Chuyên đề 2. Số chính phương

I TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

2. Tính chất

a) Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

Tận cùng của số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tận cùng của bình phương	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

c) Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3$ $(n \in \mathbb{N})$.

d) Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n+2$ $(n \in \mathbb{N})$.

e) Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn. Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2. Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

f) Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4. Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9 Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25. Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

g) Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

h) Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

i) Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

j) Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

k) Số $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a$ khi đó $9a+1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$

II CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương

1 Phương pháp

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa

$$n = a^2, a \in \mathbb{N}$$

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho $A = \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{88...8}_{n} + 1$. Chứng minh A là một số chính phương.

Lời giải

$A = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n} - \underbrace{88...8}_{n} + 1$.

Đặt $a = \underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a = \underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a+1$.

Ta có $A = a.10^n + a - 8a + 1 = a(9a+1) + a - 8a + 1$

$\Rightarrow A = 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$.

$\Rightarrow A = \underbrace{33...3}_{n-1}2^2$.

Vậy A là một số chính phương.

Nhận xét:

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a + 1$.

Ví dụ 2. Cho $a = \underbrace{11...1}_{2016}$, $b = 1\underbrace{0...0}_{2015}5$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

Cách 1:

Ta có: $b = 1\underbrace{0...0}_{2015}5 = 1\underbrace{0...0}_{2016} - 1 + 6 = \underbrace{9...9}_{2016} + 6 = 9a + 6$.

$\Rightarrow$ ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a² + 6a + 1 = (3a + 1)²

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{2016} = \dfrac{10^{2016}-1}{9}$, $b = 10^{2016} + 5$.

$$\Rightarrow ab + 1 = \frac{10^{2016}-1}{9}.\left(10^{2016}+5\right) + 1 = \frac{\left(10^{2016}\right)^2 + 4.10^{2016} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2016}+2}{3}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \frac{\left(10^{2016}+2\right)}{3}.$$

Mà $\left(10^{2016}+2\right) \vdots 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Ví dụ 3. Cho số tự nhiên *a* gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên *b* gồm 30 chữ số 2. CHứng minh *a* - *b* là một số chính phương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{60} = \dfrac{10^{60}-1}{9}$, $b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\dfrac{10^{30}-1}{9}$.

$$\Rightarrow a - b = \frac{10^{60}-1}{9} - \frac{2(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60} - 2.10^{30} + 1}{9} = \left[\frac{10^{30}-1}{3}\right]^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Cách 2:

$b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\underbrace{11...1}_{30}$, $a = \underbrace{11...1}_{60} = \underbrace{11...1}_{30}.\underbrace{00...0}_{30} + \underbrace{11...1}_{30} = \underbrace{11...1}_{30}.10^{30} + \underbrace{11...1}_{30}$.

Đặt $c = \underbrace{11...1}_{30}$. $\Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{99...9}_{30} + 1 = 10^{30}$.

Khi đó: $a = c.(9c+1) + c = 9c^2 + 2c$. $b = 2c$.

$$\Rightarrow a - b = 9c^2 + 2c - 2c = (3c)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Bài toán tổng quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên *a* gồm 2*k* chữ số 1 và số tự nhiên *b* gồm *k* chữ số 2. Chứng minh rằng $a - b$ là một số chính phương.

3 Bài tập tương tự

Bài 1. Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì biểu thức

A= $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ có giá trị là số chính phương.

Lời giải

Ta có

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4=\left(x^2+5xy+4y^2\right)\left(x^2+5xy+6y^2\right)+y^4$

Đặt $x^2+5xy+5y^2=t(t\in Z)$ thì

$A=\left(t-y^2\right)\left(t+y^2\right)+y^4=t^2-y^4+y^4=t^2=\left(x^2+5xy+5y^2\right)^2$

Ta có $v_1x,y,z\in Z$ nên $x^2\in Z,5xy\in Z,5y^2\in Z\Rightarrow x^2+5xy+5y^2\in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 2. Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương.

