**CHỦ ĐỀ 11: ƯỚC CHUNG VÀ BỘI CHUNG**

 **ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT - BỘI CUNG NHỎ NHẤT**

**A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.**

**I/ Ước chung, Bội chung.**

**1. Ước chung** của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là ƯC(a, b, c).

**2. Bội chung** của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số a, b, c được kí hiệu là: BC(a, b, c).

**3. Giao của hai tập hợp** là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập hợp đó.

Ta kí hiệu giao của hai tập hợp A và B là A ∩ B.

**II/ Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất**

**1. Định nghĩa:**

 \* Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

 \* Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

**2. Cách tìm**

1. Muốn tìm UCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước:

 +) Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố

 +) Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

 +) Bước 3: lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất. Tích đó là UCLN phải tìm.

 *Chú ý:*

 +) UCLN(a,b,1)=1

 +) 

 +) Để tìm UC ta tìm ước của UCLN các số đó.

1. Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1 ta thực hiện ba bước

 +) Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố

 +) Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

 +) Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với sô mũ lớn nhất. Tích đó chính là BCNN cần tìm.

 *Chú ý:*

 +) Nếu các số đã cho đôi một nguyên tố cùng nhau thì BCNN là tích của các số đó.

 +) 

 +) Để tìm BC ta tìm bội của BCNN các số đó.

**3/ Kiến thức bổ sung**

 + Nếu  và UCLN(a,c)=1 thì 

 + Nếu 

 Đặc biệt nếu  thì 

 + Nếu 

 + Nếu 

 + UCLN(a;b).BCNN(a,b)=a.b

**B/ CÁC DẠNG BÀI TẬP.**

**DẠNG 1: Tìm ƯC, BC, ƯCLN, BCNN.**

**Bài 1**: Viết các tập hợp

a/ Ư(6), Ư(12), Ư(42) và ƯC(6, 12, 42);

b/ B(6), B(12), B(42) và BC(6, 12, 42)

ĐS:

a/ Ư(6) = ; Ư(12) = ; Ư(42) = 

 ƯC(6, 12, 42) = 

b/ B(6) = ; B(12) = 

 B(42) = ; BC = 

**Bài 2:** Tìm ƯCLL của

 a/ 12, 80 và 56 b/ 144, 120 và 135

c/ 150 và 50 d/ 1800 và 90

Hướng dẫn

a/ 12 = 22.3 80 = 24. 5 56 = 33.7

Vậy ƯCLN(12, 80, 56) = 22 = 4.

b/ 144 = 24. 32 120 = 23. 3. 5; 135 = 33. 5

Vậy ƯCLN (144, 120, 135) = 3.

c/ ƯCLN(150,50) = 50 vì 150 chia hết cho 50.

d/ ƯCLN(1800,90) = 90 vì 1800 chia hết cho 90.

**Bài 3**: Tìm

a/ BCNN (24, 10) b/ BCNN( 8, 12, 15)

Hướng dẫn

a/ 24 = 23. 3 ; 10 = 2. 5 => BCNN (24, 10) = 23. 3. 5 = 120

b/ 8 = 23; 12 = 22. 3 ; 15 = 3.5 => BCNN( 8, 12, 15) = 23. 3. 5 = 120

**DẠNG 2: Dùng thuật toán Ơclit để tìm ƯCLL (không cần phân tích chúng ra thừa số nguyên tố)**

*Giới thiệu thuật toán Ơclit: Để tìm ƯCLN(a, b) ta thực hiện như sau:*

*- Chia a cho b có số dư là r*

*+ Nếu r = 0 thì ƯCLN(a, b) = b. Việc tìm ƯCLN dừng lại.*

*+ Nếu r > 0, ta chia tiếp b cho r, được số dư r1*

*- Nếu r1 = 0 thì r1 = ƯCLN(a, b). Dừng lại việc tìm ƯCLN*

*- Nếu r1 > 0 thì ta thực hiện phép chia r cho r1 và lập lại quá trình như trên.*

**ƯCLN(a, b) là số dư khác 0 nhỏ nhất trong dãy phép chia nói trên.**

**Bài 1**: Hãy tìm ƯCLN (1575, 343)

 **Hướng dẫn:**

Ta có: 1575 = 343. 4 + 203

 343 = 203. 1 + 140

 203 = 140. 1 + 63

 140 = 63. 2 + 14

 63 = 14.4 + 7

 14 = 7.2 + 0 (chia hết)

