# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

1. **Phương pháp giải:**

Dựa vào định lí, tính chất về sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Cho

*ABC*

đều. Ba đường cao

*AM* , *BN*,*CP* cắt nhau tại *O* . Chứng minh rằng:

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. *O* là trọng tâm của
3. *AM*  *BN*  *CP*

*ABC*

# Lời giải:

**Bài 2.** Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

# Lời giải

**Bài 3.** Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

# Lời giải

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* và trung tuyến *AM* . Chứng minh trực tâm

của

*ABC* , *MAB*

và *MAC*

thẳng hàng.

# Lời giải

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* . Đường cao

*AH*. Lấy *I* là trung điểm của

*AC*.

1. Chứng minh *I* là giao điểm của 3 đường trung trực *AHC*
2. Gọi *K* và *D* lần lượt là trung điểm của *AH* và
3. Chứng minh *BK*  *AD* .

*HC*. Chứng minh

*KD* / / *AC* .

# Lời giải

**Bài 6.** Cho tam *ABC* cân tại

*A*, hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại

*I* (*D* 

*AC*, *E*  *AB*) . Tia

*AI* cắt *BC* tại *M* . Chứng minh

1. *M* là trung điểm của

*BC*.

1. Tam giác *MED* là tam giác cân.



**Lời giải**

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, đường trung tuyến *AM* và đường phân giác *BD* cắt nhau

tại

*K*. Gọi *E* là giao điểm của *CK* và

*AB*. Chứng minh

# Lời giải

*BD*  *CE*.

**Bài 8.** Cho tam giác

*ABC*. Hai đường cao

*AH* , *BK* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh rằng *CI*  *AB*.
2. Khi

*ACH*  50, hãy tính các góc

*BIH* , *HIK*.

# Lời giải



**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại

*M* . Biết góc

*BMC*  120, tính các góc của tam giác

# Lời giải

*ABC*.

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* cân tại

*A*, *M* là trung điểm của

*B*,*C*. Gọi *H* và *K* lần lượt là chân

các đường vuông góc kẻ từ *M* đến *AB* và

*AC*. Chứng minh

# Lời giải

*MH*  *MK*.

# Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

# Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

**Bài 1.** Cho  *ABC* cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AB* cắt *AM* ở *O*

. Chứng minh rằng điểm *O* cách đều ba đỉnh của *ABC*

**Bài 2.** Cho  *ABC* cân tại *A* , *O* là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm *D* trên cạnh

*AB* , điểm *E* trên cạnh sao cho *AD*  *CE* . Chứng minh rằng

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *DE* .

**Bài 3.** Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

**Bài 4.** Ông Hùng có ba cửa hàng *A*, *B*, *C* không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm

địa điểm *O* để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân ở

*AC* cắt nhau tại *O*.

*A*, đường phân giác

*AK*.

Các đường trung trực của *AB* và

1. Chứng minh rằng ba điểm *A*, *K*, *O* thẳng hàng.
2. Kéo dài *CO* cắt *AB* ở

*D*, kéo dài *BO* cắt *AC* ở

*E*. Chứng minh rằng *AK* và các đường

trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

**Bài 6.** Cho

*xOy*  90

và điểm *P* nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm *A* sao cho

*Ox* là đường trung trực của đoạn thẳng *PA* và điểm *B* sao cho *Oy* là đường trung trực của đoạn thẳng *PB* .

1. Chứng minh ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng.
2. Chứng minh *O* là giao điểm của ba đường trung trực của

*ABP*

từ đó suy ra

*ABP*

vuông.

**Bài 7.** Cho tam giác *MNP* cân ở *M* , đường cao *MH* . Các đường trung trực của *MN* và *MP*

cắt nhau ở *D* . Chứng minh ba điểm *M* , *D*, *H* thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho tam giác *ABC* cân có *A* là góc tù. Gọi *M* là trung điểm của *BC* . *N* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tam giác *BNC* cân tại *N* . Chứng minh đường thẳng *AM* và các đường

trung trực của *NB*, *NC* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 9.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ 110 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở

*E* và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 10.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại

*O* và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BD*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 11.** Cho *M* là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác *ABC* . Chứng minh rằng nếu

*M* nằm trên một cạnh của tam giác *ABC* thì *ABC* là một tam giác vuông.

