PHẦN 1: MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Các bài toán tổ hợp (hay còn gọi là các bài toán về giải tích tổ hợp) chiếm một vị trí quan trọng trong việc phát triển tư duy, tính sáng tạo của học sinh. Do sự lý thú của các bài toán này nên chúng luôn xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi, thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng. Trong nội dung này, có bài toán tính các tổng liên quan đến số tổ hợp. Khi gặp bài toán thuộc loại này, học sinh thường rất ngại tìm cách giải, có tâm lí sợ và rất dễ có tư tưởng bỏ qua bài toán. Bằng kinh nghiệm giảng dạy, tôi rút ra được một số nguyên nhân sau đây dẫn đến các em học sinh có tâm lí sợ các bài toán về tính các tổng liên quan đến số tổ hợp:

- Vì thời lượng dành cho nội dung này quá ít, nên học sinh chỉ mới được làm quen với một số bài toán ở mức độ đơn giản.
- Các tài liệu viết về tổ hợp trình bày nhiều cách giải bài toán này, trong đó có cách kết hợp kiến thức tổ hợp với đạo hàm hoặc tích phân. Điều đó tạo ra sự khó khăn nhất định cho học sinh vì lí do kiến thức về tổ hợp được học ở học kì I, còn đạo hàm được trình bày ở cuối học kì II của lớp 11, tích phân được học ở cuối chương trình lớp 12.
- Hệ thống bài tập minh hoạ cho mỗi phương pháp tính các tổng liên quan đến số tổ hợp chưa phong phú, chưa đưa các em tới nhiều tình huống.
- Các bài tập mà các em được tiếp cận chưa phản ánh được bản chất và dấu hiệu của mỗi phương pháp tính các tổng liên quan đến số tổ hợp.
- Khi dạy học sinh tìm lời giải bài toán tính các tổng liên quan đến số tổ hợp, các thầy cô giáo chưa hướng dẫn học sinh hoạt động một cách tích cực, chưa phát huy được tính tự giác, năng lực sáng tạo của học sinh.

Trong giai đoạn hiện nay, việc đổi mới phương pháp dạy học toán ở trường trung học phổ thông chủ yếu theo hướng phát huy cao độ nỗ lực cá nhân học sinh, cá nhân hoá việc dạy học, tích cực hoá hoạt động học tập của học sinh. Một trong những hoạt động quan trọng của học sinh trong quá trình giải toán đó là hoạt động nhận dạng và thể hiện, hoạt động phân loại các bài toán, hoạt động tìm tòi, suy nghĩ lời giải các bài toán nhằm nắm vững các khái niệm, các tính chất, các phương pháp, các thuật toán, các công thức.

Vấn đề đặt ra ở đây là nếu chỉ dùng kiến thức tổ hợp thuần túy thì có giải được các bài toán tính các tổng liên quan đến số tổ hợp không. Sau nhiều trăn trở, tìm tòi, tôi đã có câu trả lời: Có một công thức đơn giản liên quan đến số tổ hợp có thể giúp ta giải được loại toán này khi kết hợp nó với nhị thức Niu-tơn, có thể ví von công thức này giống như một "bảo bối" của người giải toán tổ hợp. Nó sẽ được đề cập trong phần 2, mục I.3. Để giúp học sinh vận dụng công thức này một cách linh hoạt, giáo viên cần giúp các em nhận dạng được những bài toán nào dùng được công thức đó. Cần giúp các em nhìn nhận, biến đổi công thức đó dưới nhiều hình thức khác nhau để giải được nhiều bài toán khó hơn, lạ hơn. Cần có một hệ thống bài tập phong phú, phân loại để học sinh được rèn luyện kỹ năng. Từ đó góp phần phát triển cho học sinh năng lực tìm tòi, suy nghĩ lời giải các bài toán tính các tổng liên quan đến số tổ hợp, bởi vì mục đích của việc giải toán không chỉ nắm vững từng kiểu bài toán, thậm chí từng bài tập mà rèn luyện khả năng giải bài tập nói chung để có thể ứng phó với những tình huống mới mẻ, không phụ thuộc vào khuôn mẫu có sẵn.

Vì những lí do trên, tôi chọn đề tài nghiên cứu của sáng kiến kinh nghiệm như sau: **Dùng kiến thức tổ hợp thuần túy hướng dẫn học sinh giải bài toán tính tổng các số tổ hợp.**

2. Mục đích nghiên cứu

Tìm hiểu nhu cầu và những khó khăn của học sinh khi các bài toán tính tổng các số tổ hợp. Từ đó nghiên cứu, đề xuất phương pháp khắc phục những khó khăn đó, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học môn toán trong trường trung học phổ thông.

3. Đối tượng nghiên cứu

Các bài toán tính tổng các số tổ hợp dùng kiến thức tổ hợp thuần túy để giải quyết.

4. Phương pháp nghiên cứu

a) Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết: Nghiên cứu sách giáo khoa, những tài liệu về phương pháp dạy học toán, các tài liệu về tâm lý học, giáo dục học, các công trình nghiên cứu có liên quan đến đề tài của một số tác giả, các sách tham khảo…

b) Phương pháp điều tra khảo sát thực tế: Tiến hành tìm hiểu về các số liệu thông qua giáo viên toán ở các trường phổ thông, qua bài kiểm tra học sinh trường THPT Vĩnh Lộc.

c) Phương pháp thống kê, xử lý số liệu: Tiến hành dạy thực nghiệm một số buổi ở trường THPT Vĩnh Lộc.

PHẦN 2: NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

2. Một số khai triển và công thức suy ra từ công thức nhị thức Niu-tơn

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
$$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
$$(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$
$$(1-x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2-C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n}x^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$
$$\frac{(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^0+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^4x^4+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
$$\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}$$
$$\frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2x^2+...+C_{2n+1}^{2n}x^{2n}$$
$$\frac{(1+x)^{2n+1}-(1-x)^{2n+1}}{2}=C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$
$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^n=2^n$$
$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^nC_n^n=0$$
$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+...=C_n^1+C_n^3+C_n^5+...=2^{n-1}.$$

3. Công thức quan trọng dùng trong đề tài

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}\quad (n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2;\ k=1,2,...,n)\qquad \text{(I)}$$
$$(k+1)C_{n+1}^{k+1}=(n+1)C_n^k\quad (n\in\mathbb{N}^*;\ k=0,1,...,n)\qquad \text{(II)}$$
$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}\quad (n\in\mathbb{N}^*;\ k=0,1,...,n)\qquad \text{(III)}$$

Chú ý.

- Các công thức này tương đương nhau, chỉ khác nhau về hình thức viết. Để dễ nhớ, chúng ta chỉ cần nhớ công thức (I). Tùy việc áp dụng vào bài toán cụ thể, có thể từ công thức (I) biến đổi thành các công thức (II), (III) để sử dụng cho phù hợp.
- Công thức (I) được chứng minh hết sức đơn giản như sau

Với $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ và $k=1,2,...,n$ ta có

$$kC_n^k=k.\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{k.n.(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}=n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}\ \text{(đpcm)}$$

Trong công thức (I), thay n bởi $n+1$ và thay k bởi $k+1$ ta thu được công thức (II).