Vậy: Hãy tìm ƯCLN (1575, 343) = 7

Trong thực hành người ta đặt phép chia đó như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 1575 | 343 |
|  |  |  |  | 343 | 203 | 4 |
|  |  |  | 203 | 140 | 1 |  |
|  |  | 140 | 63 | 1 |  |  |
|  | 63 | 14 | 2 |  |  |  |
| 14 | **7** | 4 |  |  |  |  |
| 0 | 2 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Suy ra ƯCLN (1575, 343) = 7

**Bài 2**: Tìm ƯCLN(702, 306) bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố và bằng thuật toán Ơclit.

ĐS: 18

**Bài 2**: Dùng thuật toán Ơclit để tìm

a/ ƯCLN(318, 214)

b/ ƯCLN(6756, 2463)

ĐS: a/ 2 b/ 1 (nghĩa là 6756 và 2463 là hai số nguyên tố cùng nhau).

**DẠNG 3: Tìm số chưa biết thỏa mãn điều kiện về ƯC, BC, ƯCLN, BCNN**

*\* Nếu biết số x thỏa mãn* ***m ⋮ x*** *và* ***n ⋮ x*** *=> x là ƯC(****m, n)***

*\* Nếu biết số x* ***lớn nhất*** *thỏa mãn* ***m ⋮ x*** *và* ***n ⋮ x*** *=> x là ƯCLN(****m, n)***

*\* Nếu biết số x thỏa mãn* ***x ⋮ m*** *và* ***x ⋮ n*** *=> x là BC(****m, n)***

*\* Nếu biết số x* ***nhỏ nhất*** *thỏa mãn* ***x ⋮ m*** *và* ***x ⋮ n*** *=> x là BCNN(****m, n)***

*\* Nếu số* ***a*** *chia cho x dư* ***k*** *=> số a – k ⋮ x hay x là Ư(a – k)*

**Bài 1/** Tìm số tự nhiên a là lớn nhất biết rằng 480  a 600 a

 **Hướng dẫn :**

 vì 480  a 600 a và a là lớn nhất

 Nên a  ƯC LN (480,600)

 Ta có 480= 25.3.5 ; 600 = 23.3.52 => ƯCLN của (480,600) =23.3.5= 120

 Vậy a =120

**Bài 2/** Tìm số tự nhiên x biết rằng 126  x 210  x và 15 < x < 30

 Hướng dẫn:

 Vì 126  x ; 210  x và 15 < x < 30 nên x  Ư C (126, 210) và 15 < x < 30

 Ta có 126= 2.32..7 ; 210 = 2.3.5.7

 => ƯCLN(126, 210) = 2.3.7 = 42

 Do đó Ư C (126,210) = 

 Vì 15 < x < 30 nên x =21

**Bài 3/** Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng a  15 a 18

 Hướng dẫn

 Vì a  15 ; a 18 và a nhỏ nhất khác 0 nên a  BCNN(15,18)

 Ta có 15 =3.5 ; 18 = 2.32 => BCNN(15,18) = 2.32.5 = 90

 Vậy a = 90

**Bài 4/** Tìm các bội chung của 15 và 25 mà nhỏ hơn 400

 Hướng dẫn:

 Ta có : 15=3.5 ; 25= 52 => BCNN(15,25) = 3.52 =75

 Nên BC(15,25) = 

 Các bội chung của 15 và 25 mà nhỏ hơn 400 là 0, 75, 150, 225,300, 375

**Bài 5**. Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 39 cho a thì dư 4, còn khi chia 48 cho a thì dư 6.

 **Hướng dẫn**

 Chia 39 cho a thì dư 4 , nên a là ước của 39 – 4 = 35 và a > 4

 Chia 48 cho a thì dư 6 nên a là ước của 48 – 6 = 42 và a > 6 .

 => a là ước chung của 35 và 42 đồng thời a > 6.

 Ư(35) = { 1, 5, 7, 35} ; Ư(42) = {1,2,3,6,7,14,21,42}.

 ƯC(35,42) = { 1,7}. Vậy a = 7 .

**Bài 6.** Tìm số tự nhiên a, biết rằng khi chia 264 cho a thì dư 24 ; khi chia 363 cho a thì dư 43.

**Hướng dẫn**:

Số 264 chia cho a dư 24 nên a là ước của 

Số 363 chia cho a dư 43 nên a là ức của 

Do a là ước chung của 240 và 320, đồng thời  .

Ư CLN  ước chung lớn hơn 43 là 80.

