

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ

Trong trường hợp tổng quát, để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản),...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ giao với trục hoành tại những điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, giao với trục tung tại điểm có tung độ là $f(0)$ nếu 0 thuộc tập xác định của hàm số đó.

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

Câu 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

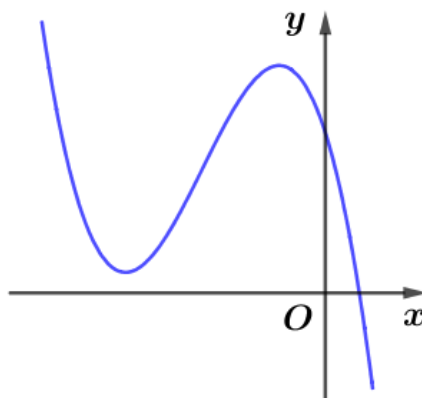
Câu 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

Câu 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Câu 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 2$.

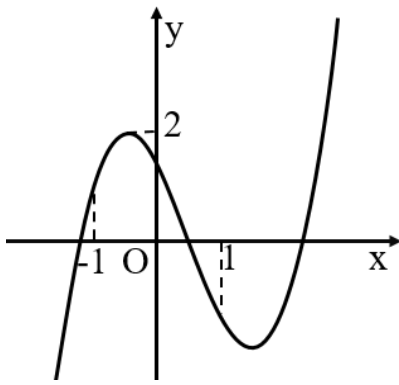
DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC BA

Câu 7. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



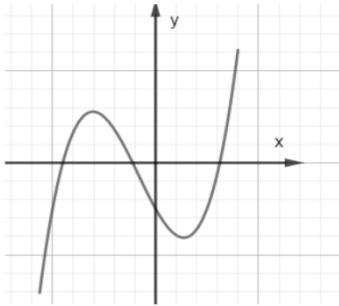
Xác định dấu của các hệ số a, b, c, d ?

Câu 8. (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Xác định dấu các hệ số của hàm số.

Câu 9. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định dấu của các hệ số a, b, c và d



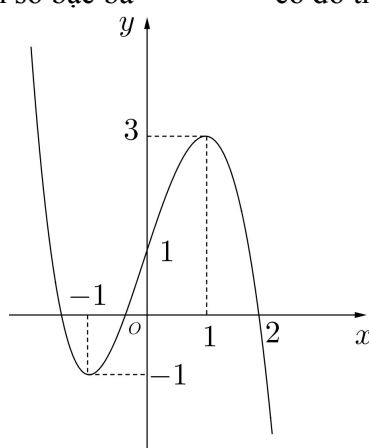
Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)
 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(3;1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$, trong đó m là tham số
 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 0$;
 2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)
 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;
 2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

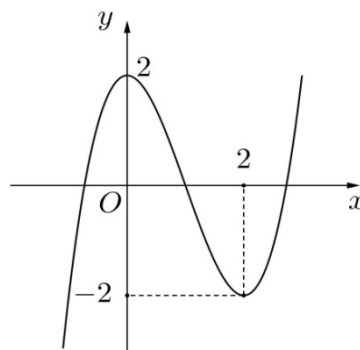
Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số
 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi $m = -3$
 2. Tùy theo k giải và biện luận phương trình: $-|x|^3 + 3x^2 + k = 0$
 3. Gọi A và B là hai điểm cực trị của (C) , tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M
 4. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C)
1. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = (2m - 1)x - 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; -1), B, C$ sao cho $BC = \sqrt{82}$.
 2. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C) .
- Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (4m - 1)x + 2m^2 - 3$ cắt Ox tại ba điểm A, B, C sao cho $AB = BC$.
- Câu 16.** Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.
- Câu 17.** Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 - (3m - 1)x + m + 3$ cắt đường thẳng $d: y = (1 - m)x + m - 5$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < 1 < x_3$.
- Câu 18.** Cho hàm số $(C) y = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$
1. Tìm trên đồ thị (C_2) những cặp điểm đối xứng qua O
 2. Tìm m để trên O tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy
- Câu 19.** Cho hàm số $(C): y = -\frac{2}{x}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $I(1; -1)$.
- Câu 20.** Trên mp Oxy cho đồ thị $(C): y = x^3 - 2\sqrt{2}x$. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C) thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O .
- Câu 21.** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$.
- Câu 22.** (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$

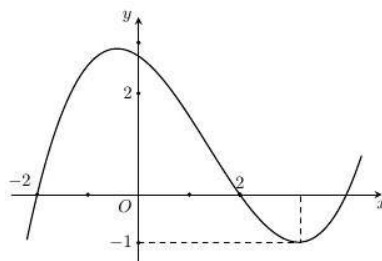
- Câu 23.** (Sở Cần Thơ - 2021) Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{f(f(x))+4} = f(x)+1$

Câu 24. (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm.

Câu 25. (Mã 104 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$

Câu 26. (Chuyên Thái Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Tìm m để phương trình $|f(x-1)+2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.