**Bài 12.** Cho

*ABC* , đường phân giác

*AI*  *I*  *BC*  . Trên đoạn thẳng *IC* lấy điểm *H* , từ *H* kẻ

đường thẳng song song với *AI* cắt *AB* kéo dài tại *E* và cắt *AC* tại *F* . Chứng minh rằng:

1. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* đi qua đỉnh *A* của
2. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* vuông góc với *AI* .

*ABC* .

1. Khi *H* di động trên tia *IC* của định.

*ABC*

cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng *EF* cố

**Bài 13.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn. Các điểm

*F*, *K* , *I* lần lượt là trung điểm các cạnh

*BC*, *BA*, *AC* . Gọi *H* là giao điểm các đường trung trực *ABC* . Trên tia đối của tỉa *FH* lấy

điểm

*A*1 sao cho

*A*1*F*  *FH* . Trên tia đối của tia *KH* lấy điểm *C*1

sao cho

*KH*  *KC*1. Trên tia

đối của tia *IH* lấy điểm

*B*1 sao cho

*IH*  *IB*1 .

1. Chứng minh rằng hình lục giác một song song.

*AC*1*BA*1*CB*1 có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi

1. Chứng minh rằng:

*ABC*

= *A*1*B*1*C*1

**BA ĐƯỜNG CAO**

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 14.** Cho

*ABC* , các đường cao

*AK*, *BN*,*CM* . Điểm *H* là trực tâm của tam giác. Tìm trực

tâm của

*BHC* ,

*AHC* ,

*AHB* .

**Bài 15.** Cho tam giác *ABC* , hai đường cao *BD* và *CE* . Gọi *M* là trung điểm của minh *M* thuộc trung trực của *DE* .

*BC*. Chứng

**Bài 16.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia Mx vuông AB lấy

hai điểm *C* và *D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 17.** Cho tam giác *LMN* nhọn và điểm *S* nằm trong tam giác. Gọi *LS* cắt *MN* tại *P* , *MS* cắt *LN* tại *Q* . Chứng minh rằng nếu *LP* vuông góc với *MN* và *MQ* vuông góc với *LN* thì *NS* vuông góc với *ML* .

**Bài 18.** Cho

*NK*  *MP*

**Bài 19.** Cho

*MNP*

*ABC*

cân tại *M* , đường cao *PQ* cắt đường phân giác *MS* ở *K* . Chứng minh

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng *HC* . Qua

*K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 20.** Cho

*MNP*

vuông tại

*M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho *MQ*  *MP* ,

trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 21.** Cho

*MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

*NQ*, *PR* cắt nhau tại S.

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP*  650 . Tính *SMR* .

**Bài 22.** Cho

*BD*  *BA* .

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* sao cho

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC* , *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM*

. Chứng minh ba đường thẳng

*AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

# ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

**Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác Bài 1.**

# Bài 2.

**Bài 3.**

# Bài 4.

**Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng Bài 5.**

# Bài 6.

**Bài 7.**

# Bài 8.

**Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác**

# Bài 9.

**Bài 10.**

# Bài 11.

**Bài 12.**

# Bài 13.

**BA ĐƯỜNG CAO**

# Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác Bài 14.

**Bài 15.**

# Bài 16.

**Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy**

# Bài 17.

**Bài 18.**

# Bài 19.

**Bài 20.**

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác Bài 21.

**Bài 22.**

# PHIẾU BÀI TẬP

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

# Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

**Bài 1.** Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

1. 3 đường trung tuyến.
2. 3 đường phân giác.
3. 3 đường trung trực.
4. 3 đường cao.

**Bài 2.** Chọn đáp án đúng.

1. Cho

*ABC*

tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong
2. ngoài

*ABC* .

*ABC* .

1. trên 1 cạnh của *ABC* .
2. trùng với 1 đỉnh của *ABC* .
3. Cho

*ABC* có

*A*  90 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

1. nằm trong
2. nằm ngoài

*ABC*

*ABC*

1. là trung điểm của cạnh *BC*
2. trùng với đỉnh *A* của *ABC*
3. Cho

*ABC*

nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong
2. ngoài

*ABC*

*ABC*

1. trên một cạnh của *ABC*
2. trùng với một đỉnh của *ABC*

**Bài 3.** Cho *ΔABC* . Vẽ điểm *O* cách đều ba đỉnh *A*, *B*, *C* và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

1. *ΔABC* là tam giác nhọn.
2. *ΔABC* vuông tại *A* .
3. *ΔABC* là tam giác tù.