Lời giải

Goi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là $n,n+1,n+2,n+3(n\in Z)$, ta có

$A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3(n+1)(n+2)+1=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1$

Đặt $n^2+3n=t(t\in N)$ thì $A=t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2=\left(n^2+3n+1\right)^2$

Vì $n\in N$ nên $n^2+3n+1\in N$ vậy $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Bài 3. Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; . . . Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Lời giải

Bài 4. Chứng minh nếu a,b là các số nguyên thỏa mãn hệ thức $2a^2+a=3b^2+b$ thì $a-b$ và $2a+2b+1$ là những số chính phương.

Bài 5. Cho a,b,c là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$ là 1 số chính phương.

4 Các bài toán thi

(ít nhất 5 bài, nhiều nhất 10 bài có giải chi tiết)

Dạng 2. Chứng minh một số không là số chính phương.

1 Phương pháp

Cơ sở phương pháp: Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

- **Phương pháp 1.** Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
- **Phương pháp 2.** Chứng minh $k^2<n<\left(k+1\right)^2$ với k là số nguyên.
- **Phương pháp 3.** Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8.
- **Phương pháp 4.** Chứng minh n có dạng $4k+2;\ 4k+3$.
- **Phương pháp 5.** Chứng minh n có dạng $3k+2$.
- **Phương pháp 6.** Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2.

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Chứng minh rằng số có dạng $n^6-n^4+2n^3+2n^2$ trong đó $n\in\mathbb{N}$ và $n>1$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có : $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right) = n^2\left[n^2\left(n-1\right)\left(n+1\right) + 2\left(n+1\right)\right]$

$= n^2\left[\left(n+1\right)\left(n^3 - n^2 + 2\right)\right] = n^2\left(n+1\right)\left[\left(n^3+1\right) - \left(n^2-1\right)\right] = n^2\left(n+1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$

Mà $n \in N$, $n > 1$ nên $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

=> $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ => $n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

Vậy số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và $n > 1$không phải là số chính phương.

3 Bài tập tương tự

Bài 6. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có $A = 1 + 2 + \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\right) + ... + \left(2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33}\right)$

$= 3 + 2^2.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) + ... + 2^{30}.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right)$

$= 3 + 2.30 + ... + 2^{29}.30 = 3 + \left(2 + ... + 2^{29}\right).3.10$.

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 7. Chứng minh nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\dfrac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là 1 số chính phương thì x là hợp số.

Bài 8. Chứng minh số $A = 19n^6 + 5n^5 + 1890n^3 - 19n^2 - 5n + 1993$ $\left(n \in N\right)$ không thể là số chính phương.

Bài 9. Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Bài 10. Cho a, b, c là các chữ số khác 0. Gọi S là tổng của tất cả các số có ba chữ số tạo thành bởi các chữ số a ; b ; c. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

4 Các bài toán thi

(ít nhất 5 bài, nhiều nhất 10 bài có giải chi tiết)

Bài 11. Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Lời giải

Ta có:

$2012^{4n} \vdots 4; 2014^{4n} \vdots 4$, $\forall n \in N^*$.

$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = \left(2013^{4n} - 1\right) + 1$ chia cho 4 dư 1.

$2015^{4n} = 2015^{4n} - \left(-1\right)^{4n} + 1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A \vdots 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2, mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Dạng 3. Điều kiện để một số là số chính phương.

1 Phương pháp

Cơ sở phương pháp: Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa.
- **Phương pháp 2:** Sử dụng tính chẵn, lẻ.
- **Phương pháp 3:** Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.
- **Phương pháp 4:** Sử dụng các tính chất.

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2+2x+20$ có giá trị là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $x^2+2x+20=a^2\left(a\in N,a>4\right)$. $\Leftrightarrow a^2-\left(x+1\right)^2=19$

$\Leftrightarrow\left(a-x-1\right)\left(a+x+1\right)=19$.

