

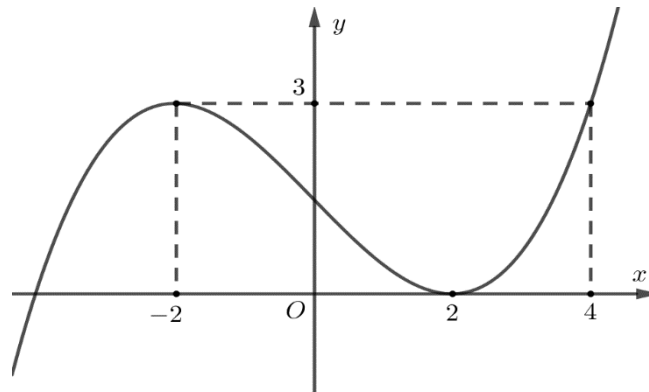
CHỦ ĐỀ 4

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN LÀ HÀM HỢP

DẠNG 1

BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. B. 3. **C. 4.** D. 5.

Lời giải

Chọn C.

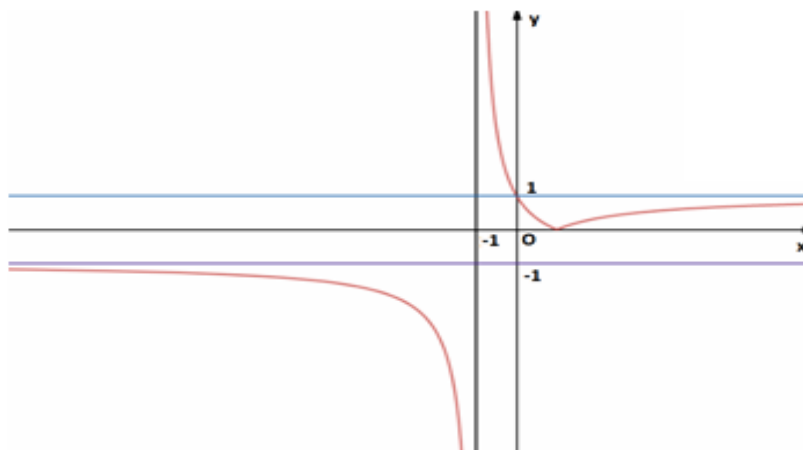
Từ đồ thị ta có $f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(4-x^2) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x - m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy ?

A. 0.

B. - 1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

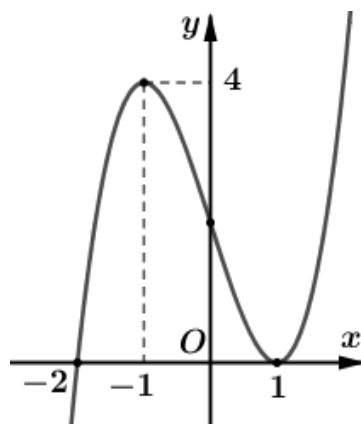
Tính tiến theo véc tơ $v = (m; 0)$ thì:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành đồ thị hàm số $y = f(x - m)$.

Tiệm cận $x = -1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành tiệm cận $x = -1 + m$ của đồ thị hàm số $y = f(x - m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x - m)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m \leq 0$.

B. $-2 \leq m \leq 0$.

C. $-3 < m < -1$.

D. $0 < m < 4$.

Lời giải

Chọn D.

$$h(x) = f(x^2 - 3) \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$$

Xét hàm số

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

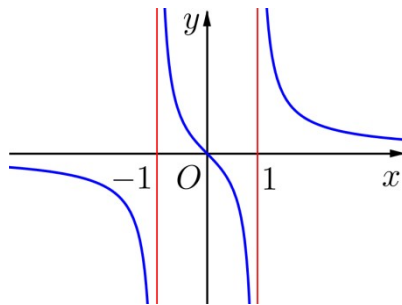
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 3$	$+\infty$	1	-1	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x^2 - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	4	0	4	0	$+\infty$

$f(-3) < 0$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow h(x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận?

- A. 4042. B. 2021. C. 2020. D. 4040.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Vì hàm số $t = x^2 - 2x + m$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \neq 1 \\ x^2 - 2x + m \neq -1 \end{cases}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + m) = +\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x^2 - 2x + m) - m] = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} [f(t) - m] = -m$.

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có đúng một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -m$ (về cả hai phía $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

Để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận thì nó phải có 4 đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2x + m = -1 \end{cases}$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = -m+2 \\ (x-1)^2 = -m \end{cases} \text{ có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Điều kiện đủ: Giả sử x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 2x + m = 1$; x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 2x + m = -1$.

