

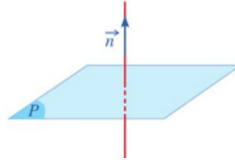
PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG

1. Vectơ pháp tuyến

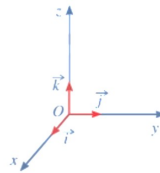
Cho mặt phẳng (P) . Nếu vectơ n khác 0 và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì n được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ở Hình, vectơ n là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



Nhận xét: Nếu n là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $kn (k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) .
Giải

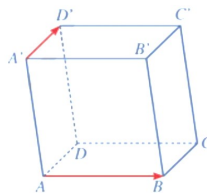


Vectơ $k = (0; 0; 1)$ có giá là trục Oz và $Oz \perp (Oxy)$ nên $k = (0; 0; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) .

2. Cặp vectơ chỉ phương

Cho mặt phẳng (P) . Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) .

Ví dụ 2: Quan sát Hình.



a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}$ có là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không? Vì sao?

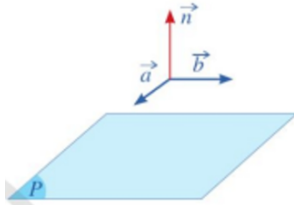
b) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ có là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không? Vì sao?

Giải

a) Do hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}$ không cùng phương và có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

b) Do hai vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ không cùng phương và có giá cùng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

3. Xác định vector pháp tuyến của mặt phẳng khi biết cặp vector chỉ phương



Nếu hai vector $a = (a_1; a_2; a_3), b = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) thì $\vec{n} = [a, b] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ví dụ 3: Cho mặt phẳng (P) có cặp vector chỉ phương là $a = (1; 3; 5), b = (-3; -1; 1)$.
Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Giải

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n} = [a, b] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (8; -16; 8)$$

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mỗi mặt phẳng (P) có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.

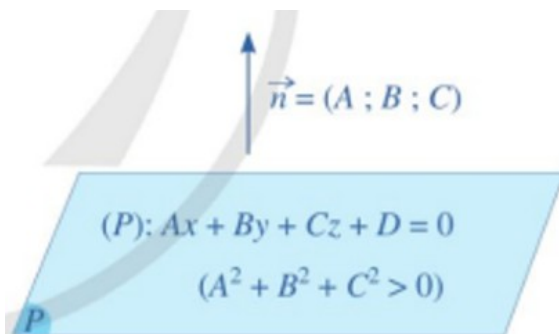
- Ngược lại, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, đều xác định một mặt phẳng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0) là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Hệ số D gọi là hệ số tự do của phương trình tổng quát.

Nhận xét

Ta có thể chứng minh được rằng nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là

$Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, thì vector $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



Ví dụ 4: Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x^2 + y + z - 1 = 0$.

B. $x + y^2 + z - 1 = 0$

C. $x + y + z^2 - 1 = 0$

D. $x + y + z - 1 = 0$

Giải

Ta thấy chỉ có phương trình $x + y + z - 1 = 0$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Chọn D

Ví dụ 5: Chỉ ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $2x - y + z - 1 = 0$.

Giải

Ta có: $2x - y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z - 1 = 0$

Mặt phẳng (P) nhận $n = (2; -1; 1)$ làm vector pháp tuyến.

III. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG BIẾT MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN

1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vector pháp tuyến

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $n = (A; B; C)$ làm vector pháp tuyến có phương trình tổng quát là:

$$Ax + By + Cz + D = 0, D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Chú ý: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $n = (A; B; C)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ví dụ 6: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1; 2; 7)$ và nhận $n = (3; 2; 1)$ làm vector pháp tuyến.

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + z - 14 = 0$$

2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vector chỉ phương

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ có cặp vector chỉ phương là u, v , ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm $n = [u, v]$.

Bước 2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ nhận n làm vector pháp tuyến.

Ví dụ 7: Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $I(-3; 1; 0)$ có cặp vector chỉ phương là $u = (2; 1; -1), v = (-1; 3; 2)$.