Công thức (III) có được từ công thức (II) bằng cách chia cả hai vế cho $(n+1)(k+1)$.

4. Dấu hiệu nhận biết dùng các công thức (I), (II), (III) để đưa một tổng liên quan đến số tổ hợp về một tổng quen thuộc

Sử dụng các công thức (I), (II), (III) cho chúng ta một phương pháp hay và rất có hiệu quả để giải bài toán tính tổng liên quan đến số tổ hợp. Các bài toán tính tổng liên quan đến số tổ hợp có thể áp dụng được phương pháp này, nếu như số hạng tổng quát của các tổng đó có thể biến đổi thành biểu thức ở vế trái của một trong các công thức (I), (II), (III). Các bước thực hiện tính tổng liên quan đến các số tổ hợp bằng cách dùng các công thức (I), (II), (III):

- Xác định số hạng tổng quát của tổng cần tính.
- Biến đổi số hạng tổng quát đó để làm xuất hiện biểu thức ở vế trái của một trong các công thức (I), (II), (III).
- Dùng các công thức (I), (II), (III) đưa tổng đã cho về các tổng quen thuộc.

Chú ý. Chúng ta cần chú ý đến đặc điểm nổi bật của các công thức (I), (II), (III) để có những định hướng quan trọng trong giải toán.

Trong các công thức (I), (II), (III), k thay đổi còn n cố định. Như vậy, khi áp dụng các công thức này, ta có mục đích biến đổi đại lượng thay đổi k về đại lượng cố định n. Tư tưởng chung này giúp ta biến đổi tổng cần tính thành một tổng quen thuộc.

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ

Toán học là môn học mà khi dạy bao giờ cũng gắn liền giữa lí thuyết với bài tập áp dụng. Trong chương trình sách giáo khoa, kiến thức và bài tập áp dụng các công thức (I), (II), (III) hầu như không có. Vì thế các em học sinh rất lúng túng và có tâm lí lo sợ khi gặp dạng toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp, dẫn đến việc bỏ qua bài toán này thường xuất hiện trong các kỳ thi vào Đại học và Cao đẳng, thi học sinh giỏi.

Sử dụng các công thức (I), (II), (III) là một phương pháp hay và rất có hiệu quả để giải bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp, tạo nên sự độc đáo, ngắn gọn và sáng tạo trong lời giải của bài toán. Qua thực tế dạy học, tôi thấy rằng học sinh đang còn thiếu kinh nghiệm trong việc áp dụng các công thức (I), (II), (III) để giải toán nói chung và giải các bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp nói riêng.

Khi sử dụng các công thức (I), (II), (III) giải các bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp học sinh còn gặp nhiều khó khăn như sau:
- Đứng trước những tổng có liên quan đến số tổ hợp nào có thể lựa chọn sử dụng các công thức (I), (II), (III) để giải và nếu dùng được các công thức đó thì bắt đầu từ đâu để biến đổi được tổng đó. Khó khăn đó nảy sinh do hệ thống các bài tập trong sách giáo khoa chưa đa dạng, phong phú để khắc sâu phương pháp sử dụng các công thức (I), (II), (III) trong việc giải các bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp.
- Việc định hướng đúng, xác định đúng đường lối để giải cũng như chọn lựa đúng phương pháp và công cụ để giải là một yêu cầu phát triển trí tuệ cho học sinh.

Việc rèn luyện giải các bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp bằng phương pháp sử dụng các công thức (I), (II), (III) sẽ góp phần phát triển cho học sinh năng lực tìm tòi, suy nghĩ lời giải các bài toán, bởi vì mục đích của việc giải toán không chỉ nắm vững từng kiểu bài toán, thậm chí từng bài tập mà rèn luyện khả năng giải bài tập nói chung để có thể ứng phó với những tình huống mới mẻ, không phụ thuộc vào khuôn mẫu có sẵn.

Các tài liệu viết về phương pháp sử dụng các công thức (I), (II), (III) chưa nhiều, chưa đi sâu nghiên cứu các bài toán tính tổng có liên quan đến số tổ hợp giải được bằng phương pháp sử dụng các công thức (I), (II), (III) nên chưa thực sự thuận lợi cho thầy và trò trong việc dạy và học về loại toán này, chưa xây dựng được hệ thống các bài tập đa dạng, phong phú để khắc sâu phương pháp sử dụng các công thức (I), (II), (III), để học sinh có cơ hội rèn luyện kĩ năng giải toán, tạo nên sự nhạy bén trong nhiều tình huống học tập.

III. GIẢI PHÁP VÀ TỔ CHỨC THỰC HIỆN

Việc nghiên cứu các bài toán trong toán học sơ cấp bằng cách ghép thành những nhóm bài toán giải được bằng cùng một phương pháp là một việc làm hết sức cần thiết và có ý nghĩa. Trên cơ sở lý thuyết và bài tập sách giáo khoa môn toán phổ thông và một số sách toán khác, người giáo viên bằng kiến thức và kinh nghiệm của mình có thể sử dụng các phương pháp phân loại các bài toán, vạch ra sự khác biệt giữa các bài toán theo từng kiểu để giúp ích cho học sinh khi giải toán.

Để góp phần nâng cao chất lượng dạy và học, tôi đã áp dụng đề tài tại các lớp $12A_2$, $12A_3$ trong hai năm học 2014-2015, 2015-2016. Khi được tiếp cận với chuyên đề này, học sinh học tập rất hứng thú và có hiệu quả. Bằng cách kiểm tra, đối chứng tôi nhận thấy chuyên đề này đã góp phần nâng cao kĩ năng giải toán cho các em học sinh, giúp các em nhạy bén trong việc sử dụng các công thức (I), (II), (III).

Để thấy được vai trò quan trọng của các công thức trên, sau đây tôi xin trình bày một số ví dụ vận dụng. Các ví dụ này được trích từ các đề thi Đại học (ví dụ 7, 9, 17), thi thử đại học, thi học sinh giỏi và đều được giải chi tiết, kèm theo những phân tích và nhận xét để học sinh thấy được ứng dụng rộng rãi, cái hay, cái đẹp của các công thức (I), (II), (III).

Ví dụ 1. Tính tổng

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n.$$

Lời giải. Tổng cần tính hết sức quen thuộc. Sau đây tôi xin đưa ra 3 cách giải bài toán này, trong đó có cách giải sử dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Từ đó có thể bình luận về ưu nhược điểm của từng cách.

Cách 1. Số hạng tổng quát của tổng S là kC_n^k, với $k = 1, 2, \dots, n$.

Số hạng tổng quát này làm ta nhớ đến công thức

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \ (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2;\ k = 1, 2, \dots, n).$$

Áp dụng công thức này, ta biến đổi được tổng S như sau

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}\right) = n.2^{n-1}.$$

Cách 2. Sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $k = 0, 1, \dots, n$, ta viết lại tổng đã cho như sau:

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 1C_n^{n-1}.$$

Như vậy, ta có

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 1C_n^{n-1}$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được

$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \dots + nC_n^{n-1} + nC_n^n$$

$\Rightarrow 2S = n.2^n$

Vậy $S = n.2^{n-1}$.

