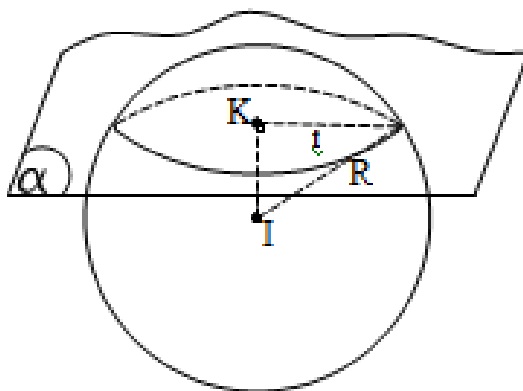
DẠNG 3**Mặt cầu trong không gian****MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN**

❖ Trong không gian với hệ trục Oxyz:

- Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

- Phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

❖ Vị trí tương đối của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S):

- $d(I,(\alpha)) > R$ khi và chỉ khi (α) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha)) = R$ khi và chỉ khi (α) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha)) < R$ khi và chỉ khi (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm K và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

❖ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng.

- Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O đến Δ
- Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt
- Nếu $d = R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất
- Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu

I. PHẦN ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $|a|=1$. B. $a+b+c=1$. C. $|b|=1$. D. $|c|=1$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.
- Câu 3:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là
- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$.
C. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$. D. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 12$.
- Câu 4:** Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?
- A. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 7y + 5z - 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + \sqrt{3}z + 7 = 0$.
- Câu 6:** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-2;3;4), B(6;1;2)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB .
- A. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 18$. B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 18$.
C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3\sqrt{2}$. D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3\sqrt{2}$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?
- A. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z - 1 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y + 6z + 7 = 0$.
- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $I(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là
- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 29$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là
- A. $\{1; 10\}$. B. $\{2; -10\}$. C. $\{-1; 11\}$. D. $\{1; -11\}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình là
- A. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
 C. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2; 1; 4); N(5; 0; 0); P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết $a + b + c < 5$
- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2; 0; 0); B(0; -2; 0); C(0; 0; -2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$
- A. -4. B. -1. C. -2. D. -3.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(0; -4; 6)$. Phương trình mặt cầu tâm A đi qua điểm B là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14^2$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.
 C. $(x-0)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = 14$. D. $(x-0)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = \sqrt{14}$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1), B(-3; -2; 1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy) , bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B . Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là
- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 7 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 7 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2 = 0$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(2+m)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình của một mặt cầu?
- A. 4. B. 6. C. 5. D. 7.
- Câu 17:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m \leq 6$. B. $m > 6$. C. $m < 6$. D. $m \geq 6$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu.

- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m < 0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 8m + 37 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m < -2$ hay $m > 4$. B. $m \leq -2$ hay $m \geq 4$.
C. $m < -4$ hay $m > -2$. D. $m < -4$ hay $m > 2$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + m = 0$ là phương trình mặt cầu.

- A. $m \geq 14$. B. $m > 14$. C. $m < 14$. D. $m \leq 14$.

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 4x + 2y + 4z + 7 = 0$. Hai mặt cầu có bán kính là R_1 và R_2 chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): 3y - 4z - 20 = 0$. Tổng $R_1 + R_2$ bằng

- A. $\frac{63}{8}$. B. $\frac{35}{8}$. C. 5. D. $\frac{65}{8}$.

Câu 22: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d , đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$.

- A. $R = 2$. B. $R = 4$. C. $R = 1$. D. $R = 3$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

- A. 64. B. 60. C. 68. D. 48.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, mặt cầu qua bốn điểm $A(5;3;3)$, $B(1;4;2)$, $C(2;0;3)$, $D(4;4;-1)$, có phương trình là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = D$. Giá trị $a+b+c$ bằng

- A. 5. B. 7. C. 4. D. 6.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3;0;0); B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

- A. 116π . B. 29π . C. 16π . D. $\frac{29\pi}{4}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$. Tổng bình phương bán kính của ba đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$ là

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Câu 27: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cắt mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$, giá trị $a + b + c$ bằng

A. 0,5.

B. -1.

C. -0,5.

D. 1.

Câu 29: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+1)x + (2-m)y + 2(m+1)z - 6(m+2) = 0$. Biết rằng khi m thay đổi mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định. Tọa độ tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;2;1)$.

B. $I(-1;-2;-1)$.

C. $I(1;2;-1)$.

D. $I(-1;-2;1)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 2y - 2z + 6 = 0$. Gọi (S) là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của (S) bằng.