Xét đường thẳng $x = x_1$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_1^\pm} [f(x^2 - 2x + m) - m] = \lim_{t \rightarrow 1^\pm} [f(t) - m] = \pm\infty$

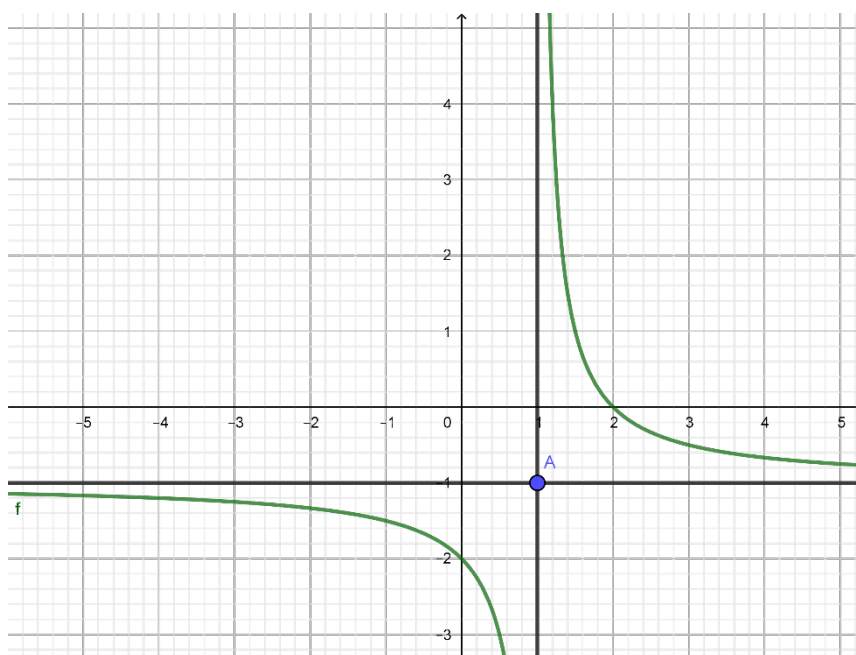
Suy ra đường thẳng $x = x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$.

Tương tự các đường thẳng $x = x_2, x = x_3, x = x_4$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$.

Vậy để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận thì $m < 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2021; 2021]$ nên có tất cả 2021 giá trị của m .

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = |f(x-16) + 10 - m^2|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y = 8$ (không trùng với d).

A. 8

B. 2

C. 6

D. 4

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $g(x) = f(x - 16) + 10 - m^2$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép tịnh tiến là tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 16 đơn vị và theo phương trục tung $(10 - m^2)$ đơn vị.

Từ hình vẽ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x - 16) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 9 - m^2$

Do vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là $y = 9 - m^2$, ta có 2 TH sau:

+) TH 1: Nếu $9 - m^2 < 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y = |g(x)|$ là $y = m^2 - 9 < 8$
 $\Rightarrow 9 < m^2 < 17$

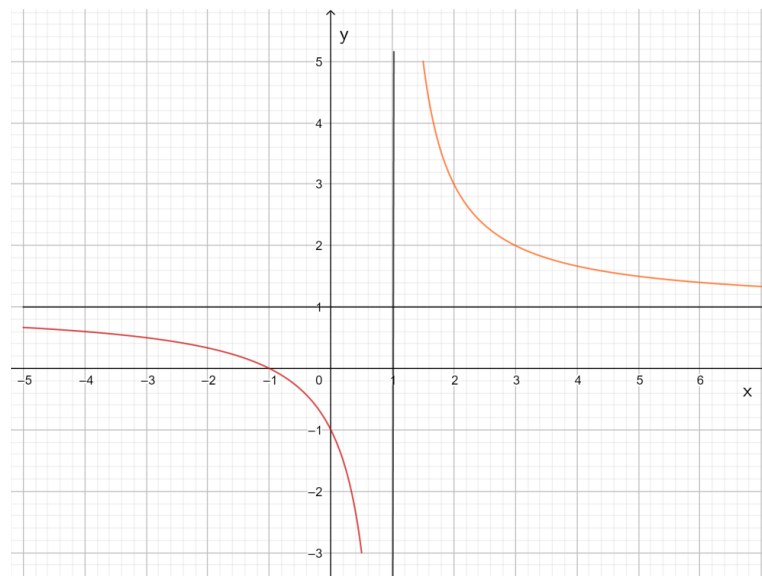
mà $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = \pm 4$

+) TH 2: Nếu $9 - m^2 \geq 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y = |g(x)|$ là $y = 9 - m^2 < 8$
 $\Rightarrow 1 < m^2 \leq 9$

mà $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = \pm 2, m = \pm 3$

+) KL: có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - m^2|) - 2020$ nhận đường thẳng $x = 5$ làm tiệm cận đứng?

- A. $m = \pm 2$ B. $\begin{cases} m = \pm 2 \\ m = \pm \sqrt{6} \end{cases}$ C. $m = \pm \sqrt{6}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = \sqrt{6} \end{cases}$

Lời giải

Chọn B.