Cách 3. Dùng đạo hàm

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$ (2)

Trong (2), cho $x = 1$ ta được

$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n.2^{n-1}$.

Nhận xét.

- Việc dùng cách 1 là hết sức tự nhiên, tạo nên sự đơn giản trong lời giải bài toán. Cách giải này chỉ dùng các kiến thức tổ hợp thuần túy, không mang tính kĩ thuật trong biến đổi, tạo nên sự nhẹ nhàng, dễ hiểu đối với đa số học sinh.
- Hai cách giải còn lại phải biết kết hợp nhiều kiến thức, có nhiều biến đổi mang tính kĩ thuật cao, thậm chí còn phải kết hợp với đạo hàm. Vì vậy, hai cách giải này không hề đơn giản đối với học sinh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + 6C_{2n}^6 + ... + 2nC_{2n}^{2n} = n.2^{2n-1}$.

Lời giải. Gọi S là vế trái của đẳng thức cần chứng minh.

Số hạng tổng quát của S là $2kC_{2n}^{2k}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Vận dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2; k = 1, 2, ..., n)$ ta có

$$2kC_{2n}^{2k} = 2nC_{2n-1}^{2k-1}$$

Do đó $S = 2n\left(C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^3 + C_{2n-1}^5 + ... + C_{2n-1}^{2n-1}\right) = 2n.2^{2n-2} = n.2^{2n-1}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $1.2^2 C_{2n}^2 + 2.2^4 C_{2n}^4 + 3.2^6 C_{2n}^6 + ... + n.2^{2n} C_{2n}^{2n} = n.\left(3^{2n-1} + 1\right)$.

Lời giải. Gọi S là vế trái của đẳng thức cần chứng minh.

Ta biến đổi số hạng tổng quát của S như sau:

$k.2^{2k} C_{2n}^{2k} = 2^{2k-1}.2kC_{2n}^{2k} = 2^{2k-1}.2nC_{2n-1}^{2k-1}$, với $k = 1, 2, ..., n$.

Do đó $S = 2n\left(C_{2n-1}^1.2^1 + C_{2n-1}^3.2^3 + ... + C_{2n-1}^{2n-1}.2^{2n-1}\right) = 2n.\dfrac{(1+2)^{2n-1} - (1-2)^{2n-1}}{2} = n\left(3^{2n-1} + 1\right)$.

Ví dụ 4. Tính tổng $S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1).nC_n^n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của S là $(k-1).kC_n^k$, $k = 2, 3, ..., n$.

Với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ và $k = 2, 3, ..., n$ áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ hai lần ta có

$(k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Áp dụng kết quả vừa có, ta được

$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1).nC_n^n = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-2}\right)$

$= n(n-1).2^{n-2}$.

Nhận xét. Ta hãy xem xét cách giải bài toán trên bằng cách kết hợp kiến thức tổ hợp với đạo hàm cấp hai sau đây.

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$ (2)

Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 x + 3.4C_n^4 x^2 + ... + (n-1)nC_n^n x^{n-2} \quad (3)$$

Trong (3), cho $x = 1$ ta được

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1).nC_n^n = n(n-1).2^{n-2}.$$

Rõ ràng lời giải trên mang tính kĩ thuật cao và khó đối với nhiều học sinh.

Ví dụ 5. Tính tổng $S = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4.C_n^4 + ... + (n-2)(n-1)nC_n^n$.

Lời giải. Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ nhiều lần để biến đổi số hạng tổng quát của S như sau:

$$(k-2)(k-1)kC_n^k = (k-2)(k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-2)(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(k-2)(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$
$$= n(n-1)(k-2)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)(n-2)C_{n-3}^{k-3}.$$

Suy ra

$$S = n(n-1)(n-2)\left(C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2 + ... + C_{n-3}^{n-3}\right) = n(n-1)(n-2).2^{n-3}.$$

Ví dụ 6. Tính tổng

$$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + ... + n^2C_n^n \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n > 2.$$

Lời giải. Xét số hạng tổng quát của tổng S là $k^2C_n^k$, với $k = 2,3,4,...,n$.

Trong số hạng tổng quát này có biểu thức kC_n^k.

Từ đó áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, ta có

$$k^2C_n^k = k.kC_n^k = k.nC_{n-1}^{k-1} = n[(k-1)+1]C_{n-1}^{k-1} = n(k-1)C_{n-1}^{k-1} + nC_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$$

Hoặc: $k^2C_n^k = [k(k-1)+k]C_n^k = (k-1)kC_n^k + kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Áp dụng kết quả này và chú ý $1^2C_n^1 = nC_{n-1}^0$, ta có

$$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + ... + n^2C_n^n = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + ... + C_{n-2}^{n-2}\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right)$$
$$= n(n-1).2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1).2^{n-2}.$$

Nhận xét. Sau đây là hai cách tính tổng trên bằng cách kết hợp kiến thức tổ hợp với đạo hàm.

1) Ta có $k^2C_n^k = [k(k-1)+k]C_n^k = (k-1)kC_n^k + kC_n^k$ nên

$$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + ... + n^2C_n^n$$
$$= \left(1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1).nC_n^n\right) + \left(1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n\right)$$
$$= n(n-1).2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1).2^{n-2}$$

Cách giải này sử dụng các tổng ở Ví dụ 1 và Ví dụ 4. Đây là kĩ thuật tách tổng cần tính thành hai tổng quen thuộc. Nhưng bản chất của cách giải vẫn là kết hợp kiến thức tổ hợp với đạo hàm nên không hề đơn giản đối với học sinh.

2) Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n \quad (1)$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) với $x \neq 0$ ta được

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1x + 2C_n^2x^2 + 3C_n^3x^3 + ... + nC_n^nx^n \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3) ta được

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2x + 3^2C_n^3x^2 + ... + n^2C_n^nx^{n-1} \quad (4)$$

Trong (4), cho $x=1$ ta được
$$S=1^2C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+...+n^2C_n^n=n.2^{n-1}+n(n-1).2^{n-2}=n(n+1).2^{n-2}.$$
Cách giải này rất khó đối với học sinh.

Ví dụ 7 (ĐH khối A năm 2005). Tìm số nguyên dương n sao cho
$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005 \quad (1)$$
Lời giải. Gọi S là vế trái của PT (1).

Số hạng tổng quát của S là $(k+1).(-2)^kC_{2n+1}^{k+1}, k=0,1,...,2n$.