A. 3.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 9.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA = 2MB$ là một đường tròn (C) . Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 32: Trong không gian cho mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Từ điểm $A(2019;0;0)$ ta kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω) . Từ điểm M di động nằm ngoài S và nằm trong mặt phẳng chứa (ω) , kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω') . Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chiều dài quãng đường l khi M di chuyển đúng 2019 vòng theo cùng một chiều trên đường tròn đó.

A. $l = \frac{2\sqrt{2019^4 - 1}}{2019}\pi$.

B. $l = 2019\pi$.

C. $l = 8152722\pi$.

D. $l = 4076361\pi$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$.

B. $\frac{a\sqrt{29}}{8}$.

C. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có phương trình $(Oxz): y = 0$.

Do mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên $d(I, (Oxz)) = 1 \Leftrightarrow |b| = 1$.

Câu 2: Chọn A

Gọi $I(a;0;0) \in Ox \Rightarrow \overline{IA}(1-a;1;2); \overline{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13}$
 $\Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.

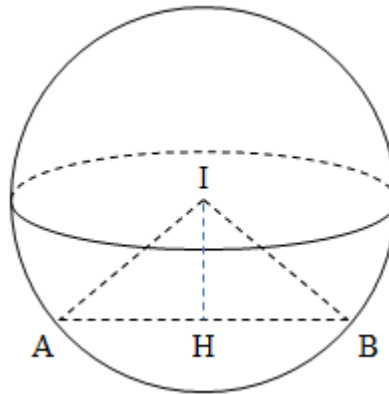
Câu 3: Chọn C

Ta có $|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của AB khi đó $I(0;3;2)$. Bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Câu 4: Chọn A



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ tại $H \Rightarrow IH = d_{(I;(AB))} = d_{(I;Ox)}$.

Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;0)$, chọn điểm $M(2;0;0) \in Ox$.

$\Rightarrow \overline{IM} = (1;2;-3) \Rightarrow [\overline{IM}, \vec{u}] = (0;-3;2) \Rightarrow IH = d_{(I,Ox)} = \frac{||[\overline{IM}, \vec{u}]||}{||\vec{u}||} = \sqrt{13}$.

(Cách khác: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH = \sqrt{13}$) mà $HA = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 5: Chọn B

Mặt cầu có tâm I và bán kính R

Vì mặt cầu nhận OA làm đường kính do đó tâm I là trung điểm của OA

Ta có $I(1; -2; 3); R = \frac{OA}{2} = \sqrt{14} \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 6: Chọn B

Mặt cầu có đường kính AB nên tâm I là trung điểm AB . Suy ra $I(2; 2; 3)$.

Mặt khác $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = 3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 7: Chọn D

Phương trình ở đáp án D không đúng dạng (1) do hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau.

Câu 8: Chọn D

Vì mặt cầu tâm I đi qua A nên có bán kính $R = |IA| = \sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$ Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$ đi qua A là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$$

Câu 9: Chọn C

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}$$

Câu 10: Chọn C

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên bán kính mặt cầu là:

$$d(I; (P)) = r \Leftrightarrow \frac{|2-4+1-8|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \Rightarrow r = 3$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Câu 11: Chọn D

Gọi R là bán kính mặt cầu, suy ra diện tích mặt cầu là $4\pi R^2$.

Theo đề bài mặt cầu có diện tích là 4π nên ta có $4\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 1$.

Mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$ và bán kính $R = 1$ nên có phương trình: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 12: Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P nên

$$d(I; (Oyz)) = IM = IN = IP$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I; (Oyz)) = IM \\ IN = IM \\ IN = IP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + (c-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ 3a - b - 4c = 2 \\ 4a + 3b - c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $a + b + c < 5$ ta có $c = 2$

Câu 13: Chọn B

$$\text{Gọi } D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (x+2; y; z); \overrightarrow{DB} = (x; y+2; z); \overrightarrow{DC} = (x; y; z+2)$$

Vì DA, DB, DC đôi một vuông góc nên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) + y(y+2) + z^2 = 0 \\ x(x+2) + y^2 + z(z+2) = 0 \\ x^2 + y(y+2) + z(z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{4}{3}$$

$I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+2)^2 + c^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c+2)^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = \left(a + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(c + \frac{4}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ 4a + 4 = 8a + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = -\frac{1}{3}. \text{ Vậy } a + b + c = -1.$$

Câu 14: Chọn B

Mặt cầu tâm $A(1; -2; 3)$ đi qua $B(0; -4; 6)$ có bán kính $R = AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 15: Chọn A

Gọi $I(a; b; 0) \in (Oxy); b < 0$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (1-a; -b; -1), \overrightarrow{IB} = (-3-a; -2-b; 1)$.