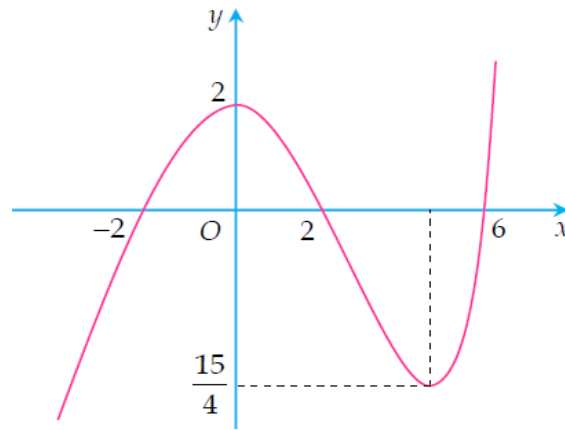
Xét hàm số $h(x) = f(|x|)$ có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang, $x = 1, x = -1$ làm tiệm cận đứng.

Suy ra đồ thị hàm số $u(x) = h(x - m^2) = f(|x - m^2|)$ nhận đường thẳng $x = m^2 + 1; x = m^2 - 1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x) = u(x) - 2020$ nhận đường thẳng $x = m^2 + 1; x = m^2 - 1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y = -2019$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài, ta có
$$\begin{cases} m^2 + 1 = 5 \\ m^2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



$$g(x) = \frac{x^2 + 8x + \sqrt{n - m}}{f(f(x) + m)}$$

Với m, n là hai số nguyên dương, khi hàm số có số tiệm cận lớn nhất là n

hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S = m^2 + n^2$

- A. 14 . B. 74 . C. 50 . D. 3 .

Lời giải

Chọn C.

Để hàm số có tiệm cận đứng thì điều kiện:

$$f[f(x) + m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 2 \\ f(x) + m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m - 2 \\ f(x) = -m + 2 \\ f(x) = -m + 6 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó để hàm số có có nhiều tiệm cận đứng nhất thì: } \begin{cases} 6 - m < 2 \\ 2 - m > -\frac{15}{4} \\ -2 - m > -\frac{15}{4} \\ 2 - m < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \end{cases}$$

Xét $h(x) = x^2 + 8x + \sqrt{n - m}$ có $h'(x) = 2x + 8$

nên $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$

Khi $m = 5$ thì đường thẳng $y = -7$ gặp $f(x)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 .

Nên $h(x) > 0, \forall x \in (-4; +\infty)$. Do đó $\begin{cases} S = 74 \\ S = 50 \end{cases} \Rightarrow \min S = 50$

DẠNG 2

BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5}$ là

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5} = 0$.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

+ Đặt $u = x^3 + 2x$, khi đó $f(x^3 + 2x) - 5 = 0$ trở thành:

$$f(u) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(u) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \ (a < -2) \\ u = 1 \end{cases}$$

+ Với $u = a \Rightarrow x^3 + 2x = a$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 2x$ có $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, mà

phương trình bậc ba có ít nhất 1 nghiệm nên phương trình $x^3 + 2x = a$ có nghiệm duy nhất giả sử là x_1 .

+ Với $u = 1 \Rightarrow x^3 + 2x = 1$ do chứng minh trên nên phương trình cũng có 1 nghiệm duy nhất giả sử là $x_2 \ (x_2 \neq x_1)$.

+ Do x_1, x_2 không là nghiệm của tử số của $g(x)$ nên giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_1 và giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_2 đều là vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x = x_1$ và $x = x_2$.

+ Vậy, tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-10; 10]$ của m để đồ thị hàm số $y = \frac{3}{f(x^2) - m}$ có 4 tiệm cận đứng.

A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{f(x^2) - m}$ có 4 tiệm cận đứng khi phương trình $f(x^2) = m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy, phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm dương t phân biệt khi $-1 < m < 3$.

Với mỗi giá trị $t > 0$ cho ta 2 giá trị đối nhau của x , nên với điều kiện $-1 < m < 3$, phương trình $f(x^2) = m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{3}{f(x^2) - m}$ có 4 tiệm cận đứng khi $-1 < m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

DẠNG 3

BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

Câu 10. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^3 + 3x) - 1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
t'	+	
t	$-\infty$	$+\infty$

Xét $f(x^3 + 3x) - 1 = 0$. Vì $y = f(x)$ là hàm số bậc ba nên phương trình $f(t) = 1$ có nhiều nhất 3 nghiệm t .

Từ bảng biến thiên ta suy ra với mỗi giá trị t có đúng một giá trị x .

Khi đó phương trình $f(x^3 + 3x) = 1$ có nhiều nhất 3 nghiệm x .

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có nhiều nhất 3 tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x^3 + 3x) - 1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(t) - 1} = 0$ (vì $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$).

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?
A. 0. **B. 1.** **C. 2.** **D. 3**

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}} + 3$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{3}$

Vậy có 1 tiệm cận ngang.