**Bài 4.** Cho đó.

*A*, *B*, *C* là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*  90 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau ở *O* và cắt

*BC* theo thứ tự ở *D* và *E* . Nối

*AD*, *AE*,*OB*,*OC* . Tìm tam giác bằng

*OAD* , bằng

*OAE*.

**Bài 6.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , đường cao *AH* . Tia phân giác của các góc *BAH* và *CAH* cắt

*BC* lần lượt ở *D* và *E* . Gọi *O* là giao điểm các đường phân giác của tam giác *ABC* .

1. Chứng minh rằng đường tròn tâm *O* , bán kính *OA* đi qua ba điểm
2. Tính số đo góc *DOE* .

*A*, *D*, *E* .

**Bài 7.** Tam giác *ABC* có *A* là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau ở *O*. Các điểm *B* và *C* có thuộc đường tròn tâm *O* bán kính *OA* hay không? Vì sao?

**Bài 8.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn, *O* là giao điểm hai đường trung trực của *AB* và *AC* . Trên

tia đối của tia *OB* lấy điểm *D* sao cho *OB*  *OD* .

1. Chứng minh *O* thuộc đường trung trực của *AD* và *CD* .
2. Chứng minh các

*ABD* ,

*CBD* vuông.

1. Biết *ABC*  70 . Hãy tính số đo *ADC* .

**Bài 9.** Tam giác *ABC* có ba đường trung tuyến cắt nhau tại *O* . Biết rằng điểm *O* cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác *ABC* . Chứng minh tam giác *ABC* đều.

**Bài 10.** Cho

*ABC*

đều. Trên cạnh

*AB*, *BC*,*CA* lấy theo thứ tự ba điểm

*M* , *N*, *P* sao cho

*AM*  *BN*  *CP*

1. Chứng minh

*MNP*

là tam giác đều

1. Gọi *O* là giao điểm các đường trung trực của *ABC* .

Chứng minh rằng điểm *O* cũng là giao điểm các đường trung trực của *MNP*

**Bài 11.** Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây *A*, *B*, *C*

ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí *O* để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Dựng tam giác *BCD* cân tại *D* biết *D* khác phía với *A* đối với

đường đường thẳng *BC* . Gọi O là giao điểm của *AB* và *AC* . Chứng minh rằng hàng.

*A*,*O*, *D* thẳng

**Bài 2.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm

*A*, *E*, *M* thẳng hàng.

**Bài 3.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Gọi *G* là trọng tâm, *O* là giao điểm ba đường trung trực của tam giác *ABC* .

1. Tam giác *BOC* là tam giác gì?
2. Chứng minh ba điểm *A*,*O*,*G* thẳng hàng?

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của

*AB*, *AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm *A*, *E*, *M* thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho tam giác *BCD* cân tại *D* ( *D* và *A* nằm khác phía đối với đường thẳng *BC* ). Chứng minh các đường trung trực của *AB* và *AC* đồng quy với đường thẳng *AD*

**Bài 6.** Cho *ABC* vuông ở *A* , *D* là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh *AB* và *AC* .

Chứng minh *B*, *D*,*C* thẳng hàng.

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . *M* là trung điểm của *BC* . Kẻ *ME* vuông góc *AB* tại

*E*, *MF* vuông góc với *AC* tại *F* .

1. Chứng minh rằng *AM* là đường trung trực của *EF* ?
2. Kẻ đường thẳng *d* vuông góc *AB* tại *B* , kẻ đường thẳng *d* / vuông góc với *AC* tại *C* , hai

đường thẳng *d* và *d* /

giao nhau giao tại *D* . Chứng minh rằng ba điểm

*A*, *M* , *D* thẳng hàng?

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn *ABC* . Gọi *H* ,*G*,*O* theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba

đường trung trực của tam giác. Tia *AG* cắt *BC* ở *M* . Gọi *I* là trung điểm của điểm của *GH* . Chứng minh:

1. *OM*  1 *AH*

2

*GA*, *K* là trung

1. *IGK*  *MGO*
2. Ba điểm *H* ,*G*,*O* thẳng hàng
3. *GH*  2*GO*

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* , đường phân giác *AK* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau tại *O* . Kéo dài *CO* cắt *AB* ở *D* , kéo dài *BO* cắt *AC* ở *E* .