Do mặt cầu (S) hai điểm A, B nên $IA = IB = \sqrt{11}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ (1-a)^2 + b^2 + 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ (1-a)^2 + (-2a-3)^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ 5a^2 + 10a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = -3 \\ a = -2; b = 1 \end{cases}.$$

Đổi chiếu điều kiện ta có $I(0; -3; 0) \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.

Câu 16: Chọn D

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(2+m)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d \text{ với } a = -(2+m), b = 0, c = m-1, d = 3m^2 - 5.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 10 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 7 giá nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Chọn C

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 18: Chọn B

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu thì

$$4 + m^2 + 3^2 - 13 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Câu 19: Chọn A

Câu 20: Chọn C

Câu 21: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $(S) \cap (P) = (C)$ là đường tròn tâm K , bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(O, (P))} = \sqrt{9 - \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{6}$.

Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (P) . Khi đó $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

Gọi I là tâm mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) . Khi đó $I \in d \Rightarrow I(2t; t; 2t)$.

$$\text{Theo bài ra } d(I, (Q)) = \sqrt{(d(I, (P)))^2 + r^2} \Leftrightarrow \frac{|3t - 8t - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{|8t + 2t + 8t + 7|^2}{6^2} + \frac{275}{36}}$$

$$\Leftrightarrow 36|t + 4|^2 = |18t + 7|^2 + 275 \Leftrightarrow 288t^2 - 36t - 252 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{7}{8} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow d(I,(Q))=5 ; \text{ Với } t=-\frac{7}{8} \Rightarrow d(I,(Q))=\frac{25}{8}.$$

Vậy có hai mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng (Q) , bán kính hai mặt cầu đó lần lượt là $R_1=5$, $R_2=\frac{25}{8}$. Khi đó $R_1+R_2=\frac{65}{8}$.

Câu 22: Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I(1+t;2-2t;2+t)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $AI=d(I;(P))=R$.

$$AI=d(I;(P)) \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2}=\frac{|1+t-4+4t+4+2t+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6t^2+2t+1}=\frac{|7t+2|}{3} \Leftrightarrow 9(6t^2+2t+1)=(7t+2)^2.$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(2;0;3). \text{ Vậy bán kính mặt cầu } R=AI=3.$$

Câu 23: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$. Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}=\vec{0}$
 $\Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Dễ thấy điểm E là điểm ngoài của (S) .

$$\text{Khi đó } P=2MA^2-MB^2=2(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{AE})^2-(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{BE})^2=ME^2+2AE^2-BE^2.$$

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$$\max ME=IE+R=8; \min ME=IE-R=2. \text{ Do đó}$$

$$m=\max P=64+2AE^2-BE^2; n=\min P=4+2AE^2-BE^2 \text{ suy ra } m-n=60.$$

Câu 24: Chọn D

Cách 1:

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$

$$\Rightarrow (S) \text{ có dạng: } x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+e=0 \text{ (} a^2+b^2+c^2-e>0 \text{)}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \\ D \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+6b+6c-e=43 \\ 2a+8b+4c-e=21 \\ 4a+6c-e=13 \\ 8a+8b-2c-e=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \\ e=5 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6.$$

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$.

$$\text{Khi đó: } AI=BI=CI=DI \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a-2b+2c=22 \\ 6a+6b=30 \\ 2a-2b+8c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6.$$

Câu 25: Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C có dạng là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

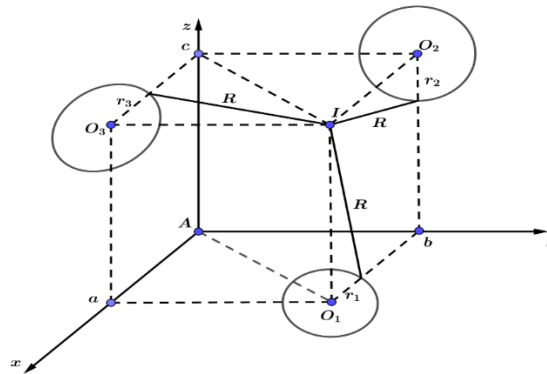
Do mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C nên thay lần lượt tọa độ O, A, B, C vào phương trình mặt

cầu, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} d = 0 \\ 9 - 6a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 16 - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Do đó ta có bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{\frac{9}{4} + 1 + 4 - 0} = \sqrt{\frac{29}{4}}.$

Nên diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{29}{4} = 29\pi.$

Câu 26: Chọn B



Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R = 2$.