Đặc điểm của số hạng tổng quát này làm ta nhớ đến công thức
$$(k+1)C_{n+1}^{k+1}=(n+1)C_n^k \quad (n\in\mathbb{N}^*; k=0,1,...,n)$$
Áp dụng công thức này, ta biến đổi số hạng tổng quát của S như sau
$$(k+1).(-2)^kC_{2n+1}^{k+1}=(-2)^k.(k+1)C_{2n+1}^{k+1}=(-2)^k.(2n+1)C_{2n}^k=(2n+1).C_{2n}^k(-2)^k.$$
Từ đó
$$S=C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$=(2n+1).\left[C_{2n}^0(-2)^0+C_{2n}^1(-2)^1+C_{2n}^2(-2)^2+C_{2n}^3(-2)^3+...+C_{2n}^{2n}(-2)^{2n}\right]$$
$$=(2n+1).(1-2)^{2n}=2n+1.$$
Theo giả thiết ta có $2n+1=2005\Leftrightarrow n=1002$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị cần tìm của n là $n=1002$.

Nhận xét. +) Sau đây là lời giải dựa vào đạo hàm

Ta có $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Đạo hàm hai vế của (1) ta có
$$(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x+3C_{2n+1}^3x^2+...+(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}, \forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$$
Trong (2), cho $x=-2$ ta được
$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2n+1$$
Theo giả thiết ta có $2n+1=2005\Leftrightarrow n=1002$ (thỏa mãn).

+) Việc bình luận về hai cách giải trên xin dành cho các bạn.

Ví dụ 8. Tính tổng
$$S=\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n \ (n\in\mathbb{N}^*).$$
Lời giải. Xét số hạng tổng quát của tổng S là $\frac{1}{k+1}C_n^k, k=0,1,...,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có
$$S=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+...+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-C_{n+1}^0\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
Nhận xét.

+) Lời giải trên có ưu điểm là ngắn gọn, dễ trình bày và có hướng giải "tự nhiên". Quan trọng hơn cả là giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải bài toán ngay cả khi chưa học đạo hàm và tích phân.

+) Sau đây là cách giải bài toán bằng cách dùng tích phân để các bạn xem xét.

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Suy ra: $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n\right) dx$

Ta có: $\int_0^1 (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Mặt khác:

$$\int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n\right) dx = \left.\left(x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + ... + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

Vậy: $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ví dụ 9 (ĐH khối A năm 2007). Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Lời giải. Gọi S là vế trái của đẳng thức đã cho.

Số hạng tổng quát của S là $\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có $\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}$

Từ đó

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + ... + C_{2n+1}^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + ... + C_{2n+1}^{2n}\right) - C_{2n+1}^0\right] = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Ta có đpcm.

Nhận xét.

+) Các bạn hãy xem xét lời giải bài toán trên dựa vào tích phân như sau

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$$\Rightarrow (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right) dx$$

- $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \left.\frac{(1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1 = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (1)
- $\int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right) dx = \left.\left(C_{2n}^1 \frac{x^2}{2} + C_{2n}^3 . \frac{x^4}{4} + C_{2n}^5 . \frac{x^6}{6} + ... + C_{2n}^{2n-1} . \frac{x^{2n}}{2n}\right)\right|_0^1$

$= \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

+) Ta thấy cách giải dựa vào tích phân khá phức tạp. Lời giải chỉ dựa vào các công thức về tổ hợp thuần túy ngắn gọn hơn và tiếp cận tự nhiên hơn.

Ví dụ 10. Tính tổng $S = C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \ldots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của tổng S là $\frac{1}{2k+1}C_{2n}^{2k}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta biến đổi số hạng tổng quát của S như sau: $\frac{1}{2k+1}C_{2n}^{2k} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}$.

Suy ra $S = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) = \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

Ví dụ 11. Tính tổng $S = \frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + \ldots + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của tổng S là $\frac{1}{2k+2}C_{2n}^{2k}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có

$$\frac{1}{2k+2}C_{2n}^{2k} = \frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{2k+1}C_{2n}^{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k+2}\right).\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1} - \frac{1}{2n+1}.\frac{1}{2k+2}C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1} - \frac{1}{2n+1}.\frac{1}{2n+2}C_{2n+2}^{2k+2}.$$

Suy ra $S = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left(C_{2n+2}^2 + C_{2n+2}^4 + \ldots + C_{2n+2}^{2n+2}\right)$

$$= \frac{2^{2n}}{2n+1} - \frac{2^{2n+1} - 1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n.2^{2n+1} + 1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Ví dụ 12. Tính tổng $S = \frac{2^2}{2}C_{2n}^1 + \frac{2^4}{4}C_{2n}^3 + \frac{2^6}{6}C_{2n}^5 + \ldots + \frac{2^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của tổng S là $\frac{2^{2k}}{2k}C_{2n}^{2k-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có

$$\frac{2^{2k}}{2k}C_{2n}^{2k-1} = 2^{2k}.\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1} = 2^{2k}.\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}$$

Suy ra

$$S = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^2.2^2 + C_{2n+1}^4.2^4 + \ldots + C_{2n+1}^{2n}.2^{2n}\right) = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(1+2)^{2n+1} + (1-2)^{2n+1}}{2} - C_{2n+1}^0\right] = \frac{3(3^{2n} - 1)}{2(2n+1)}.$$

Ví dụ 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \frac{1}{5}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n = \frac{1}{156}.$$

Lời giải. Gọi S là vế trái của PT đã cho.

Số hạng tổng quát của S là $\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k,\ k=0,1,...,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ nhiều lần ta có

$$\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k=(-1)^k\frac{k+1}{k+2}.\frac{1}{k+1}C_n^k=(-1)^k\left(1-\frac{1}{k+2}\right).\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}(-1)^kC_{n+1}^{k+1}-\frac{1}{n+1}(-1)^k.\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}(-1)^kC_{n+1}^{k+1}-\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}(-1)^kC_{n+2}^{k+2}$$

Từ đó $S=\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n$

$$=\frac{1}{n+1}\left[C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^nC_{n+1}^{n+1}\right]-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4-C_{n+1}^5+...+(-1)^nC_{n+2}^{n+2}\right]$$

$$=-\frac{1}{n+1}\left(-C_{n+1}^0\right)-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(-C_{n+2}^0+C_{n+2}^1\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}(n+1)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Từ đó ta có $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{156}\Leftrightarrow(n+1)(n+2)=12.13\Leftrightarrow n=11$ (vì $n\in\mathbf{N}^*$).

Nhận xét. Mời các bạn xem xét lời giải bài toán trên bằng cách kết hợp kiến thức tổ hợp với tích phân

Với mọi $x\in\mathbf{R}$ và mọi số nguyên dương *n*, theo nhị thức Niu-tơn ta có

$$C_n^0x-C_n^1x^2+\ldots+(-1)^nC_n^nx^{n+1}=\left(C_n^0-C_n^1x+\ldots+(-1)^nC_n^nx^n\right)x=(1-x)^nx.$$

Suy ra $\int_0^1\left(C_n^0x-C_n^1x^2+\ldots+(-1)^nC_n^nx^{n+1}\right)dx=\int_0^1(1-x)^nx\,dx.$

Hay $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n=\int_0^1(1-x)^ndx-\int_0^1(1-x)^{n+1}dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, với mọi $n\in\mathbf{N}^*$.