Vậy 

**Bài 7.** Xác định số chia và thương của một phép chia số tự nhiên biết rằng số bị chia và các số dư được viết như sau

**Hướng dẫn**:

Tính các tích của từng chữ số của thương với số chia, ta được:



Phép chia có dạng:

|  |  |
| --- | --- |
|  452610 406 466 464 210 174 36 | Số chia |
| Thương  |

Số chia là ước chung của 406,464, 174 và lớn hơn  => Số chia là  và thương là 

**Bài 8.** Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất sao cho a chia cho , cho  , cho  được số dư theo thứ tự là 

**Hướng dẫn**

 chia cho 3 dư 1

 chia cho 5 dư 1

 chia cho 7 dư 1

Do đó:  . Để a nhỏ nhất thì  là 



**DẠNG 4: Các bài toán thực tế**

**Bài 1**: Một lớp học có 24 HS nam và 18 HS nữ. Có bao nhiêu cách chia tổ sao cho số nam và số nữ được chia đều vào các tổ?

 **Hướng dẫn**

 Số tổ là ước chung của 24 và 18

 Tập hợp các ước của 18 là A = 

 Tập hợp các ước của 24 là B = 

 Tập hợp các ước chung của 18 và 24 là C = A  B = 

 Vậy có 3 cách chia tổ là 2 tổ hoặc 3 tổ hoặc 6 tổ.

**Bài 2:** Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000?

 **Hướng dẫn**

 Gọi số người của đơn vị bộ đội là x (xN)

 x : 20 dư 15  x – 15 20

 x : 25 dư 15  x – 15 25

 x : 30 dư 15  x – 15 30

 Suy ra x – 15 là BC(20, 25, 35)

 Ta có 20 = 22. 5; 25 = 52 ; 30 = 2. 3. 5 => BCNN(20, 25, 30) = 22. 52. 3 = 300

 BC(20, 25, 35) = 300k (kN)

 x – 15 = 300k x = 300k + 15 mà x < 1000 nên

 300k + 15 < 1000 300k < 985 k <  (kN) => k = 1; 2; 3

 Chỉ có k = 2 thì x = 300k + 15 = 615  41

 Vậy đơn vị bộ đội có 615 người

**Bài 3**.Tìm số tự nhiên bé nhất khi chia cho 2; 5; 11 và 26 đều dư 1.

**Bài 4**. Tìm các số tự nhiên a, b biết ƯCLN(a,b) = 5 và BCNN(ab) = 105

**Bài 5**. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13 và cxhia hết co 23.

**Bài 6**. Tìm hai số có 3 chữ số biết tổng của chúng là bội của 504 và thương của số lớn chia cho số nhỏ là bội của 6.

**Bài 7**. Cho BCN(a,b) = 60 và a = 12. Tìm b?

**Bài 8**. Cho một số A chia hết cho 7 và khi chia A ho 4 hoặc hoặc 6 đều dư 1. Tìm A biết A < 400.

**Bài 9**. Tổng số học sinh khối 6 cua một trường có khoảng từ 235 đến 250 em, khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 6 dư 5, chia 10 dư 9. tìm số học sinh của khối 6

**DẠNG 5: Tìm hai số tự nhiên khi biết một số yếu tố trong đó có các dữ kiện về ƯCLN và BCNN.**

 *\* Dựa vào định nghĩa ƯCLN để biểu diễn hai số phải tìm, liên hệ với các yếu tố đã cho để tìm hai số.*

 *\* Quan hệ đặc biệt giữa ƯCLN, BCNN và tích của hai số tự nhiên a, b đó là:*

 ***ab = (a, b).[a, b] (\*\*)***

 *Trong đó (a, b) là ƯCLN và [a, b] là BCNN của a và b.*

 *\** ***Chứng minh*** *hệ thức (\*\*):*

 *Theo định nghĩa ƯCLN, gọi d = (a, b)*

 *=> a = md ; b = nd với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1 (\*)*

 *Từ (\*) => ab = mnd2 ; [a, b] = mnd*

 *=> (a, b).[a, b] = d.(mnd) = mnd2 = ab*

 *=> ab = (a, b).[a, b] . (\*\*)*

**Bài 1 :** Tìm hai số tự nhiên a, b biết [a, b] = 240 và (a, b) = 16.

 **Hướng dẫn:**

 Do vai trò của a, b là như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b.

 Từ (\*), do (a, b) = 16 => a = 16m ; b = 16n (m ≤ n do a ≤ b) với m, n thuộc Z+ ;(m, n) = 1

 Theo định nghĩa BCNN :

 [a, b] = m.n.d = m.n.16 = 240 => m.n = 15

 => m = 1 , n = 15 hoặc m = 3, n = 5 => a = 16, b = 240 hoặc a = 48, b = 80.