1. Chứng minh ba điểm *A*, *K* ,*O* thẳng hàng.
2. Chúng minh *AK* và các đường trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AC* cắt đường

thẳng *AM* tại *D* . Chứng minh rằng *DA*  *DB* .

**Bài 2.** Cho tam giác cân *ABC* có *AB*  *AC* . Hai đường trung trực của hai cạnh nhau tại *O* . Chứng minh: *AOB*  *AOC* .

*AB*; *AC* cắt

**Bài 3.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm của

*BC*. Các đường trung trực của *AB* và *AC* cắt nhau

tại *O*. Tính số đo góc *OMB*.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

có góc

*A*  110. Đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh

*BIC*

cân.

1. Chứng minh

*BIC*  2180 *BAC* và tính số đo góc

*BIC*.

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ  60 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở *E*

và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 6.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Đường trung tuyến *AM* cắt đường trung trực của *AC* tại *K* .

Chứng minh rằng *KA*  *KB*  *KC*.

**Bài 7.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại *O*

và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BC*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 8.** Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

**Bài 9.** Cho tam giác đều *ABC* . Gọi *D* và *E* là hai điểm lần lượt trên hai cạnh *AB* và *AC* sao cho *BD*  *AE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng *DE* luôn đi qua một điểm cố định khi *D* và *E* di chuyển trên các cạnh *AB* và *AC* .

**Bài 10.** Cho *ABC* , *AC*  *AB* . Hai điểm *D* và *E* theo thứ tự di chuyển trên các cạnh *AB* và

*AC* sao cho *BD*  *CE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của *DE* luôn đi qua một điểm cố định.

# BA ĐƯỜNG CAO

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 1.** Cho

*ABC* có

*ABC*  90 , *AH*  *BC* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trực tâm của
2. *A* là trực tâm của
3. *B* là trực tâm của
4. *C* là trực tâm của

*ABC*

*ABC*

*ABC*

*ABC*

**Bài 2.** Cho *ABC* , hai đường cao *AM* và *BN* cắt nhau tại *H* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trọng tâm của *ABC* .
2. *HA*  2 *AM*

3

và *HB*  2 *BN*

3

1. *H* là trực tâm của

*ABC* ; *CH* là đường cao của

*ABC* .

1. *CH* là đường trung trực của *ABC* .

**Bài 3.** Cho

*ABC*

cân tại *A* có *AM*  *BC*

tại *M* . Chọn phát biểu đúng:

1. *AM* là đường trung tuyến của *ABC*
2. *AM* là đường trung trực của *BC* .
3. *AM* là đường phân giác của *BAC* .
4. Cả A, B, C đều đúng.

**Bài 4.** Cho

*D* . Khi đó

*ABC*

vuông tại *A* . Lấy *H* thuộc *AB* , vẽ *HE*  *BC* ở *E* . Tia *EH* cắt tia *CA* tại

1. *H* là trọng tâm của *BCD* .
2. *H* là trực tâm của *BCD* .
3. *H* là giao ba đường trung trực của
4. *H* là giao ba đường phân giác của

*BCD* .

*BCD* .

**Bài 5.** Cho tam giác

*AHB*, *AHC* .

*ABC*

vuông tại

*A*, đường cao *AH* . Tìm trực tâm của các giác

*ABC*,

**Bài 6.** Cho *H* là trực tâm của tam giác *ABC* không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác

*HBC*, *HAB*, *HAC*

**Bài 7.** Cho

*ABC* có

*A*  700 , *AB*  *AC* , đường phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D* , *BF*  *AC*

tại

*F* , *H* là giao điểm của *BF* và *AD* , *E* thuộc *AC* sao cho *AE*  *AB* .

1. Xác định trực tâm của
2. Tính số đo *DHF* .

*ABE* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường cao *BE* cắt đường trung tuyến *AD* ở *H* . Chứng minh *CH*

tạo với *AB* một góc 90.

**Bài 2.** Cho tam giác

*ABC*

cân tại *A* . đường cao *CH* cắt tia phân giác của góc *A* tại *D* .

Chứng minh rằng *BD*  *AC* .

**Bài 3.** Cho

*MNP*

vuông tại *M* . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* , kẻ *QR*  *NP*  *R* *NP* . Gọi *O* là

giao điểm của các đường thẳng *PM* và *RQ* . Chứng minh *PQ*  *ON* .