Từ đó ta có $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{156}\Leftrightarrow n^2+3n-154=0\Leftrightarrow n=11$ (vì $n\in\mathbf{N}^*$).

Ví dụ 14. Tính tổng $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của tổng S là $\frac{(-1)^kkC_n^k}{(k+1)(k+2)},\ k=1,2,...,n$

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có

$$\frac{(-1)^kkC_n^k}{(k+1)(k+2)}=(-1)^kk.\frac{1}{k+2}\frac{1}{k+1}C_n^k=(-1)^kk.\frac{1}{k+2}.\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}(-1)^kk.\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}(-1)^kk.\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}$$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}(-1)^kk.C_{n+2}^{k+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(-1)^k[(k+2)-2].C_{n+2}^{k+2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(-1)^k(k+2)C_{n+2}^{k+2}-2(-1)^kC_{n+2}^{k+2}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(-1)^k(n+2)C_{n+1}^{k+1}-2(-1)^kC_{n+2}^{k+2}\right]$$

Từ đó

$$S=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(n+2)\left(-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^nC_{n+1}^{n+1}\right)-2\left(-C_{n+2}^3+C_{n+2}^4-C_{n+2}^5+...+(-1)^nC_{n+2}^{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\left[\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4+...+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)-\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1\right)\right]$$

$$-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left[\left(C_{n+2}^0-C_{n+2}^1+C_{n+2}^2-C_{n+2}^3+C_{n+2}^4-C_{n+2}^5+...+(-1)^nC_{n+2}^{n+2}\right)-\left(C_{n+2}^0-C_{n+2}^1+C_{n+2}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left\{-(n+2)\left[(1-1)^{n+1}-(1-n-1)\right]-2\left[(1-1)^{n+2}-\left(1-n-2+\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[-(n+2)n+(n+1)n\right]=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}.$$

Nhận xét.

+) Đây là bài toán rất khó. Cách giải chỉ dùng kiến thức tổ hợp thuần túy phần nào giảm bớt độ khó đó, tạo ra sự tự nhiên trong định hướng về phương pháp giải quyết bài toán.

+) Mời các bạn xem xét lời giải bài toán có sử dụng kiến thức tổ hợp kết hợp với đạo hàm và tích phân

Ta có $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+C_n^4x^4-...+(-1)^nC_n^nx^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) được

$$-n(1-x)^{n-1}=-C_n^1+2C_n^2x-3C_n^3x^2+4C_n^4x^3-...+(-1)^nnC_n^nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow -nx(1-x)^{n-1}=-C_n^1x+2C_n^2x^2-3C_n^3x^3+4C_n^4x^4-...+(-1)^nnC_n^nx^n$$

$$\Rightarrow \int -nx(1-x)^{n-1}dx=\int\left[-C_n^1x+2C_n^2x^2-3C_n^3x^3+4C_n^4x^4-...+(-1)^nnC_n^nx^n\right]dx$$

$$\Rightarrow n\int\left[(1-x)^n-(1-x)^{n-1}\right]dx=\int\left[-C_n^1x+2C_n^2x^2-3C_n^3x^3+4C_n^4x^4-...+(-1)^nnC_n^nx^n\right]dx$$

$$\Rightarrow n\left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^n}{n}\right]=\frac{-C_n^1}{2}x^2+\frac{2C_n^2}{3}x^3-\frac{3C_n^3}{4}x^4+\frac{4C_n^4}{5}x^5-...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{n+1}x^{n+1}+C \quad (2)$$

Ta xác định hằng số C bằng cách trong (2) cho $x=0$, ta được

$$n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=C \Leftrightarrow C=\frac{1}{n+1}$$

Lấy tích phân trên đoạn [0; 1] hai vế của (2) ta được

$$\int_0^1 n\left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^n}{n}\right]dx=\int_0^1\left[\frac{-C_n^1}{2}x^2+\frac{2C_n^2}{3}x^3-\frac{3C_n^3}{4}x^4+\frac{4C_n^4}{5}x^5-...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+1}\right]dx$$

Hay:

$$n\left[\frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)}\right]\Bigg|_0^1=\left(\frac{-C_n^1}{2.3}x^3+\frac{2C_n^2}{3.4}x^4-\frac{3C_n^3}{4.5}x^5+\frac{4C_n^4}{5.6}x^6-...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\frac{1}{n+1}x\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow n\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+\frac{4C_n^4}{5.6}-...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+\frac{4C_n^4}{5.6}-...+\frac{(-1)^nnC_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}.$$

Cách giải này rất khó đối với học sinh.

Ví dụ 15. Tính tổng $S=\frac{1}{1.2}C_n^0+\frac{1}{2.3}C_n^1+...+\frac{1}{(n+1).(n+2)}C_n^n$.

Lời giải. Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ hai lần ta biến đổi số hạng tổng quát của S là

$$\frac{1}{(k+1).(k+2)}C_n^k=\frac{1}{k+2}.\left(\frac{1}{k+1}C_n^k\right)=\frac{1}{k+2}.\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}\right)=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}.$$

Vậy

$$S=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+...+C_{n+2}^{n+2}\right)=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2}-C_{n+2}^0-C_{n+2}^1\right)=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}.$$

Ví dụ 16. Tính tổng $S=\frac{1}{1.2.3}C_n^0+\frac{1}{2.3.4}C_n^1+...+\frac{1}{(n+1).(n+2)(n+3)}C_n^n$.

Lời giải. Số hạng tổng quát của S là $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}C_n^k, k=0,1,...,n$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ ba lần ta có

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}C_n^k=\frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{k+3}.\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{k+3}C_{n+2}^{k+2}=\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}C_{n+3}^{k+3}.$$

Suy ra

$$S=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(C_{n+3}^3+C_{n+3}^4+...+C_{n+3}^{n+3}\right)=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(2^{n+3}-C_{n+3}^0-C_{n+3}^1-C_{n+3}^2\right)$$
$$=\frac{2^{n+4}-n^2-7n-14}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Ví dụ 17 (ĐH khối B năm 2003). Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$$S=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Lời giải. Số hạng tổng quát của S là $\frac{2^{k+1}-1}{k+1}C_n^k, k=0,1,...,n.$

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, ta có

$$\frac{2^{k+1}-1}{k+1}C_n^k=(2^{k+1}-1).\frac{1}{k+1}C_n^k=(2^{k+1}-1).\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.2^{k+1}-\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Từ đó

$$S=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1.2+C_{n+1}^2.2^2+...+C_{n+1}^{n+1}.2^{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+...+C_{n+1}^{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[(1+2)^{n+1}-1\right]-\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$$

Nhận xét

+) Mời các bạn xem việc tính tổng trên bằng cách kết hợp kiến thức tổ hợp với tích phân và cho bình luận

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

Suy ra $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right) dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + C_n^1.\frac{x^2}{2} + C_n^2.\frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$

+) Cách giải chỉ dùng kiến thức tổ hợp thuần túy có một số ưu điểm sau:

- Đây là cách tính trực tiếp chỉ dùng kiến thức cơ bản của giải tích tổ hợp, không phải dùng đến các kiến thức về tích phân.
- Đề thi hiện nay có mục tiêu là phân loại học sinh, phát huy tính sáng tạo, không dập khuôn, không theo lối mòn trong khi giải toán. Cách giải trên phần nào đáp ứng được mục tiêu đó. Hơn nữa từ cách giải trên cũng có thể đề ra các bài toán khác, chẳng hạn

1. Tính tổng:

$$(a-1)C_n^0 + \frac{a^2-1}{2}C_n^1 + \frac{a^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{a^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

2. Tính:

$$(a-b)C_n^0 + \frac{a^2-b^2}{2}C_n^1 + \frac{a^3-b^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}C_n^n.$$

Ví dụ 18. Cho đa thức $P(x) = (2x-1)^{2015}$ viết dưới dạng khai triển là

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_{2015} x^{2015}.$$

Tính tổng $S = a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \ldots + 2015^2 a_{2015}$.