Vì ba mặt phẳng thay đổi qua $A(1;1;-1)$ và đôi một vuông góc với nhau nên ba mặt phẳng này cắt nhau theo ba giao tuyến là ba đường thẳng đôi một vuông góc với nhau tại A . Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt trùng với các đường thẳng giao tuyến của ba mặt phẳng đã cho.

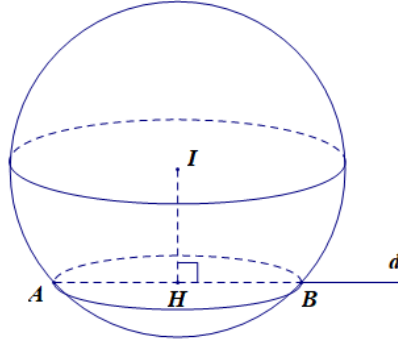
Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu (S) ứng với hệ trục tọa độ $Axyz$.

Suy ra $IA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử mặt cầu (S) cắt các mặt phẳng $(Axy), (Ayz), (Axz)$ theo các đường tròn lần lượt có tâm là O_1, O_2, O_3 tương ứng với bán kính là r_1, r_2, r_3 .

Ta có $r_1^2 = R^2 - IO_1^2 = 4 - c^2, r_2^2 = R^2 - IO_2^2 = 4 - a^2, r_3^2 = R^2 - IO_3^2 = 4 - b^2$.

Suy ra $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 12 - (a^2 + b^2 + c^2) = 12 - 1 = 11$

Câu 27: Chọn D



Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 2; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; -2; 2)$.

$\vec{IM} = (-2; 0; 3) \Rightarrow [\vec{IM}, \vec{u}] = (6; 13; 4)$. Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$.

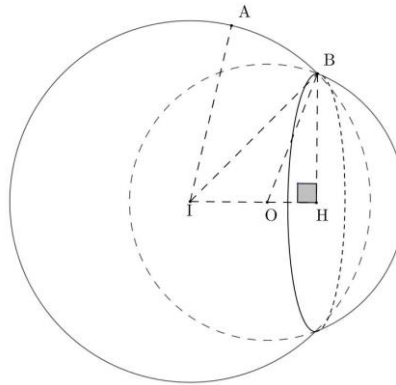
Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH = \frac{[\vec{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}} = \sqrt{13}$.

Suy ra bán kính $R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{13+3} = 4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ và có bán kính $R = 4$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 28: Chọn A

Ta có hình vẽ sau:



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = OB = 1$.

Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (P) là: $d(O, (P)) = OH = \frac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là: $r = BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Gọi d' là đường thẳng qua tâm $O(0;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Khi đó $d': \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ lại có điểm $I \in d'$ do ba điểm I, O, H thẳng hàng.

Suy ra $I(t; 2t; -2t)$, $\vec{IA} = (t-1; 2t-1; -2t-1)$, $IA = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2 + (-2t-1)^2}$

Ta có:

$$IH = d(I, (P)) = \frac{|t + 4t + 4t + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|9t + 1|}{3}, \quad IB = \sqrt{BH^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{|9t + 1|}{3}\right)^2}.$$

Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$ có bán kính

$$IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2 + (-2t-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{|9t+1|}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t-1)^2 + (-2t-1)^2 = \frac{8}{9} + \left(\frac{|9t+1|}{3}\right)^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; -1\right)$. Vậy $a + b + c = \frac{1}{2}$.

Cách 2.

Mặt cầu chứa đường tròn (C) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ có dạng:

$$(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 1 + m(x + 2y - 2z + 1) = 0$$

$$A(1;1;1) \in (S') \Leftrightarrow 3 - 1 + m(1 + 2 - 2 + 1) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\Rightarrow (S'): x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 2z - 1 = 0. \text{ Suy ra tâm } I\left(\frac{1}{2}; 1; -1\right). \text{ Vậy } a + b + c = \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+1)x + (2-m)y + 2(m+1)z - 6(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 15 + m(-2x - y + 2z - 6) = 0$$

Khi đó đường tròn cố định (C) cần tìm là giao điểm của mặt phẳng $(P): -2x - y + 2z - 6 = 0$

$$\text{và mặt cầu } (S'): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 15 = 0.$$

Mặt cầu (S') có tâm $J(1; -1; -1)$ nên độ tâm I của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng qua } J \text{ và vuông góc với } (P), \text{ ta có: } \Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

$$I \in \Delta \Rightarrow I(-2t+1; -t-1; 2t-1), \text{ mặt khác } I \in (P) \text{ nên } -2x_I - y_I + 2z_I - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Vậy } I(-1; -2; 1).$$

Câu 30: Chọn C

Để thấy mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) .