Vì $\left(a-x-1\right)<\left(a+x+1\right)$ và $19=1.19$ nên $\begin{cases}a-x-1=1\\a+x+1=19\end{cases}$. Do đó $x=8$.

Thử lại với x = 8, ta có $x^2+2x+20=8^2+2.8+20=10^2$ thỏa mãn.

Vậy số tự nhiên cần tìm là x =8.

Ví dụ 6. Tìm $a\in N$ để $(23-a)(a-3)$ là 1 số chính phương.

3 Bài tập tương tự

Bài 12. Tìm các số nguyên x sao cho $A=x\left(x-1\right)\left(x-7\right)\left(x-8\right)$ là một số chính phương.

Lời giải:

A= $(x^2-8x)(x^2-8x+7)$.

Đặt $x^2-8x=y$ thì A= $y(y+7)=y^2+7y$

Giả sử $y^2+7y=m^2$ (m thuộc N)

=> $4y^2+28y+49-4m^2=49$

=> (2y+7+2m)(2y+7-2m)= 49= 49.1=(-1).(-49)=7.7=(-7).(-7).

Ta thấy 2y+7+2m≥ 2y+7-2m nên ta có 4 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases}2y+7+2m=49\\2y+7-2m=1\end{cases}$, do đó $y=9$.

Suy ra $x\in\{-1;9\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2y+7+2m=-1\\2y+7-2m=-49\end{cases}$, do đó $y=-16$.

Suy ra $x=4$.

Trường hợp 3: $\begin{cases}2y+7+2m=7\\2y+7-2m=7\end{cases}$, do đó $y=0$.

Suy ra $x\in\{0;8\}$.

Trường hợp 4: $\begin{cases}2y+7+2m=-7\\2y+7-2m=-7\end{cases}$, do đó $y=-7$.

Suy ra $x\in\{1;7\}$.

Vậy $x\in\{-1;0;1;4;7;8;9\}$.

Bài 13. Tìm $n\in N$ để $2^8+2^{11}+2^n$ là số chính phương .

Lời giải

-Với $n\in\{0;1;2;....;8\}$, bằng cách thử không có giá trị n thỏa mãn đề bài.

- Với $n \ge 9$, đặt $2^8+2^{11}+2^n=t^2$, ta có $t^2=2^8\left(1+2^3+2^{n-8}\right)=2^8(9+2^{n-8})$

$\Rightarrow 9+2^{n-8}$ là số chính phương

- Đặt $9+2^{n-8}=k^2\ \left(k\in N^*,k>3\right)$

Do đó: $2^{n-8}=\left(k-3\right)\left(k+3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}k+3=2^a\\k-3=2^b\end{cases}$ (với a>b).

Khi đó: $\left(k+3\right)-\left(k-3\right)=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)\Leftrightarrow 2.3=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2^b=2\\2^{a-b}-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$.

Do đó $n-8=3+1\Leftrightarrow n=12$.

Thử lại $2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là n = 12.

Bài 14. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để 2^x+5^y là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2^x+5^y=k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì $1+5^y=k^2$ do đó k chẵn => k^2 chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x+5^y=k^2$ => k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y=0$ thì $2^x+1=k^2=(2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k=2n+1,n\in N$).

$\Rightarrow 2^x=4n(n+1)\Rightarrow n=1$. Khi đó x=3; y=0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x+5^y=2^3+5^0=9$ là số chính phương.

+) Với $y\ne 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2\equiv\pm1(\text{mod}\,5)$

Từ $2^x+5^y=k^2\Rightarrow 2^x\equiv\pm1(\text{mod}\,5)\Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x=2x_1\ \left(x_1\in N\right)$, ta có

$5^y=(k+2^{x_1})(k-2^{x_1})$

$\Rightarrow\begin{cases}k+2^{x_1}=5^{y_1}\\k-2^{x_1}=5^{y_2}\end{cases}$ với $y_1+y_2=y$ với $y_1>y_2$, y_1, y_2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1}=5^{y_2}(5^{y_1-y_2}-1)\Rightarrow 5^{y_2}=1\Rightarrow y_2=0$.