Lời giải. Ta có $P(x) = (2x-1)^{2015} = (-1+2x)^{2015} = \sum_{k=0}^{2015} C_{2015}^k (-1)^{2015-k}(2x)^k$

Hệ số của số hạng chứa x^k là $C_{2015}^k(-1)^{2015-k}.2^k, k = 0,1,\ldots,2015$.

Số hạng tổng quát của tổng S là $k^2 a_k, k = 1,2,\ldots,2015$.

Ta có

$k^2 a_k = k^2 C_{2015}^k(-1)^{2015-k}.2^k = C_{2015}^k(-1)^{2015-k}2^k k.kC_{2015}^k = (-1)^{2015-k}.2^k k.2015.C_{2014}^{k-1}$

$= 2015.(-1)^{2015-k}2^k.[(k-1)+1]C_{2014}^{k-1} = 2015C_{2014}^{k-1}(-1)^{2015-k}2^k + 2015.(-1)^{2015-k}2^k.(k-1)C_{2014}^{k-1}$

$= 2015C_{2014}^{k-1}(-1)^{2015-k}2^k + 2015.2014.(-1)^{2015-k}2^k.C_{2013}^{k-2}$

Từ đó

$a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \ldots + 2015^2 a_{2015} = 2015\left(C_{2014}^0.2 - C_{2014}^1.2^2 + C_{2014}^2.2^3 - \ldots + C_{2014}^{2014}.2^{2015}\right)$

$+ 2015.2014.\left(-C_{2013}^0.2^2 + C_{2013}^1.2^3 - \ldots + C_{2013}^{2013}.2^{2015}\right)$

$= 2015.2.(1-2)^{2014} + 2015.2014.(-2^2).(1-2)^{2013}$

$= 2015.2 + 2015.2014.4 = 16\,236\,870$

Nhận xét. Mời các bạn xem lời giải tính tổng trên bằng đạo hàm và so sánh với cách giải trên.

Ta có $P'(x)=2015.(2x-1)^{2014}.2=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+2015.a_{2015}x^{2014}$

$P''(x)=2015.2014.(2x-1)^{2013}.2^2=2a_2+3.2a_3x+\ldots+2015.2014.a_{2015}x^{2013}$

$\Rightarrow P'(1)=2015.2=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+2015a_{2015}$ (1)

$P''(1)=2015.2014.4=2a_2+3.2a_3+\ldots+2015.2014a_{2015}$ (2)

Céng (1) vµ (2) theo vÕ ta ®îc:

$a_1+2^2a_2+3^2a_3+\ldots+2015^2a_{2015}=2015.2+2015.2014.4=16\,236\,870.$

Hoặc: $P'(x)=2015.(2x-1)^{2014}.2=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+2015.a_{2015}x^{2014}$ (3)

Nhân hai vế của (3) với $x\neq 0$, ta được

$2015.x(2x-1)^{2014}.2=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\ldots+2015.a_{2015}x^{2015}$ (4)

Lấy đạo hàm hai vế của (4) ta có

$2015.2(2x-1)^{2014}+2015.2.2014(2x-1)^{2013}.2x$

$=a_1+2^2a_2x+3^2a_3x^2+\ldots+2015^2.a_{2015}x^{2014},\ \forall x\neq 0$ (5)

Trong (5), cho $x=1$ ta được

$S=a_1+2^2a_2+3^2a_3+\ldots+2015^2a_{2015}=2015.2+2015.2014.4=16\,236\,870.$

Ví dụ 19. Hãy tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$C_{2n}^0-2.2.C_{2n}^1+3.2^2.C_{2n}^2-\ldots-2n.2^{2n-1}.C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}.C_{2n}^{2n}=2013.$$

Lời giải. Gọi S là vế trái của PT đã cho.

Số hạng tổng quát của S là $(-1)^k(k+1).2^k.C_{2n}^k, k=0,1,\ldots,2n$.

Ta biến đổi

$(-1)^k(k+1).2^k.C_{2n}^k=(-1)^k.2^k.kC_{2n}^k+(-1)^k.2^k.C_{2n}^k=(-1)^k.2^k.2nC_{2n-1}^{k-1}+(-1)^k.2^k.C_{2n}^k$

Từ đó

$$C_{2n}^0-2.2.C_{2n}^1+3.2^2.C_{2n}^2-\ldots-2n.2^{2n-1}.C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}.C_{2n}^{2n}$$

$$=2n.\left(-C_{2n-1}^0.2+C_{2n-1}^1.2^2-\ldots+C_{2n-1}^{2n-1}.2^{2n}\right)+\left(C_{2n}^0-C_{2n}^1.2+\ldots+C_{2n}^{2n}.2^{2n}\right)$$

$$=2n.(-2).(1-2)^{2n-1}+(1-2)^{2n}=4n+1.$$

Theo giả thiết ta có $1+4n=2013\Leftrightarrow n=503$.

Nhận xét. Sau đây là cách giải sử dụng đạo hàm để các bạn so sánh.

Ta có $(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+\ldots-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

Suy ra $x(1-x)^{2n}=C_{2n}^0x-C_{2n}^1x^2+C_{2n}^2x^3-C_{2n}^3x^4+\ldots-C_{2n}^{2n-1}x^{2n}+C_{2n}^{2n}x^{2n+1}$ với $x\neq 0$ (2)

Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được

$(1-x)^{2n}-2n.x(1-x)^{2n-1}=C_{2n}^0-2C_{2n}^1x+3C_{2n}^2x^2-4C_{2n}^3x^3+\ldots-2nC_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+(2n+1)C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (3)

Trong (3) cho $x=2$ ta được

$1+4n=C_{2n}^0-2.2.C_{2n}^1+3.2^2.C_{2n}^2-\ldots-2n.2^{2n-1}.C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}.C_{2n}^{2n}$

Theo giả thiết ta có $1+4n=2013\Leftrightarrow n=503$.

Lời giải này có tính kĩ thuật cao nên rất khó đối với học sinh.