 **Chú ý:** Ta có thể áp dụng công thức (\*\*) để giải bài toán này :

 ab = (a, b).[a, b] => m.n.162 = 240.16 => m.n = 15.

**Bài 2:** Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 216 và (a, b) = 6.

 **Hướng dẫn :**

 Lập luận như bài 1, giả sử a ≤ b.

 Do (a, b) = 6 => a = 6m ; b = 6n với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1 ; m ≤ n.

 Vì vậy : ab = 6m.6n = 36mn => ab = 216 ⬄ mn = 6 => m = 1, n = 6 hoặc m = 2, n = 3

 => a = 6, b = 36 hoặc là a = 12, b = 18.

**Bài 3:** Tìm hai số nguyên dương a, b biết ab = 180, [a, b] = 60.

 **Hướng dẫn:**

 Từ (\*\*) => (a, b) = ab/[a, b] = 180/60 = 3.

 Tìm được (a, b) = 3, bài toán được đưa về dạng bài toán 2.

 Kết quả : a = 3, b = 60 hoặc a = 12, b = 15.

 **Chú ý:** Ta có thể tính (a, b) một cách trực tiếp từ định nghĩa ƯCLN, BCNN :

 Theo (\*) ta có ab = m.n.d2 = 180 ; [a, b] = m.n.d = 60 => d = (a, b) = 3.

**Bài 4:** Tìm hai số nguyên dương a, b biết a/b = 2,6 và (a, b) = 5.

 **Hướng dẫn:**

 Theo (\*), (a, b) = 5 => a = 5m ; b = 5n với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1.

 Vì vậy : a/b = m/n = 2,6 => m/n = 13/5

 => m = 13 và n = 5 hay a = 65 và b = 25.

 **Chú ý :** phân số tương ứng với 2,6 phải chọn là phân số tối giản do (m, n) = 1.

**Bài 5:** Tìm a, b biết a/b = 4/5 và [a, b] = 140.

 **Hướng dẫn:**

 Đặt (a, b) = d. Vì , a/b = 4/5 , mặt khác (4, 5) = 1 nên a = 4d, b = 5d.

 Lưu ý [a, b] = 4.5.d = 20d = 140 => d = 7 => a = 28 ; b = 35.

**Bài 6:** Tìm hai số nguyên dương a, b biết a + b = 128 và (a, b) = 16.

 **Hướng dẫn:**

 Lập luận như bài 1, giả sử a ≤ b.

 Ta có : a = 16m ; b = 16n với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1 ; m ≤ n.

 Vì vậy : a + b = 128 => 16(m + n) = 128 => m + n = 8

 => m = 1, n = 7 hoặc m = 3, n = 5 hay a = 16, b = 112 hoặc a = 48, b = 80

**Bài 7:** Tìm a, b biết a + b = 42 và [a, b] = 72.

 **Hướng dẫn:**

 Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1.

 Không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ b => m ≤ n.

 Do đó : a + b = d(m + n) = 42 (1)

   [a, b] = mnd = 72 (2)

 => d là ước chung của 42 và 72 => d thuộc {1 ; 2 ; 3 ; 6}.

 Lần lượt thay các giá trị của d vào (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp d = 6

 => m + n = 7 và mn = 12 => m = 3 và n = 4 . (thỏa mãn các điều kiện của m, n).

 Vậy d = 6 và a = 3.6 = 18 , b = 4.6 = 24

**Bài 8:** Tìm a, b biết a - b = 7, [a, b] = 140.

 **Hướng dẫn**:

 Gọi d = (a, b) => a = md ; b = nd với m, n thuộc Z+ ; (m, n) = 1.

 Do đó : a - b = d(m - n) = 7   (1’)

   [a, b] = mnd = 140   (2’)

 => d là ước chung của 7 và 140 => d thuộc {1 ; 7}.

 Thay lần lượt các giá trị của d vào (1’) và (2’) để tính m, n ta được kết quả duy nhất :

 d = 7 => m - n = 1 và mn = 20 => m = 5, n = 4

 Vậy d = 7 và a = 5.7 = 35 ; b = 4.7 = 28 .

**Bài 9:** Tìm hai số a, b biết 7a = 11b và (a, b) = 45.

**Bài 10:** Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 448, ƯCLN của chúng bằng 16 và chúng có các chữ số hàng đơn vị giống nhau.

**Bài 11:** Cho hai số tự nhiên a và b. Tìm tất cả các số tự nhiên c sao cho trong ba số, tích của hai số luôn chia hết cho số còn lại.