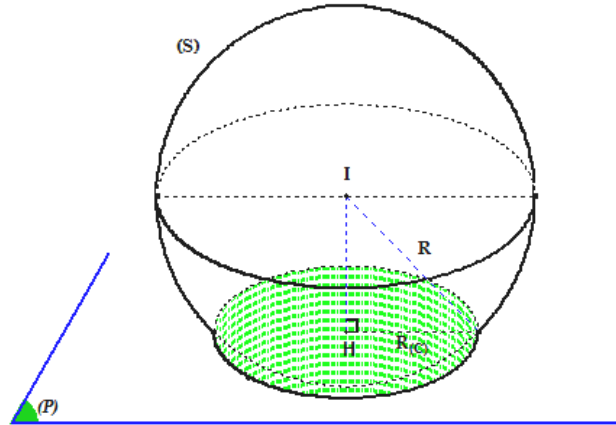
Lấy điểm $A(1; -1; 0) \in (P)$. Ta có:

$$d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{|1 + 2 + 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3.$$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó chính bằng đường kính của (S) .

Vậy mặt cầu (S) có bán kính là $R_{(S)} = \frac{3}{2}$.

Câu 31: Chọn A



Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$, suy ra mặt cầu có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thuộc (S) sao cho $MA = 2MB$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} M \in (S) \\ MA = 2MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2z}{3} - \frac{29}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \\ z-2=0 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ tâm $I(0;0;3)$ đến mặt phẳng $(P): z-2=0$ là:

$$d(I, (P)) = \frac{|3-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 1 < R.$$

Do đó đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

Đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)} = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$.

Câu 32: Chọn C

Từ giả thiết ta có:

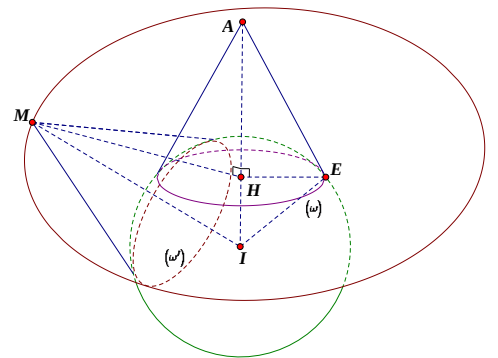
Bán kính mặt cầu $R=1$, tâm mặt cầu $O(0;0;0)$.

Khoảng cách $AO = 2019 = 2019R$.

Như vậy ta có $k = 2019$.

Áp dụng bài toán 47.1 ta có bán kính mà đường tròn M di động trên đó là

$$r = \frac{\sqrt{k^4-1}}{k} R = \frac{\sqrt{2019^4-1}}{2019}. \text{ Chu vi của đường tròn } M \text{ di động là } C = 2\pi r.$$



Vậy chiều dài quãng đường là: $l = 2019.2\pi r = 2019.2.\pi \frac{\sqrt{2019^4 - 1}}{2019} = 8152722\pi$.

Câu 33: Chọn A

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

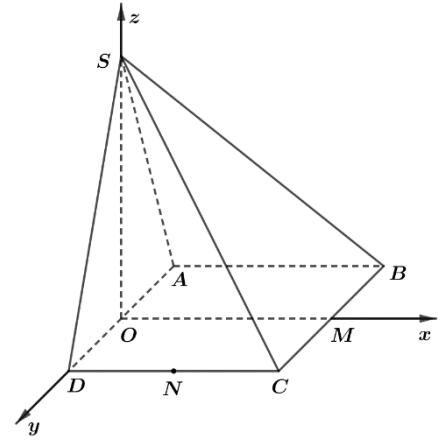
$$M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), C\left(1;\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI.$$

Ta

có:



$$\overrightarrow{MI} = (x-1;y;z), \overrightarrow{NI} = \left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2};z\right), \overrightarrow{CI} = \left(x-1;y-\frac{1}{2};z\right), \overrightarrow{SI} = \left(x;y;z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12}\right).$$

$$\Rightarrow \text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.CMN \text{ là: } R = IM = \frac{\sqrt{93}}{12}.$$