Ví dụ 20. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+...+(-1)^k.k(k-1).2^{k-2}.C_{2n+1}^k+...-2n(2n+1).2^{2n-1}.C_{2n+1}^{2n+1}=-40200$$

Lời giải. Gọi S là vế trái của PT đã cho.

Số hạng tổng quát của S là $(-1)^k.k(k-1).2^{k-2}.C_{2n+1}^k,\ k=2,3,...,2n+1$.

Ta có

$$(-1)^k.k(k-1).2^{k-2}.C_{2n+1}^k=(-1)^k.2^{k-2}.(k-1).kC_{2n+1}^k=(-1)^k.2^{k-2}.(k-1).(2n+1)C_{2n}^{k-1}$$
$$=(2n+1).(-1)^k.2^{k-2}.(k-1)C_{2n}^{k-1}=(2n+1).(-1)^k.2^{k-2}.2n.C_{2n-1}^{k-2}=(2n+1).2n.(-1)^k.2^{k-2}C_{2n-1}^{k-2}$$

Từ đó

$$2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+...+(-1)^k.k(k-1).2^{k-2}.C_{2n+1}^k+...-2n(2n+1).2^{2n-1}.C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$=(2n+1).2n.\left(C_{2n-1}^0-C_{2n-1}^1.2+C_{2n-1}^2.2^2-...-C_{2n-1}^{2n-1}.2^{2n-1}\right)$$
$$=(2n+1).2n.(1-2)^{2n-1}=-(2n+1).2n$$

Do đó, theo giả thiết ta có

$(2n+1).2n=40200\Leftrightarrow(2n+1).2n=201.200\Leftrightarrow 2n=200\Leftrightarrow n=100$ (vì $n\in\mathbb{N}^*$)

Nhận xét. Mời các bạn xem cách sử dụng đạo hàm để giải bài toán và cho bình luận.

Ta có $(1-x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2-C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n}x^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$(2n+1)(1-x)^{2n}=-C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x-3C_{2n+1}^3x^2+...+2nC_{2n+1}^{2n}x^{2n-1}-(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$ (2)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$-2n(2n+1)(1-x)^{2n-1}=2C_{2n+1}^2-3.2C_{2n+1}^3x+...-2n(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n-1}$ (3)

Trong (3) cho $x=2$ ta được

$$2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+...+(-1)^k.k(k-1).2^{k-2}.C_{2n+1}^k+...-2n(2n+1).2^{2n-1}.C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$=-2n(2n+1).$$

Theo giả thiết ta có $2n(2n+1)=40200\Leftrightarrow 2n^2+n-20100=0\Leftrightarrow n=100$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính các tổng sau đây

1. $S_1=1C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-...+(-1)^nnC_n^n$ với $n\in\mathbb{N}^*,n>1$.

2. $S_2=1C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+nC_n^{n-1}$.

3. $S_3=1C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n$ với $n\in\mathbb{N}^*,n>2$.

4. $S_4=1C_n^2-2C_n^3+3C_n^4-...+(-1)^n(n-1)C_n^n$ với $n\in\mathbb{N}^*,n>2$.

5. $S_5=C_n^1+2.aC_n^2+3.a^2C_n^3+4.a^3C_n^4+...+n.a^{n-1}C_n^n,\ n\in\mathbb{N}^*$

6. $S_6=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n,\ n\in\mathbb{N}^*$

7. $S_7=C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-...+(-1)^n(n+1)C_n^n,\ n\in\mathbb{N}^*$

8. $S_8=1.C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n,\ n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$

9. $S_9=n.2^nC_n^0+(n-1).2^{n-1}C_n^1+...+2C_n^{n-1}$

10. $S_{10}=4C_{2014}^2+8C_{2014}^4+12C_{2014}^6+...+4028C_{2014}^{2014}$

11. $S_{11} = 2^2.C_n^2 - 3^2.C_n^3 + 4^2.C_n^4 - ... + (-1)^n.n^2.C_n^n$

12. $S_{12} = n^2C_n^0 + (n-1)^2C_n^1 + (n-2)^2C_n^2 + ... + 2^2C_n^{n-2} + 1^2C_n^{n-1}$.

13. $S_{13} = 5^{n-1}C_n^1 - 2.5^{n-2}C_n^2 + 3.5^{n-3}C_n^3 - 4.5^{n-4}C_n^4 ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

14. $S_{14} = 1^2C_n^1.a^{n-1} + 2^2C_n^2.a^{n-2} + ... + (n-1)^2C_n^{n-1}.a^1 + n^2C_n^n.a^0$, $n \in \mathbb{N}^*$

15. $S_{15} = 1^3C_n^1 + 2^3C_n^2 + 3^3C_n^3 + ... + n^3C_n^n$.

16. $S_{16} = 1.2C_{n+1}^1 + 3.4.a^2C_{n+1}^2 + 5.6.a^4C_{n+1}^3 + 7.8.a^6C_{n+1}^4 + ... + (2n+1)(2n+2).a^{2n}C_{n+1}^{n+1}$ với $a > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

17. $S_{17} = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

18. $S_{18} = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

19. $S_{19} = \frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + ... + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$

20. $S_{20} = \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \frac{2^4}{4}C_n^3 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

21. $S_{21} = \frac{1}{1!.(2n-1)!} + \frac{1}{3!.(2n-3)!} + \frac{1}{5!.(2n-5)!} + ... + \frac{1}{(2n-1)!.1!}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

22. $S_{22} = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

23. $S_{23} = \frac{a^2}{2}C_n^1 + \frac{a^3}{3}C_n^2 + \frac{a^4}{4}C_n^3 + ... + \frac{a^n}{n}C_n^{n-1} + \frac{a^{n+1}}{n+1}C_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

24. $S_{24} = 2.C_n^0 + 2^2.\frac{1}{2}C_n^1 + 2^3.\frac{1}{3}C_n^2 + 2^4.\frac{1}{4}C_n^3 + ... + 2^n.\frac{1}{n}C_n^{n-1} + 2^{n+1}.\frac{1}{n+1}C_n^n$

25. $S_{25} = \frac{1}{1.2}C_n^1 + \frac{1}{2.3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n.(n+1)}C_n^n$.

Bài 2. Cho $0 < a < b, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{b-a}{1}C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}$$

Bài 3. Cho số nguyên n thỏa mãn $\frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 35$ $(n \geq 3)$. Tính tổng

$$S = 2^2.C_n^2 - 3^2.C_n^3 + 4^2.C_n^4 - ... + (-1)^n.n^2.C_n^n.$$

Bài 4. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $P(x) = (1 + x + x^3 + x^4)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{n+1}C_n^0 - \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n-1}C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n = -\frac{1}{2014}$.

Bài 5. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương ta có

$$\frac{2^n.C_n^0}{n+1} + \frac{2^{n-1}.C_n^1}{n} + ... + \frac{2^0.C_n^n}{1} = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

IV. HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Thực nghiệm sư phạm

Mục đích của việc thực nghiệm là đánh giá tính khả thi, kiểm tra tính đúng đắn của giả thuyết khoa học, tính hiệu quả của việc sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp.