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho *A* là trung điểm của

*BD*. Kẻ đường

cao *AE* của tam giác *ABC* , đường cao *AF* của tam giác *ACD* . Chứng minh rằng *AE*  *AF*.

**Bài 5.** Cho tam giác *MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP* = 65°. Tính *SMR* .

*NQ*, *PR* cắt nhau tại *S* .

**Bài 6.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng

*HC* . Qua *K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* vuông cân tại

*B*. Trên cạnh *AB* lấy điểm

*H*.Trên tia đối của tia *BC*

lấy điểm *D* sao cho *BH*  *BD* . Chứng minh

a) *DH*  *AC*. b) *CH*  *AD*.

**Bài 8.** Cho tam giác *MNP* vuông tại *M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho

*MQ*  *MP* , trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D*

sao cho *BD*  *BA* .

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC*, *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM* .

Chứng minh ba đường thẳng *AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

**Bài 10.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia đó lấy hai điểm *C* và

*D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh:

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD*

**Bài 11.** Cho góc nhọn *xOy* . Trên tia *Ox* lấy điểm *A* , trên tia *Oy* lấy điểm *B* sao cho

*OA*  *OB*. Kẻ *AC*  *Oy*, *BD*  *Ox* (*C* *Ox*, *D* *Oy*) . Đường thẳng vuông góc với *Ox* tại *A* và

đường thẳng vuông góc với *Oy* tại *B* cắt nhau tại *M* . Chứng minh: *OM* , *AC*, *BD* đồng quy.

**Bài 12.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có *BD* là đường phân giác. Trên cạnh *BC* lấy điểm *E*

sao cho

*BA*  *BE*. Vẽ *CH*  *DB*. Chứng minh rằng

*BA*, *DE*,*CH* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 1.** Cho

*ABC*

đều. Ba đường cao

*AM* , *BN*,*CP* cắt nhau tại *O* . Chứng minh rằng:

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. *O* là trọng tâm của
3. *AM*  *BN*  *CP*

*ABC*

**Bài 2.** Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

**Bài 3.** Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* và trung tuyến *AM* . Chứng minh trực tâm

của

*ABC* , *MAB*

và *MAC*

thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* . Đường cao

*AH*. Lấy *I* là trung điểm của

*AC*.

1. Chứng minh *I* là giao điểm của 3 đường trung trực *AHC*
2. Gọi *K* và *D* lần lượt là trung điểm của *AH* và
3. Chứng minh *BK*  *AD* .

*HC*. Chứng minh

*KD* // *AC* .

**Bài 6.** Cho tam *ABC* cân tại

*A*, hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại

*I* (*D* 

*AC*, *E*  *AB*) . Tia

*AI* cắt *BC* tại *M* . Chứng minh

1. *M* là trung điểm của

*BC*.

1. Tam giác *MED* là tam giác cân.

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*,

đường trung tuyến *AM* và đường phân giác *BD* cắt nhau

tại

*K*. Gọi *E* là giao điểm của *CK* và

*AB*. Chứng minh

*BD*  *CE*.

**Bài 8.** Cho tam giác

*ABC*. Hai đường cao

*AH* , *BK* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh rằng *CI*  *AB*.
2. Khi

*ACH*  50, hãy tính các góc

*BIH* , *HIK*.

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại

*M* . Biết góc

*BMC*  120, tính các góc của tam giác

*ABC*.

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* cân tại

*A*, *M* là trung điểm của

*B*,*C*. Gọi *H* và *K* lần lượt là chân

các đường vuông góc kẻ từ *M* đến *AB* và

# Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

*AC*. Chứng minh

*MH*  *MK*.

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

**Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác**

**Bài 1.** Cho  *ABC* cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AB* cắt *AM* ở *O*

. Chứng minh rằng điểm *O* cách đều ba đỉnh của *ABC*

**Bài 2.** Cho  *ABC* cân tại *A* , *O* là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm *D* trên cạnh

*AB* , điểm *E* trên cạnh sao cho *AD*  *CE* . Chứng minh rằng

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *DE* .

**Bài 3.** Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

**Bài 4.** Ông Hùng có ba cửa hàng *A*, *B*, *C* không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm

địa điểm *O* để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân ở

*AC* cắt nhau tại *O*.