Giải

Xét vector $\vec{n} = [u, v] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$, tức là $\vec{n} = (5; -3; 7)$. Khi đó, $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$5 \cdot (x+3) + (-3) \cdot (y-1) + 7 \cdot (z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3y + 7z + 18 = 0.$$

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $H(a_1; b_1; c_1), I(a_2; b_2; c_2), K(a_3; b_3; c_3)$ không thẳng hàng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{HI} = (a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1), \vec{HK} = (a_3 - a_1; b_3 - b_1; c_3 - c_1).$$

Bước 2. Tìm $\vec{n} = [\vec{HI}, \vec{HK}]$.

Bước 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(a_1; b_1; c_1)$ nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến.

Ví dụ 8: Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2), B(1; 1; 1)$ và $C(0; 1; 2)$.
Giải

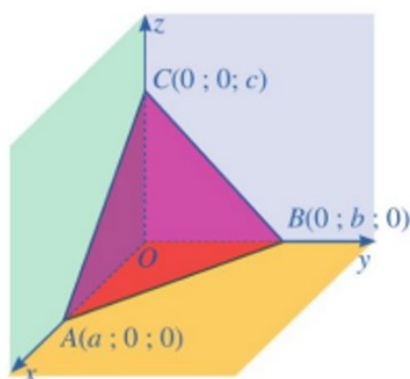
Ta có: $\vec{AB} = (0; 1; -1), \vec{AC} = (-1; 1; 0)$.

Xét vector $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$, tức là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Khi đó, $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là: $x + y + z - 3 = 0$.

Ví dụ 9: Cho ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .



Giải

Ta có: $\vec{AB} = (-a; b; 0) \neq 0, \vec{AC} = (-a; 0; c) \neq 0$.

Xét vector

$$\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right), \text{ tức là } n = (bc; ca; ab).$$

Do $n \neq 0$ nên n là vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

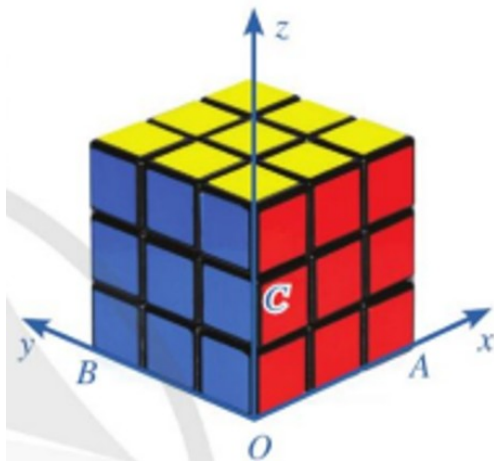
$$bc \cdot (x - a) + ca \cdot (y - 0) + ab \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow bcx + cay + abz - abc = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Phương trình đó còn được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Ví dụ 10: Khối rubik được gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh hình lập phương nhỏ. Xét bốn điểm $A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 2)$ và $D(1; 1; 1)$.



a) Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?

Giải

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 (*)$

b) Thay tọa độ của điểm D vào vế trái của phương trình (*), ta có: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq 1$. Suy ra điểm D không thuộc mặt phẳng (ABC) .

Vậy bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

IV. ĐIỀU KIỆN SONG SONG, VUÔNG GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG, GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG

1. Điều kiện song song của hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Gọi $n_1 = (A_1; B_1; C_1), n_2 = (A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là vector pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

Khi đó: $(P_1) // (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho
$$\begin{cases} n_1 = kn_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$
.

Ví dụ 11: Cho hai mặt phẳng

$$(P_1): 2x - y - 3z + 1 = 0,$$

$$(P_2): 6x - 3y - 9z + 1 = 0.$$

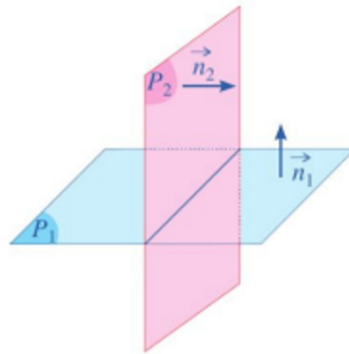
Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

Giải

Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vector pháp tuyến $n_1 = (2; -1; -3), n_2 = (6; -3; -9)$.