$\Rightarrow y_1=y$. Khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1$.

Nếu y=2t$\left(t\in N\right)$ thì $2^{x_1+1}=5^{2t}-1=25^t-1\,\vdots\,3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1=4(5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1)$.

Nếu $y>1$ thì $5^{y-1}+5^{y-2}+..+1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y=1\Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2;y=1$.

Thử lại $2^x+5^y=2^2+5^1=9$ là số chính phương

Vậy $x=2;y=1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài 15. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số $T=2^n+1$ là số chính phương.

Bài 16. Tồn tại hay không số nguyên x thỏa mãn $20^{2x}+12^{2x}+2012^{2x}$ là một số chính phương .

Bài 17. Có hay không số tự nhiên n để $2010+n^2$ là số chính phương.

Bài 18. Người ta viết liên tiếp các số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;... ;1994 thành một hàng ngang theo một thứ tự tùy ý. Hỏi số tạo thành theo cách viết trên có thể là số chính phương không ?

4 Các bài toán thi

(ít nhất 5 bài, nhiều nhất 10 bài có giải chi tiết)

Bài 19. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

(Đề thi TS10 Chuyên Toán – Bình Định 2020)

Lời giải

Giả sử $p^2+3pq+q^2=a^2$. Suy ra $(p+q)^2+pq=a^2$

Do đó: $pq=(a-p-q)(a+p+q)$ và $a+p+q>a-p-q$.

Nhận thấy vì p,q là số nguyên tố nên ta chỉ xét 2 trường hợp sau:

TH1: $a-p-q=1$ và $a+p+q=pq$

Suy ra $a=1+p+q$ và $a=pq-p-q$

Kết hợp suy ra $1+p+q=pq-p-q$ suy ra $pq-2p-2q-1=0$ suy ra $(p-2)(q-2)=5$ suy ra $(p,q)=(3,7),(7,3)$

TH2: Nếu $a+p+q=q\left(1\right)$ (trường hợp bằng p tương tự) . Khi đó $a-p-q=p\left(2\right)$

Kết hợp (1) và (2) ta có $q+3p=0$ (vô lý)

Vậy chỉ có $(p,q)=(3,7),(7,3)$

Bài 20. Tìm số tự nhiên n $\geq$ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

Lời giải

Với n = 1 thì 1! = 1 = 1^2 là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2 là số chính phương

Với n $\geq$ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3.

Bài 21. Tìm số nguyên dương n sao cho $A=\left(n+3\right)\left(4n^2+14n+7\right)$ là số một chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)

Lời giải

Ta có: $4n^2+14n+7=\left(n+3\right)\left(4n+2\right)+1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và n+3 phải là số chính phương.

Do $n\in Z^+$ nên ta có $\left(2n+3\right)^2\leq 4n^2+14n+7<\left(2n+4\right)^2$.

$\Rightarrow 4n^2+14n+7=\left(2n+3\right)^2\Rightarrow n=1$. Khi đó n+3 = 4 là số chính phương.

Thử lại, với $n=1$, ta có $A=10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài 22. Tìm các số nguyên tố p sao cho 2 số $2(p+1)$ và $2(p^2+1)$ là 2 số chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 trường Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế).

Bài 23. Tìm số nguyên dương n sao cho $\dfrac{n\left(2n-1\right)}{26}$ là số chính phương .

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa. Năm học 2012-2013)

Bài 24. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A=n^4+n^3+n^2$ có giá trị là số chính phương.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An. Năm học 2010-2011)

Bài 25. Tìm các số tự nhiên n sao cho $A=n^2+18n+2020$ có giá trị là số chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi).