*A*, đường phân giác

*AK*.

Các đường trung trực của *AB* và

1. Chứng minh rằng ba điểm *A*, *K*, *O* thẳng hàng.
2. Kéo dài *CO* cắt *AB* ở

*D*, kéo dài *BO* cắt *AC* ở

*E*. Chứng minh rằng *AK* và các đường

trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

**Bài 6.** Cho

*xOy*  90

và điểm *P* nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm *A* sao cho

*Ox* là đường trung trực của đoạn thẳng *PA* và điểm *B* sao cho *Oy* là đường trung trực của đoạn thẳng *PB* .

1. Chứng minh ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng.
2. Chứng minh *O* là giao điểm của ba đường trung trực của

*ABP*

từ đó suy ra

*ABP*

vuông.

**Bài 7.** Cho tam giác *MNP* cân ở *M* , đường cao *MH* . Các đường trung trực của *MN* và *MP*

cắt nhau ở *D* . Chứng minh ba điểm *M* , *D*, *H* thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho tam giác *ABC* cân có *A* là góc tù. Gọi *M* là trung điểm của *BC* . *N* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tam giác *BNC* cân tại *N* . Chứng minh đường thẳng *AM* và các đường

trung trực của *NB*, *NC* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 9.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ 110 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở

*E* và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 10.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại

*O* và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BD*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 11.** Cho *M* là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác *ABC* . Chứng minh rằng nếu

*M* nằm trên một cạnh của tam giác *ABC* thì *ABC* là một tam giác vuông.

**Bài 12.** Cho

*ABC* , đường phân giác

*AI*  *I*  *BC*  . Trên đoạn thẳng *IC* lấy điểm *H* , từ *H* kẻ

đường thẳng song song với *AI* cắt *AB* kéo dài tại *E* và cắt *AC* tại *F* . Chứng minh rằng:

1. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* đi qua đỉnh *A* của
2. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* vuông góc với *AI* .

*ABC* .

1. Khi *H* di động trên tia *IC* của định.

*ABC*

cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng *EF* cố

**Bài 13.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn. Các điểm

*F*, *K* , *I* lần lượt là trung điểm các cạnh

*BC*, *BA*, *AC* . Gọi *H* là giao điểm các đường trung trực *ABC* . Trên tia đối của tỉa *FH* lấy

điểm

*A*1 sao cho

*A*1*F*  *FH* . Trên tia đối của tia *KH* lấy điểm *C*1

sao cho

*KH*  *KC*1. Trên tia

đối của tia *IH* lấy điểm

*B*1 sao cho

*IH*  *IB*1 .

1. Chứng minh rằng hình lục giác một song song.

*AC*1*BA*1*CB*1 có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi

1. Chứng minh rằng:

*ABC*

= *A*1*B*1*C*1

**BA ĐƯỜNG CAO**

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 14.** Cho

*ABC* , các đường cao

*AK*, *BN*,*CM* . Điểm *H* là trực tâm của tam giác. Tìm trực

tâm của

*BHC* ,

*AHC* ,

*AHB* .

**Bài 15.** Cho tam giác *ABC* , hai đường cao *BD* và *CE* . Gọi *M* là trung điểm của minh *M* thuộc trung trực của *DE* .

*BC*. Chứng

**Bài 16.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia Mx vuông AB lấy

hai điểm *C* và *D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 17.** Cho tam giác *LMN* nhọn và điểm *S* nằm trong tam giác. Gọi *LS* cắt *MN* tại *P* , *MS* cắt *LN* tại *Q* . Chứng minh rằng nếu *LP* vuông góc với *MN* và *MQ* vuông góc với *LN* thì *NS* vuông góc với *ML* .

**Bài 18.** Cho

*NK*  *MP*

**Bài 19.** Cho

*MNP*

*ABC*

cân tại *M* , đường cao *PQ* cắt đường phân giác *MS* ở *K* . Chứng minh

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng *HC* . Qua

*K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 20.** Cho

*MNP*

vuông tại

*M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho *MQ*  *MP* ,

trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 21.** Cho

*MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

*NQ*, *PR* cắt nhau tại S.

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP*  650 . Tính *SMR* .

**Bài 22.** Cho

*BD*  *BA* .

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* sao cho

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC* , *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM*

. Chứng minh ba đường thẳng *AK*, *BM* , *DH* đồng quy.