Vì $n_2 = 3n_1$ và $D_1 = 1 \neq 3 \cdot 1 = 3D_2$ nên $(P_1) // (P_2)$.

2. Điều kiện vuông góc của hai mặt phẳng



Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó: $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1), n_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Ví dụ 12: Cho hai mặt phẳng $(P_1): \sqrt{3}x + z + 5 = 0$ và $(P_2): -\sqrt{3}x + z - 7 = 0$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

Giải

Do (P_1) và (P_2) có hai vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (\sqrt{3}; 0; 1), n_2 = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ nên

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $((P_1), (P_2)) = 60^\circ$.

Ví dụ 13: Cho hai mặt phẳng
 $(P_1): x - y - 2z + 4 = 0,$
 $(P_2): x - y + z + 5 = 0.$

Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$.

Giải

Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (1; -1; -2), n_2 = (1; -1; 1)$.

Vì $n_1 \cdot n_2 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 0$ nên $n_1 \perp n_2$. Vậy $(P_1) \perp (P_2)$.

V. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Một cách tổng quát, ta có:

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P) :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0) \quad \text{được tính theo công thức:}$$

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 14: Cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 3 = 0$ và điểm $M_0(3; 1; -5)$. Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) .

Giải

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) là:

$$d(M_0, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 4.$$

Ví dụ 15: Cho mặt phẳng $(P_1): 2x - 4y - 4z + 3 = 0$ và mặt phẳng $(P_2): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P_1), (P_2)$.

Giải

a) Ta có $n_1 = (2; -4; -4), n_2 = (1; -2; -2)$ lần lượt là hai vector pháp tuyến của các mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Do $n_1 = 2n_2, D_1 = 3 \neq 2 \cdot 1 = 2D_2$ nên $(P_1) // (P_2)$.

b) Chọn điểm $M_0\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right) \in (P_1)$. Suy ra khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P_2) là:

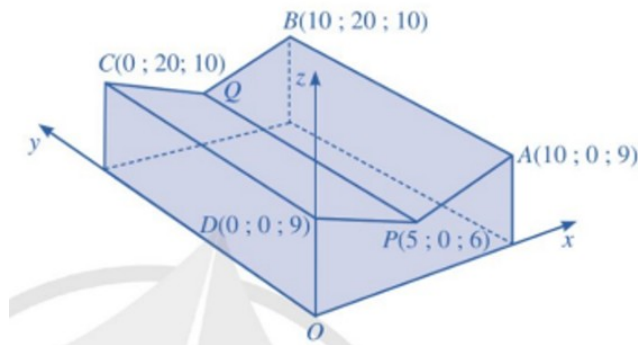
$$d(M_0, (P_2)) = \frac{\left| -\frac{3}{2} + 1 \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{6}.$$

Do khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1) , (P_2) bằng $d(M_0, (P_2))$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P_1), (P_2)$ bằng $\frac{1}{6}$.

VI. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG THỰC TIỄN

Phương trình mặt phẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật,... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 16: Hình minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.



a) Lập phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.

b) Tìm tọa độ của điểm Q .

c) Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{PQ}$.

Giải

a) Hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà là (ABP) và (CDP) .

- Do mặt phẳng (ABP) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 20; 1)$, $\overrightarrow{AP} = (-5; 0; -3)$ nên có một vector pháp tuyến là:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}] = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = (-60; -5; 100).$$

Mà mặt phẳng (ABP) đi qua điểm $A(10; 0; 9)$ nên có phương trình là:

$$-60(x - 10) - 5(y - 0) + 100(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 12x + y - 20z + 60 = 0.$$

- Do mặt phẳng (CDP) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{DP} = (5; 0; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 20; 1)$ nên có một vector pháp tuyến là:

$$[\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{DC}] = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = (60; -5; 100).$$

Mà mặt phẳng (CDP) đi qua điểm $D(0; 0; 9)$ nên có phương trình là:

$$60(x - 0) - 5(y - 0) + 100(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 12x - y + 20z - 180 = 0.$$

b) Vì các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ toạ độ trên ta có $Q(x; 20; z)$.