2. Nội dung và cách thức tiến hành thực nghiệm

Được sự cho phép của Hiệu trưởng trường THPT Vĩnh Lộc, tôi đã tiến hành dạy 2 buổi cho học sinh lớp $12A_3$ với nội dung: Sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp.

Sau quá trình dạy học, tôi đã tiến hành kiểm tra tại lớp $12A_3$.

Chọn lớp đối chứng tại lớp $12A_2$ trường THPT Vĩnh Lộc.

Dưới đây là nội dung bài kiểm tra (thời gian: 60 phút)

Bài 1. Tính tổng $S = 1C_{2n+1}^1 + 3C_{2n+1}^3 + 5C_{2n+1}^5 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}$.

Bài 2. H·y t×m sè tù nhiªn n tho¶ m·n

$$1.3^0.2^{2n}.C_{2n}^0 - 2.3.2^{2n-1}.C_{2n}^1 + 3.3^2.2^{2n-2}.C_{2n}^2 - 4.3^3.2^{2n-3}.C_{2n}^3 + ... + (2n+1).3^{2n}.2^0.C_{2n}^{2n} = 73$$

Bài 3. Tính tổng $S = C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

Dụng ý của các bài tập trên: Nhằm kiểm tra khả năng vận dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp.

3. Kết quả thực nghiệm

Trong lớp 12A3 mà tôi tiến hành dạy thực nghiệm không có học sinh giỏi, có khoảng 12 đến 15 em học tương đối khá, còn lại là mức trung bình. Bởi vậy, phần lớn các em cho rằng phương pháp các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp là tương đối khó.

Về bài kiểm tra, tôi chấm kĩ và thu được kết quả như sau

Lớp	*Sĩ số*	*Giỏi*		*Khá*		*Trung bình*		*Yếu*		*Kém*	
		SL	*%*	*SL*	*%*	*SL*	*%*	*SL*	*%*	*SL*	*%*
12 A3	*45*	*9*	*20*	*22*	*48,9*	*9*	*20*	*5*	*11,1*	*0*	*0*
12 A2	*45*	*2*	*4,4*	*12*	*26,7*	*15*	*33,3*	*14*	*31,1*	*2*	*4,4*

Kết quả sơ bộ:

+ Lớp thực nghiệm, tỉ lệ học sinh đạt điểm từ trung bình trở lên là 88,9%, trong đó có 68,9% loại khá, giỏi.

+ Lớp đối chứng, tỉ lệ học sinh đạt điểm từ trung bình trở lên là 64,4%, trong đó có 31,1% loại khá, giỏi.

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Qua quá trình thực nghiệm, tôi rút ra một số kết quả sau

- Việc dạy học phương pháp sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp có tác dụng rèn luyện năng lực giải bài tập toán cho học sinh.

- Việc dạy học phương pháp đó còn giúp cho học sinh khả năng nhìn nhận bài toán cũng như lựa chọn phương pháp và công cụ để giải toán một cách có hiệu quả hơn.
- Việc tổ chức dạy học phương pháp đó có tác dụng tốt trong việc gây hứng thú học tập cho học sinh, tạo điều kiện phát huy tính tích cực của học sinh trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải của bài toán và giải bài toán đó.
- Việc tổ chức dạy học phương pháp sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp tạo cho học sinh có niềm tin, có tư duy linh hoạt, nhạy bén, chủ động tìm hướng giải quyết bài toán theo nhiều cách và lựa chọn được cách giải có lợi nhất.

PHẦN 3: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Qua quá trình nghiên cứu đề tài "**Dùng kiến thức tổ hợp thuần túy hướng dẫn học sinh giải bài toán tính tổng các số tổ hợp**", tôi đã thu được một số kết quả sau
- Sáng kiến kinh nghiệm đã làm sáng tỏ các căn cứ lý luận của việc rèn luyện năng lực giải bài tập toán.
- Sáng kiến kinh nghiệm đã xây dựng được hệ thống các bài toán minh hoạ cho việc áp dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp ở nhiều tình huống khác nhau. Giúp các em học sinh rèn luyện kĩ năng, phát triển tư duy sáng tạo, nhạy bén trong giải quyết các vấn đề mới.
- Sáng kiến kinh nghiệm chứng tỏ phương pháp sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp là một phương pháp quan trọng trong hoạt động giải các bài tập toán.
- Sáng kiến kinh nghiệm đáp ứng được yêu cầu của hoạt động đổi mới phương pháp dạy học: phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo, linh hoạt của người học. Bồi dưỡng năng lực tự học, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên của học sinh.
- Kết quả thực nghiệm cho phép xác nhận giả thuyết khoa học của đề tài là chấp nhận được, có tính hiệu quả và mục đích nghiên cứu đã hoàn thành.
- Tôi hi vọng sáng kiến kinh nghiệm này có thể làm tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh trong việc dạy học toán và mong được quý đồng nghiệp trao đổi, góp ý.

2. Kiến nghị

Qua quá trình thực hiện, tôi có kiến nghị như sau:
- Sách giáo khoa và sách bài tập nên xây dựng hệ thống các bài tập đa dạng, phong phú để khắc sâu phương pháp sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tính tổng liên quan đến các số tổ hợp, để học sinh có cơ hội rèn luyện kĩ năng giải toán.
- Các thầy cô giáo nên dành một số buổi hoạt động ngoại khoá về phương pháp sử dụng các công thức tổ hợp thuần túy để giải các bài toán tổ hợp, để học sinh

được trang bị tương đối đầy đủ về phương pháp này, từ đó các em có sự nhạy bén trong việc giải các bài toán bằng phương pháp này.

Tôi hi vọng sáng kiến kinh nghiệm này có thể làm tài liệu tham khảo cho các đồng nghiệp và học sinh trong quá trình dạy học về chủ đề tổ hợp. Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng do bản thân chưa có nhiều kinh nghiệm nên khó tránh được thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự trao đổi, góp ý của quý đồng nghiệp và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	*Thanh Hoá, ngày 08 tháng 05 năm 2016* Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh nghiệm của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. *Người viết* **Hoàng Văn Khanh**

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ban tổ chức kỳ thi Olynpic 30-4 từ năm 2009 đến năm 2015.
2. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất, Các bài giảng luyện thi môn Toán tập 3, NXB Giáo dục.
3. Đại số và giải tích 11 nâng cao, NXB Giáo dục
4. Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số và giải tích 11, NXB Giáo dục.
5. Phan Huy Khải, Các phương pháp giải toán sơ cấp Giải tích tổ hợp, NXB Giáo dục.
6. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy, Phương pháp dạy học môn toán.
7. Phan Huy Khải, Toán nâng cao đại số và giải tích 11, NXB ĐHQG Hà Nội.

8. Trần Văn Hạo (chủ biên), Chuyên đề luyện thi vào Đại học, Tích phân và đại số tổ hợp.
9. G.POLYA, Sáng tạo toán học, Giải một bài toán như thế nào?, Toán học và những suy luận có lý, NXB Giáo dục.
10. Tạp chí toán học và tuổi trẻ.