Bài 26. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên KHTN Hà Nội)

Bài 27. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số $T=2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, huyện Vĩnh Tường. Năm học 2014 - 2015)

Bài 28. Tìm số tự nhiên n để *n + 18* và *n - 41* là hai số chính phương.

(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2013-2014- Phòng GD Vĩnh Tường)

Bài 29. Cho A = 200.(9^{2013} + 9^{2012} + ... + 9^2 + 9 + 1)

Chứng minh rằng A+25 là số chính phương.

(Đề thi giao lưu HSG lớp 7- năm học 2012-2013- Phòng GD Vĩnh Tường)

Bài 30. Chứng minh rằng số $2013+4!+5!+6!+7!+...+2020!$ không là số chính phương.

(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2012-2013- Phòng GD Yên Lạc)

Bài 31. Cho n là tổng của hai số chính phương. CMR n^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

(Đề thi giao lưu HSG lớp 8- năm học 2012-2013- Phòng GD Yên Lạc)

Dạng 4. Tìm số chính phương.

1 Phương pháp

Cơ sở phương pháp: Dựa vào định nghĩa về số chính phương $A=k^2$ với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 7. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

Lời giải

Giả sử $n^2=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100\left(1+\overline{cd}\right)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100$, $n\in Z$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd}=n^2-100=(n-10)(n+10)$.

Vì $n<100$ và 101 là số nguyên tố nên $n+10=101$.

$\Rightarrow n=91$.

Thử lại: $\overline{abcd}=91^2=8281$ có $82-81=1$.

Vậy $\overline{abcd}=8281$.

3 Bài tập tương tự

Bài 32. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Lời giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a; b; c; d là các số tự nhiên

và $1 \le a \le 9; 0 \le b, c, d \le 9$.

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow$ $d \in \{0,1,4,5,6,9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5.

Đặt $\overline{abcd}=k^2<10000 \Rightarrow 32 \le k<100$, $k\in N$.

Do k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45 (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$\Rightarrow \overline{abcd}=2025$

Vậy số phải tìm là: 2025.

Bài 33. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và số viết bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Lời giải

Gọi số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là $\overline{ab}$ (a, b $\in$ N, $1 \le a, b \le 9$)

Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{ba}$.

Ta có $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=99(a^2-b^2)\ \vdots\ 11 \Rightarrow a^2-b^2\ \vdots\ 11$

Hay $(a-b)(a+b)\ \vdots\ 11$

Vì $0<a-b \le 8; 2 \le a+b \le 18$ nên $a+b\ \vdots\ 11 \Rightarrow a+b=11$

Khi đó: $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=3^2.11^2.(a-b)$

Để $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chính phương thì a – b phải là số chính phương do đó a – b = 1 hoặc a – b = 4.

Nếu a – b = 1 kết hợp với a + b = 11 $\Rightarrow$ a = 6, b = 5, $\overline{ab}=65$

Khi đó $65^2-56^2=1089=33^2$

Nếu a – b = 4 kết hợp với a + b = 11 $\Rightarrow$ a = 7,5 loại

Vậy số phải tìm là 65

Bài 34. Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab}^2 = (a + b)^3 \Leftrightarrow \overline{ab}^2 = \left(a+b\right)^2\left(a+b\right)$. Suy ra a+b là số chính phương.

Khi đó $\overline{ab}$ là một lập phương và a + b là một số chính phương.

Vì $10 \le \overline{ab} \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là 27.

Bài 35. Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 36. Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

4 Các bài toán thi

(ít nhất 5 bài, nhiều nhất 10 bài có giải chi tiết)

Bài 2 : Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

(Đề thi TS vào lớp 10 chuyên trường THPT Lê Hồng Phong - TP Hồ Chí Minh. Năm học 2005- 2006)

Lời giải

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$.

Theo đề bài ta có:

Ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$.

(với $k, m \in N^*$ và $31 < k < m < 100$, $a, b, c, d = \overline{1,9}$).

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111$ (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

Vậy A=2025, B = 3136.