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (ABP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn:

$$12x + 20 - 20z + 60 = 0, \text{ là } 3x - 5z = -20.$$

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (CDP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn

$$12x - 20 + 20z - 180 = 0, \text{ là } 3x + 5z = 50.$$

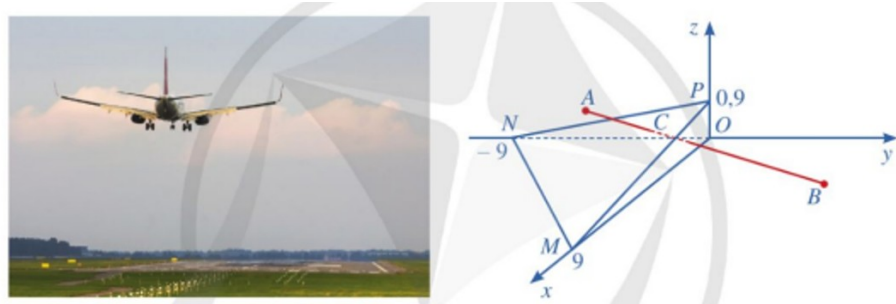
Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 5z = -20 \\ 3x + 5z = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ z = 7 \end{cases}.$$

Vậy $Q(5; 20; 7)$.

c) Với $P(5; 0; 6)$ và $Q(5; 20; 7)$ ta có: $\overrightarrow{PQ} = (0; 20; 1)$.

Ví dụ 17: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2,5; 0,5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3; 7,5; 0)$ trên đường băng.

a) Sau bao nhiêu phút máy bay từ vị trí A hạ cánh tại vị trí B ? Biết tốc độ của máy bay là 300 km/h trên quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).



b) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9; 0; 0)$, $N(0; -9; 0)$, $P(0; 0; 9)$. Tính độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

Giải

a) Ta có: $AB = \sqrt{(3-3)^2 + (7,5+2,5)^2 + (0-0,5)^2} = \sqrt{100,25} \text{ (km)}$.

Do đó, thời gian để máy bay từ vị trí A hạ cánh tại vị trí B là:

$$\frac{\sqrt{100,25}}{300} \text{ (h)} = \frac{\sqrt{100,25}}{300} \cdot 60 \text{ (phút)} = \frac{\sqrt{100,25}}{5} \text{ (phút)} = \sqrt{4,01} \text{ (phút)} \approx 2 \text{ (phút)}.$$

b) Giả sử điểm $C(x_C; y_C; z_C)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (\alpha)$. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta thấy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$\frac{x}{9} - \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow x - y + 10z = 9. \text{ Suy ra } x_C - y_C + 10z_C = 9.$$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ là hai vector cùng hướng nên tồn tại số thực $t > 0$ sao cho $\overrightarrow{AC} = t \overrightarrow{AB}$. Do

$$\overrightarrow{AC} = (x_c - 3; y_c + 2,5; z_c - 0,5);$$

$$\text{nên } \begin{cases} x_c - 3 = 0t \\ y_c + 2,5 = 10t \\ z_c - 0,5 = -0,5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 3 \\ y_c = 10t - 2,5 \\ z_c = -0,5t + 0,5. \end{cases}$$

Vì $C \in (\alpha)$ nên $3 - (10t - 2,5) + 10(-0,5t + 0,5) = 9 \Leftrightarrow t = 0,1$. Suy ra $C(3; -1,5; 0,45)$.

Vậy tại vị trí C , độ cao của máy bay là $0,45 \text{ km}$.